

In the particular case, when P involves no operator of order p^2 it is easy to see that the operators of each of these quotient groups may correspond independently to all of these powers, so that I_2 includes I_3 and the direct product of m cyclic subgroups of order $p-1$. In this case the quotient group of I_2 with respect to I_3 $\frac{I_2}{I_3}$ is of order $(p-1)^m$. It is clear that this quotient group is always contained in the largest subgroup of A which includes no operator of order p and hence is always abelian irrespective of the type of P . We proceed to find its order.

To attain this end it is convenient to observe that after the independent generators of P have been selected in any particular manner, it is always possible, by changing at most one of them, to assume that any arbitrary operator of order p in P is a power of one of its independent generators. In the group generated by the remaining independent generators we may select an independent generator in the same manner, etc. Let P_{α} be the smallest of the subgroups $P_1, P_2, \dots, P_{\alpha}$ which contains an independent generator (t_1) of P such that the powers of t_1 include P_1 . Let P_{β_1} ($\beta_1 \geq \alpha_1$) be the largest of these subgroups which is generated by t_1 . The operators of P_{β_1+1} which are not contained in P_{β_1} ($P_{\beta_1+1} - P_{\beta_1}$) do not include any power of t_1 . If they include any operator of order p , this is necessarily true when $\beta_1 = \alpha_1$, let t_2 be the independent generator of P whose powers include this operator. It is clear that in the holomorphisms under consideration the independent generators t_1, t_2 can be made isomorphic with their various powers independently of each other.

On the other hand, if $P_{\beta_1+1} - P_{\beta_1}$ contains no operator of order p all its operators are of order p^{β_1+1} and t_2 may represent an independent generator of P which includes an arbitrary operator of order p obtained by multiplying one of these operators of order p^{β_1+1} into a power of t_1 . In this case the holomorphisms under consideration require that t_2 should correspond, to its γ power ($\gamma = 1, 2, \dots, p-1$) multiplied by an operator of P_{β_1} , whenever t_1 corresponds, to this power of itself. Let P_{β_2} be the largest of the subgroups $P_1, P_2, \dots, P_{\alpha}$ which is generated by t_1 and t_2 . None of these operators are found in $P_{\beta_1+1} - P_{\beta_1}$. If this contains an operator of order p the independent generator (t_3) of P whose powers include this operator, may again be made to correspond to its $1, 2, \dots, p-1$ powers independently of the correspondence of the others, etc. Hence the order of I_2 is equal to the order of I_3 multiplied by $(p-1)^l$, where l is the number of times that a set of operators like $P_{\beta_1+1} - P_{\beta_1}$ includes operators of order p .

A. PRZEBORSKI.

NIKTÓRE ZASTOSOWANIA TEORII KONGRUENCYJ LINIOWYCH.

WSTĘP.

Początek teorii kongruencji liniowych, t. j. układów linii prostych w przestrzeni, których równanie zależy od dwu parametrów, dał Monge w 1781 r. w Rozprawach Akademii nauk w Paryżu. Dalsze rozwinięcie tej teorii w przypadku, w którym proste kongruencji tworzą układ normalnych do pewnej powierzchni, znajdujemy w znakomitej pracy tego geometry: „Application de l'Analyse à la Géométrie“ oraz w jego „Théorie des déblais et des remblais“. Badanie tego szczególnego przypadku kongruencji liniowych wiąże Monge ściśle z nauką o krzywiznie powierzchni, t. j. z pytaniem, mającym znaczenie pierwszorzędne w teorii powierzchni.

Z innego zupełnie widzenia rozważają kongruencje normalnych Malus i Dupin¹⁾. Geometrowie ci doszli do badania tych kongruencji przy rozpatrywaniu pytania o rozchodzeniu się światła w ośrodkach izotropowych, a zwłaszcza przy badaniu załamania i odbicia światła. Wynikiem tych badań był cały szereg twierdzeń, odgrywających ważną rolę w optyce geometrycznej. Najważniejsze z tych twierdzeń znajdzie czytelnik w pierwszym rozdziale pracy niniejszej.

Szczególnie ważnem jest twierdzenie, noszące nazwę twierdzenia Malusa-Dupina; istota jego polega na tem, że układy promieni normal-

¹⁾ Malus. Optique. Journal de l'École Polytechnique, XVI Cahier 1807.

²⁾ Dupin. Sur les routes suivies par la lumière et par les corps élastiques en général dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction (Application de géométrie et de mécanique à la marine, aux ponts et chaussées, etc. Paris 1822).

nych do pewnej powierzchni pozostają kongruencjami normalnych po jakiegokolwiek liczbie załamania i odbici w ośrodkach izotropowych. Dzięki tej własności promieni, w rozważaniu pytania o rozchodzeniu się światła w ośrodkach izotropowych można ograniczyć się do rozważania tylko kongruencji linii normalnych, jak to czynią Malus i Dupin.

Dopiero rozpoczęcie badań nad załamaniem światła w kryształach dało pobudkę do badania kongruencji liniowych ogólniejszych. W samej rzeczy, doświadczenie wykazało, że każdy układ promieni, po załamaniu się w kryształach, rozpada się na dwa układy, mianowicie na układ promieni zwykłych i układ promieni nadzwyczajnych. Pierwsze z nich ulegają tym samym prawom załamania, co promienie w ośrodkach izotropowych, drugie prawom tym nie podlegają, a między innymi nie podlegają prawu Malusa-Dupina, t. j. przestają być kongruencjami normalnymi do pewnej powierzchni.

Pierwszą pracą, poświęconą teorii promieni nadzwyczajnych, była rozprawa Hamiltona „Theory of Systems of Rays” (Transaction of the Irish Academy, t. XV, 1830), a zwłaszcza teoria ta jest rozwinięta w dopełnieniu do tej rozprawy (ogłoszonej w t. XVI tegoż wydawnictwa). Za podstawę badań swych przyjmuje Hamilton zasadę najmniejszego działania, lubo za cel główny stawia sobie zbadanie własności geometrycznych rozważanych promieni.

Badania Hamiltona posunęły znacznie teorię kongruencji liniowych, nie objęły wszakże kongruencji najogólniejszych. W samej rzeczy, badania te, jak powiedziano, odnoszą się do promieni światła; te zaś mają następującą własność charakterystyczną: mianowicie kierunek ich w każdym ośrodku jednorodnym znajduje się w ściślejszej zależności od kierunku odpowiednich płaszczyzn stycznych do powierzchni fali, t. j. do niektórych powierzchni, określonych dla każdego ośrodka jednorodnego.

Teorię ogólną jakiegokolwiek kongruencji liniowych znajdujemy po raz pierwszy w znakomitej rozprawie Kummera: „Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme” (Crelle's Journal, t. 57, 1859). W rozprawie tej Kummer, opierając się na odpowiedniości jednoznacznej pomiędzy punktami jakiegokolwiek powierzchni a prostymi jakiegokolwiek kongruencji i stosując metody geometrii różniczkowej, znajduje wszystkie najważniejsze własności kongruencji liniowych. Tym sposobem rozprawa ta ustanowiła, rzecz można, zupełną teorię ogólną kongruencji liniowych.

Następne prace w tej dziedzinie, jeżeli pominiemy prace Plückera i niektórych geometrów niemieckich, były poświęcone głównie różnym zastosowaniom teorii kongruencji liniowych do optyki i teorii powierzchni. I tak wkrótce po rozprawie Kummera ukazała się praca Meibauera: „Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichtes, Berlin 1864”, w której teoria Kummera stosowana jest do optyki. Bardziej oryginalną jest praca Levistala: „Recherches d'optique géométrique”, ogłoszona

w r. 1864 w t. IV czasopisma: „Annales scientifiques de l'École normale supérieure”.

Wspomnieliśmy wyżej o badaniach Plückera. Znakomity twórca geometrii liniowej, w której jako element przestrzeni przyjęta jest prosta, musiał oczywiście rozpatrywać układy prostych, zależnych od dwóch parametrów, t. j. kongruencje liniowe. W dziele jego klasycznym „Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement” (Lipsk 186²/₃) znajdujemy badanie ogólne o kongruencjach liniowych stopnia pierwszego i drugiego. Tym sposobem rozpoczęto badania algebraiczne nad kongruencjami, prowadzone dalej przez Kummera, Schumachera, a w ostatnim czasie przez Rudolfa Sturm'a i innych geometrów niemieckich.

Dzielo Sturm'a „Die Gebilde ersten und zweiten Grades in synthetischer Behandlung” (Lipsk 189²/₃) obejmuje szczegółowe badania, dotyczące teorii kongruencji liniowych stopnia 1-go i 2-go w duchu geometrii syntetycznej.

Gdy geometrowie niemieccy, idąc za Kummerem i Plückerem, rozwijali i rozwijają teorię kongruencji liniowych, że tak powiemy, samą w sobie, matematycy francuscy pracują w duchu Monge'a nad zastosowaniami tej teorii do teorii powierzchni. O ile nam wiadomo, pierwszą obszerną pracą w tym kierunku jest znana rozprawa Ribaucoura: „Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle”¹⁾. W tej świetnej rozprawie Ribaucour sprowadza badanie powierzchni najmniejszych (minimalnych) do badania kongruencji izotropowych, t. j. kongruencji, których płaszczyzny ogniskowe są styczne do koła w nieskończoności. Cały szereg nowych i bardzo ważnych wyników, oraz mnóstwo zagadnień postawionych i zaznaczonych w tej rozprawie, stwierdzają ważność i płodność badań nad kongruencjami liniowymi. Nadto rozprawa ta jest interesującą i z innego względu, gdyż Ribaucour stosuje w niej systematycznie metodę, znaną pod nazwą perymorfii, metodę, której doniosłość stwierdziły były dawniejsze prace: O. Bonnet'a, Codazzi'ego, Laguerre'a, Lamé'go. Istota metody tej polega na tem, że punkty przestrzeni odnosimy nie do nieruchomego układu współrzędnych, lecz do pewnego trójskładu ruchomego, związanego sposobem określonym z jakąkolwiek powierzchnią współrzędnych. Tę samą metodę stosuje Ribaucour, i w innej godnej uwagi rozprawie, napisanej w r. 1876 i ogłoszonej dopiero w r. 1891 w „Journal de mathématiques pures et appliquées” p. t. „Mémoire sur la théorie des surfaces courbes”. W pracy tej znajdujemy wykład systematyczny własno-

¹⁾ Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. t. 44, 1881.

ści kongruencji liniowych, związanych różnymi sposobami z jakąkolwiek powierzchnią. Z tych i z innych własności kongruencji, związanych w sposób określony z powierzchnią, wyprowadzamy cały szereg własności, charakteryzujących powierzchnię. Nadto, teoria kongruencji pozwala tu zbadać szereg pytań, dotyczących różnych odpowiedniości pomiędzy powierzchniami, jak np. związku zachodzącego wtedy, gdy płaszczyzny styczne w odpowiednich punktach dwu powierzchni są równoległe; związki, gdy dwie odpowiednie krzywe na obu powierzchniach są wzajemnie ortogonalne. Następnie Ribaucour stosuje otrzymane wyniki do teorii układów potrójnie ortogonalnych, do teorii zginania powierzchni, do pytania o nieskończenie małych przekształceniach powierzchni i do wielu innych pytań.

Nie możemy tu wdawać się w szczegółowy rozbiór bogatego materiału, zawartego w tej rozprawie; wystarczy powiedzieć, że rozprawa ta stała się źródłem obszernych badań Darboux'a, Guicharda, Cosserata. Bianchi'ego, i że dotąd jeszcze wiele ważnych i interesujących pomysłów Ribaucoura, zawartych w tej rozprawie i w poprzednio wymienionej pracy „Sur les elassoides”, czeka na dalsze rozwinięcie.

Z pomiędzy prac Cosserata wymienimy dwie obszernie rozprawy, ogłoszone w t. 7 i 8 czasopisma: „Annales de la Faculté des sciences de Toulouse”. Zadaniem pierwszej z nich, noszącej tytuł „Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces” jest dalsze rozwinięcie rozdziału rozprawy Ribaucoura, traktującego o kongruencyach linii prostych równoległych do normalnych pewnej powierzchni. Pomiedzy pytaniami, związanymi z tą teorią, rozważa Cosserat pytanie o odwzorowania kulistym powierzchni, o odkształceniach powierzchni przy zachowaniu układu linii sprężonych, a w szczególności linii krzywiznowych (zagadnienie O. Bonnet'a), wreszcie pytanie o nieskończenie małych odkształceniach powierzchni. Tem ostatniem pytaniem zajmuje się Cosserat w drugiej z wymienionych rozpraw, mającej tytuł: „Sur la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible et sur les congruences des droites”. I w tej rozprawie znajdujemy dalsze rozwinięcie pomysłów Ribaucoura o zmianie gaussowskiej krzywizny powierzchni przy przejściu do powierzchni nieskończenie bliskiej. Wychodząc z uważania pewnej kongruencji liniowej, Cosserat bada odkształcenie nieskończenie małe powierzchni i rozwiązuje znane zagadnienie Christoffela o odwzorowaniu podobnem jednej powierzchni na drugiej.

Nie będziemy tu zatrzymywać się nad pracami Guicharda o kongruencyach liniowych w ogólności i o tak zwanych kongruencyach W w szczególności; kongruencyami W nazywamy takie, w których liniom asymptotycznym jednej ich powierzchni ogniskowej odpowiadają linie asymp-

totyczne drugiej¹⁾. Wykład szczegółowy badań Cosserata i Guicharda znajdujemy w t. 4 „Théorie des surfaces” Darboux'a i w „Vorlesungen über Differentialgeometrie” Bianchi'ego.

Winniliśmy wspomnieć jeszcze o interesującej rozprawie Thybauta: „Sur la déformation du paraboloides et sur quelques problèmes qui s'y rattachent” (Annales scientifiques de l'École normale supérieure (3), t. 14). Wychodząc z rozważania pewnej kongruencji liniowej, Thybaut daje dowód interesującego twierdzenia Weingartena, dotyczącego pytania o szukaniu powierzchni, które dają się nawinąć na powierzchnię daną²⁾; znajduje związek pomiędzy zagadnieniem o odkształceniu paraboloida a zagadnieniem o wyznaczaniu powierzchni izotermicznych; bada wreszcie pewną ciekawą kongruencję W , której powierzchnie ogniskowe są powierzchniami minimalnymi.

Już to pobieżne wliczenie pytań, których rozwiązanie daje teoria kongruencji liniowych, wykazuje—jak miemam—znaczenie teorii tej dla teorii powierzchni; wolno nawet twierdzić, że teoria powierzchni jest, właściwie mówiąc, szeregiem zadań szczególnych, należących do teorii kongruencji liniowych.

Nie wymieniając prac, poświęconych różnym zastosowaniom teorii kongruencji liniowych, przejdziemy do prac, pozostających w ścisłym związku z przedmiotem naszego badania.

W r. 1870 Ribaucour ogłosił w „Comptes rendus” niewielką notę p. t. „Sur la déformation des surfaces”, w której między innymi podaje twierdzenie następujące:

Jeżeli jest dana powierzchnia S o krzywiznie stałej $-\frac{1}{a^2}$, to koła C o promieniu a , narysowane na płaszczyznach stycznych do powierzchni S i mające środki w punktach styczności, są ortogonalne do pewnej rodziny powierzchni S_1 . Wszystkie te powierzchnie, do tej rodziny należące, mają też samą krzywiznę stałą $-\frac{1}{a^2}$.

¹⁾ Guichard. „Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables” (Annales scient. de l'École norm. sup. (3), t. VI). Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale (Comptes rendus, t. CX).

²⁾ Weingarten. „Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée” (C. R. t. CXII); „Sur la déformation des surfaces” (Acta mathematica t. XX).

Twierdzenie to, na które sam Ribaucour i inni matematycy nie zwrócili szczególnej uwagi, a które znalazł ponownie Bianchi w roku 1879 ¹⁾, dało początek tak zwanej teorii przekształceń powierzchni o krzywiznie stałej gaussowskiej. Wyniki, otrzymane przez Bianchi'ego, uogólnił od razu Lie w nocie: „Ueber Flächen deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind“ ²⁾.

Kombinując przekształcenia Bianchi'ego i Liego, dochodzimy do nowego przekształcenia powierzchni o krzywiznie stałej, znalezione niezależnie przez Bäcklunda ³⁾. Przekształcenie Bäcklunda nazywamy, rozwiązując następujące zagadnienie z teorii kongruencji liniowych:

Znaleźć kongruencję prostych, dla których odległości punktów ogniskowych i kąt między płaszczyznami ogniskowymi są stałe i równe odpowiednio m i $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

Okazuje się, że powierzchnie ogniskowe takiej kongruencji mają krzywiznę stałą równą $-\frac{\cos^2 \sigma}{m^2}$, przyczem znając jedną powierzchnię ogniskową Σ , znajdujemy przy pomocy kwadratur drugą powierzchnię Σ_1 .

Przejdźcie od powierzchni Σ do powierzchni Σ_1 jest właśnie przekształceniem Bäcklunda; przy danej krzywiznie powierzchni Σ cechuje to przekształcenie stała σ i dlatego oznaczamy je symbolicznie przez B_σ .

Jest jasne, że wielkości σ i m będą równocześnie rzeczywistymi tylko wtedy, gdy krzywizna powierzchni Σ jest ujemna. Tym sposobem przekształcenia Bäcklunda prowadzą do powierzchni rzeczywistych tylko wtedy, gdy są stosowane do powierzchni o krzywiznie stałej ujemnej.

Wypływa tu samo przez się pytanie, czy nie można tak skombinować dwóch kolejnych przekształceń Bäcklunda, aby dały one pewne przekształcenie rzeczywiste powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej. Wszystkie usiłowania geometrów, a głównie Bianchi'ego, zajmujących się tem pytaniem, pozostały daremnymi aż do niedawnego czasu.

W r. 1899 Guichard pomieścił w „Comptes rendus“ ⁴⁾ dwa wielce ciekawe twierdzenia, dające odpowiedź na następujące pytanie: Znaleźć

warunki, przy których kongruencja liniowa, związana niezmiennie z pewną powierzchnią S , pozostaje przy wszystkich możliwych odkształceniach powierzchni S kongruencją normalnych do powierzchni minimalnych albo do powierzchni o krzywiznie stałej gaussowskiej.

W przypadku szczególnym, gdy rozważana kongruencja dotyka powierzchni S , pytanie to rozwiązał już dawniej Weingarten ¹⁾; to właśnie badanie Weingartena stało się źródłem twierdzenia Guicharda.

Prawie równocześnie ukazały się dowodzenia twierdzeń Guicharda przy pomocy dwóch metod zupełnie różnych; jedno Bianchi'ego w *Atti della R. Accademia dei Lincei* (t. VIII, 4, 1899), drugie Darboux'a w „Comptes rendus“ (t. CXXXVIII, posiedz. d. 27 marca 1899). Ci znakomici geometrowie poświęcili nadto tymże twierdzeniom i wnioskowi z nich kilka not, które Bianchi zebrał w rozprawie większej p. t. „Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante“ ²⁾; Darboux zaś w rozprawie: „Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les transformations des surfaces à courbure totale constante“ ³⁾.

Jednym z najważniejszych i najciekawszych wniosków z twierdzenia Guicharda jest ten, że znając jedną z powierzchni minimalnych albo powierzchni o krzywiznie stałej normalnych do kongruencji Guicharda, znamy zarazem i drugą taką powierzchnię. Tym sposobem twierdzenie Guicharda doprowadza do pewnego rzeczywistego przekształcenia powierzchni minimalnych i powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej albo ujemnej.

Należało teraz, naturalnie, podjąć pytanie, czy przekształcenia tych ostatnich powierzchni nie można sprowadzić do przekształceń Bäcklunda? Na pytanie to otrzymano odpowiedź twierdzącą, mianowicie, że rozpatrywane przekształcenie daje się rozłożyć na dwa kolejne urojone przekształcenia Bäcklunda. Tym sposobem drogą uboczną znaleziono rozwiązanie częściowe zagadnienia o przekształceniach rzeczywistych powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej, rozwiązanie które, jak widzieliśmy, tak długo usuwało się Bianchi'emu i innym geometrów.

Okoliczność ta nie wyczerpuje atoli całego znaczenia twierdzeń Guicharda; w samej rzeczy, twierdzenia te doprowadziły do pewnego prze-

¹⁾ Bianchi. „Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi (Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, 1879); „Ueber die Flächen mit constanten negativer Krümmung“ (Mathem. Annalen, t. XVI, 1880).

²⁾ Archiv für Mathematik og Naturvidenskab. T. IV, 1879.

³⁾ Bäcklund. „Om ytor med konstant negativ krökning“ (Lunds Univ. Arsskrift t. 19, 1888).

⁴⁾ Guichard. „Sur la déformation des quadriques de révolution“.

¹⁾ Weingarten. „Ueber die Oberflächen für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist“ (Crelle's Journal, 1862); Darboux „Théorie des surfaces“, t. III.

²⁾ Annali di matematica (3), t. III, 1899.

³⁾ Annales Scientifiques de l'École normale supérieure (3), t. XVI, 1899.

166

kształcenia potrójnie ortogonalnych układów Weingartena¹⁾ i posłużyły do wykazania ciekawego związku pomiędzy przekształceniami powierzchni o krzywiznie stałej a pytaniem o odkształcaniach powierzchni rzędu drugiego. Okazało się mianowicie, że miejscem geometrycznym punktów przecięcia odpowiednich normalnych do dwóch powierzchni o krzywiznie stałej, z których jedna powstaje przez kolejne stosowanie do drugiej dwóch związanych ze sobą w pewien sposób przekształceń Bäcklunda, jest powierzchnią, dającą się nawiązać na pewną powierzchnię rzędu drugiego.

Twierdzenia Guicharda pobudziły mnie jeszcze w r. 1899, przed obznajmieniem się z pracami Darboux'a i Bianchi'ego, do szukania dowodów tych twierdzeń. W dowodzeniu posługiwałem się metodą perymorfii, tak że dowód mój jest odmienny od dowodów, podanych przez Darboux'a i Bianchi'ego.

Okazuje się, że promienie kongruencji Guicharda leżą na płaszczyznach krzywizny linii geodezyjnych niektórych powierzchni, dających się nawiązać na powierzchnie obrotowe; linie zaś geodezyjne są zgięciami południków. Na podstawie przytoczonego wyżej twierdzenia Weingartena wiadomo, że płaszczyzny te są styczne do pewnej innej powierzchni, dającej się także nawiązać na powierzchnię obrotową. To doprowadziło mnie naturalnie do zagadnienia następującego:

Znaleść warunki, przy których kongruencja prostych, leżących na płaszczyznach stycznych do pewnej powierzchni S_0 i niezmiennie z temi płaszczyznami związanych, pozostaje przy wszelkich przekształceniach powierzchni S_0 kongruencją normalnych do powierzchni minimalnych albo do powierzchni o krzywiznie stałej; przyczem rozumie się samo przez się, że płaszczyzny styczne do powierzchni S_0 są też niezmiennie związane z tą powierzchnią.

Już po rozwiązaniu²⁾ tego zagadnienia otrzymałem zeszyt 6-ty t. IX wydawnictwa „Atti della R. Accademia dei Lincei” z notą Bianchi'ego: „Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili”; znalazłem w tej pracy twierdzenie analogiczne, atoli bez dowodu, którego dotąd Bianchi nie ogłosił. Twierdzenie to (znane mi już wcześniej) nazywam twierdzeniem Bianchi'ego.

We wspomnianej wyżej rozprawie Bianchi'ego znajdujemy dowód twierdzeń odwrotnych do twierdzeń Guicharda; dają one z jednej

¹⁾ Patrz wspomnianą wyżej rozprawę Bianchi'ego.

²⁾ Rozwiązanie tego zagadnienia przedstawiłem Towarzystwu matematycznemu w Charkowie na posiedzeniu d. 27 października 1900 r.

strony przekształcenie powierzchni o krzywiznie stałej, z drugiej zaś powierzchni, które nawiązać można na powierzchnie rzędu drugiego. Wywód równań zasadniczych, nawiązujących do pytania, podany przez Bianchi'ego, jest dość skomplikowany, a przekształcenia same są dość sztuczne. Stosowana przezemnie metoda perymorfii upraszcza znacznie wywód równań, które odrazu otrzymać można w tej postaci, do której sprowadza je Bianchi drogą sztuczną. W rozprawie Bianchi'ego nie ma, oczywiście, dowodu twierdzeń, odwrotnych do twierdzeń Bianchi'ego; same zaś twierdzenia, bez dowodu podane są w nocie jego, ogłoszonej w t. IX wydawnictwa „Atti della Acc. dei Lincei”. Tamże podana jest wskazówka do otrzymania dowodu drugiego z tych twierdzeń, którego to dowodu samodzielnie znaleźć nie mogłem.

Na zakończenie podam w krótkości treść niniejszej rozprawy.

Rozdział pierwszy poświęcam wywodowi zasadniczych własności kongruencji liniowych; rozpatruję tu szereg zadań szczególnych, ważnych w badaniu dalszem; nieco szczegółowiej zatrzymuję się nad teorią osi optycznych, które rozważał pierwszy Darboux, i badam przypadek, w którym osi te tworzą kongruencję normalnych, którym to przypadkiem — o ile mi wiadomo — nie zajmowali się dotąd inni autorowie.

W rozdziale drugim badam szczegółowo powierzchnie ogniskowe kongruencji, wyprowadzam między innymi znane twierdzenie Weingartena. Większa część tego rozdziału jest poświęcona pytaniu o przekształceniu powierzchni o krzywiznie stałej. Po udowodnieniu prawa przemienności Bianchi'ego dla powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej, przy pomocy tegoż dochodzę drogą prostą do pewnego przekształcenia rzeczywistego powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej. Wywodząc prawo przemienności Bianchi'ego, stawiam zagadnienie ogólniejsze: szukam mianowicie warunków, którym czynić winny cztery stałe $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, aby kolejne stosowanie przekształceń $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ doprowadzało do tej samej powierzchni, do której doprowadza kolejne stosowanie przekształceń $B_{\sigma_3}, B_{\sigma_4}$. Okazuje się, że jest to możliwe jedynie w przypadku, gdy $\sigma_3 = \sigma_2$ i $\sigma_4 = \sigma_1$, t. j. w przypadku, który rozważał Bianchi.

Rozdział trzeci poświęcam wywodowi twierdzeń Guicharda, zwracając uwagę na związek pomiędzy kongruencją Guicharda a pewną kongruencją cykliczną; związek ten odgrywa ważną rolę w wywodzie twierdzeń, odwrotnych do twierdzeń Bianchi'ego.

W rozdziale czwartym podaję dowodzenie twierdzeń Bianchi'ego.

W rozdziale piątym zajmuję się dowodem twierdzeń, odwrotnych do twierdzeń Guicharda i Bianchi'ego, w przypadku powierzchni minimalnych; znajduję interesujące przekształcenie powierzchni minimalnych i zaznaczam związek pomiędzy tem przekształceniem a przekształceniem Thibaut'a, które ten geometra rozpatruje we wspomnianej już rozprawie

„Sur la déformation du paraboloïde etc.“ Podaję nowy dowód znanego twierdzenia Bonneta o powierzchniach minimalnych dołączonych. Sprowadzenie równań zasadniczych, rozwiązujących zagadnienie, postawione na początku tego rozdziału, do układu równań liniowych, otrzymuję przy pomocy własności kongruencji kół, rozpatrzonej w rozdziale trzecim.

W rozdziałach szóstym i siódmym rozpatruję twierdzenia odwrotne do twierdzeń Guicharda i Bianchi'ego, odnoszące się do powierzchni o krzywiznie stałej. Przy pomocy wyników rozdziału drugiego pokazuję, w jaki sposób otrzymane przekształcenia tych powierzchni prowadzą się do przekształceń Bianchi'ego.

Pozwolę sobie jeszcze powiedzieć kilka słów o metodzie stosowanej w tej rozprawie, a mianowicie o metodzie perymorfii. Zalety tej metody polegają, zdaje mi się na tem, że w niej układ współrzędnych jest ściśle i bezpośrednio związany z podaną powierzchnią lub kongruencją, gdy tymczasem każdy nieruchomy układ współrzędnych jest jakby pasorzytniczym, bo zupełnie niezwiązanym z daną figurą przestrzenną. Dalej, przy stosowaniu trójścianu ruchomego powierzchnia odgrywa rolę punktu (początku współrzędnych), co właśnie być powinno w geometrii różniczkowej. Co się dotyczy zarzutów, stawianych metodzie perymorfii, a dotyczących wprowadzenia kinematyki do geometrii, wyjaśnił już tę rzecz dostatecznie prof. Susłow w pracy, do której odsyłam czytelnika¹⁾. Powiem tylko, że w metodzie perymorfii kinematyka wchodzi do geometrii w sposób analogiczny do tego, w jaki geometria wchodzi do analizy, gdy mówimy o ruchu zmiennej na płaszczyźnie, po krzywej i t. d.; innymi słowy, posługujemy się wtedy tylko terminami kinematyki. Można zresztą i obyć się bez tego, jak to czyni Ribaucour w swoich rozprawach i Cesàro w swojej książce „Lezioni di geometria intrinseca“²⁾.

Co się dotyczy pojęcia przesunięcia (poza zależnością od czasu), to jest ono, jak to wykazały badania nowszych geometrów Helmholtza, Liégo, Poincarégo i innych, ściśle związane z naszymi wyobrażeniami przestrzennymi; zresztą przesunięcie nieskończenie małe badamy stale w geometrii różniczkowej. Aby się o tem przekonać, dość wgłębić się chociażby w teorię krzywizny linii i powierzchni.

ROZDZIAŁ I.

Podstawy ogólne teorii kongruencji liniowych.

§ 1. Kongruencją prostoliniową albo wprost liniową nazywać będziemy układ prostych w przestrzeni, których równanie zależy od dwóch parametrów dowolnych; proste, należące do danej kongruencji liniowej, nazywają się jej promieniami.

Ponieważ współrzędne punktu jakiejkolwiek powierzchni dają się wyrazić jako funkcje dwóch parametrów niezależnych, możemy tedy zawsze przyjmować, że pomiędzy punktami jakiejkolwiek powierzchni S a promieniami jakiejkolwiek kongruencji liniowej D zachodzi związek jednoznaczny, t. j. że każdemu punktowi powierzchni S odpowiada jedna prosta kongruencji D i na odwrót, każdej prostej, należącej do kongruencji D , należy jeden punkt powierzchni S .

Ustanawiając związek dowolny pomiędzy parametrami, otrzymujemy na powierzchni S pewną krzywą; krzywej tej odpowiadać będzie układ prostych kongruencji D , zależny od jednego parametru, t. j. pewna powierzchnia prostoliniowa. Tym sposobem każdej krzywej na powierzchni S odpowiada jedna powierzchnia prostoliniowa, utworzona z promieni kongruencji D , i odwrotnie; powierzchnię prostoliniową, utworzoną z promieni kongruencji D , nazywać będziemy wprost powierzchnią kongruencji D .

Pomiędzy temi powierzchniami mogą być oczywiście i powierzchnie rozwijalne. Krzywe na powierzchni S , odpowiadające powierzchniom rozwijalnym kongruencji D , nazywać będziemy krzywymi głównymi powierzchni S względem D . Jeżeli rozważać będziemy określoną powierzchnię S i określoną kongruencję D , to krzywe te będziemy nazywali wprost krzywymi głównymi.

Dowiedziemy, że każda kongruencja liniowa posiada dwa tylko układy rzeczywiste lub urojone powierzchni rozwijalnych; inaczej mówiąc: na jakiejkolwiek powierzchni S istnieją dwa i tylko dwa układy krzywych głównych względem jakiejkolwiek kongruencji liniowej.

Nie zmniejszając ogólności, możemy założyć, że odpowiedniość jednoznaczna pomiędzy promieniami kongruencji D a punktami powierzchni S jest taka, że każdemu punktowi powierzchni S odpowiada określony, przechodzący przez ten promień kongruencji D . Kongruencję promieni, w taki sposób związanych z powierzchnią S , nazywać będziemy kongruencją promieni padających na powierzchnię S .

¹⁾ Pochodne cząstkowe geometryczne funkcji — wielkość dwóch argumentów. (Spraw. Towarz. Matemat. Kijowskiego za r. 1900).

²⁾ Patrz także Laurent, Traité d'analyse, t. VII.

Każdemu układowi promieni padających D odpowiadać będzie układ promieni odbitych D' ; tak nazywać będziemy promienie symetryczne do promieni D względem odpowiednich płaszczyzn stycznych do powierzchni S .

W pracy naszej będziemy stale posługiwali się układem ruchomym współrzędnych prostokątnych (T) , którego płaszczyzna xy zlewa się z płaszczyznami stycznymi do pewnej powierzchni, a początek znajduje się w odpowiednim punkcie styczności. Położenie takiego układu współrzędnych, zależy od dwóch parametrów u, v .

Oznaczać będziemy, według Darboux'a, przez ξ, η rzuty przesunięć początku współrzędnych (T) na osi x i y tychże współrzędnych, w założeniu, że zmienia się jeden tylko parametr u ; rzuty odpowiedniego obrotu na osi x, y, z oznaczają będziemy przez p, q, r . Też wielkości, odpowiadające zmianom drugiego parametru v , oznaczają będziemy odpowiednio przez $\xi_1, \eta_1, p_1, q_1, r_1$.

Wprowadzone tu funkcje nie są dowolnymi, lecz czynią zadość sześciu równaniom Codazzi'ego-Mainardi'ego¹⁾:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= q r_1 - q_1 r, & \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= \eta r_1 - \eta_1 r, \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= r p_1 - r_1 p, & \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} &= r \xi_1 - r_1 \xi, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= p q_1 - p_1 q, & p \eta_1 - p_1 \eta &= q \xi_1 - q_1 \xi.\end{aligned}$$

Zwiążmy teraz sposobem określonym ten układ współrzędnych z wspomnianą powierzchnią S .

Równanie odpowiedniego promienia padającego kongruencji D względem układu (T) będzie:

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma},$$

a więc współrzędne dowolnego jego punktu wyrażają się w sposób:

$$x = \varrho \cos \alpha, \quad y = \varrho \cos \beta, \quad z = \varrho \cos \gamma.$$

Dajmy, że od określonego punktu $M(u, v)$ powierzchni S przechodzimy do punktu $M'(u+du, v+dv)$ wzdłuż krzywej głównej, wtedy punkt naszego promienia, będący punktem krawędzi zwrotu odpowiedniej powierz-

chni rozwijalnej, musi przesunąć się wzdłuż samego promienia. Rzuty przesunięć dowolnego punktu promienia na osi układu (T) wyrażają się, jak wiadomo, w ten sposób:

$$\begin{aligned}dx &= \xi du + \xi_1 dv + \varrho d \cos \alpha + \cos \alpha d\varrho + (q dv + q_1 dv) \varrho \cos \gamma - (r du + r_1 dv) \varrho \cos \beta, \\ dy &= \eta du + \eta_1 dv + \varrho d \cos \beta + \cos \beta d\varrho + (r du + r_1 dv) \varrho \cos \alpha - (p du + p_1 dv) \varrho \cos \gamma, \\ dz &= \varrho d \cos \gamma + \cos \gamma d\varrho + (p du + p_1 dv) \varrho \cos \beta - (q du + q_1 dv) \varrho \cos \alpha.\end{aligned}$$

Dla punktu odpowiadającego krawędzi zwrotu rozważanej powierzchni rozwijalnej, przesunięcia te winny czynić zadość związkom:

$$(1) \quad dx - \cos \alpha d\lambda = 0, \quad dy - \cos \beta d\lambda = 0, \quad dz - \cos \gamma d\lambda = 0,$$

gdzie $d\lambda$ jest współczynnikiem proporcjonalności. Rugując z tych równań ϱ i $d\varrho - d\lambda$, znajdziemy oczywiście równanie różniczkowe krzywych głównych; będzie ono postaci:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \xi du + \xi_1 dv, \cos \alpha, d \cos \alpha + (q dv + q_1 dv) \cos \gamma - (r du + r_1 dv) \cos \beta \\ \eta du + \eta_1 dv, \cos \beta, d \cos \beta + (r du + r_1 dv) \cos \alpha - (p du + p_1 dv) \cos \gamma \\ 0, \cos \gamma, d \cos \gamma + (p du + p_1 dv) \cos \beta - (q du + q_1 dv) \cos \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie to jest stopnia drugiego względem $\frac{du}{dv}$, skąd wnosimy, że przez każdy dany punkt powierzchni przechodzą dwie krzywe główne, rzeczywiste albo urojone.

Tym dwóm krzywym głównym odpowiadają dwie powierzchnie rozwijalne naszej kongruencji. Aby znaleźć współrzędne odpowiedniego punktu krawędzi zwrotu, musimy z równań (1) wyrugować $du, dv, d\varrho - d\lambda$, wtedy znajdziemy następujące równanie stopnia drugiego na wyznaczenie wielkości ϱ :

$$\begin{vmatrix} \xi + \varrho \left(\frac{\partial \cos \alpha}{\partial u} + q \cos \gamma - r \cos \beta \right), & \xi_1 + \varrho \left(\frac{\partial \cos \alpha}{\partial v} + q_1 \cos \gamma - r_1 \cos \beta \right), & \cos \alpha \\ \eta + \varrho \left(\frac{\partial \cos \beta}{\partial u} + r \cos \alpha - p \cos \gamma \right), & \eta_1 + \varrho \left(\frac{\partial \cos \beta}{\partial v} + r_1 \cos \alpha - p_1 \cos \gamma \right), & \cos \beta \\ \varrho \left(\frac{\partial \cos \gamma}{\partial u} + p \cos \beta - q \cos \alpha \right), & \varrho \left(\frac{\partial \cos \gamma}{\partial v} + p_1 \cos \beta - q_1 \cos \alpha \right), & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Punkty, należące do krawędzi zwrotu naszych powierzchni rozwijalnych, nazywają się punktami ogniskowymi lub ogniskami danego promienia. Z poprzedzającego wypływa, że na każdym promieniu są dwa

¹⁾ Wszystkie należące tu wzory znajdzie czytelnik w t. II dzieła Darboux'a: „Leçons sur la théorie générale des surfaces“, str. 382–386.

ogniska rzeczywiste albo urojone. Płaszczyzny styczne do odpowiednich powierzchni rozwijalnych nazywają się płaszczyznami ogniskowymi. Miejsce geometryczne ognisk nazywa się powierzchnią ogniskową; takich powierzchni ogniskowych każda kongruencja ma dwie. Powierzchnie ogniskowe możemy też uważać jako miejsce geometryczne krawędzi zwrotu powierzchni rozwijalnych kongruencji.

Z samego określenia powierzchni ogniskowych widać, że wszystkie promienie kongruencji są styczne do powierzchni ogniskowych.

Nietrudno spostrzedz, że wszystko, co wyżej podano, jest uogólnieniem znanych własności linii normalnych do powierzchni. W rzeczy samej, jeżeli przyjmiemy, że kongruencja D powstaje z normalnych do powierzchni S ,

t. j. że $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$, to równanie (2) będzie równaniem różniczkowym linii krzywiznowych, równanie zaś (3) da nam promienie krzywizny powierzchni S : płaszczyznami ogniskowymi będą wtedy płaszczyzny przecięć głównych, a powierzchniami ogniskowymi rozwinięte powierzchni S .

§ 2. Zobaczmy teraz, w jakim przypadku promienie naszej kongruencji D będą tworzyły układ normalnych pewnej powierzchni Σ .

Aby ta okoliczność zachodziła, jest koniecznem i dostatecznem, by na każdym promieniu istniał punkt, którego przesunięcia przy wszystkich możliwych zmianach parametrów u i v są ortogonalne do odpowiedniego promienia. Innymi słowy: jeżeli przez δx , δy , δz oznaczymy rzuty przesunięcia tego punktu na osi układu (T) , powinien dla wszystkich możliwych wartości du , dv zachodzić związek:

$$(4) \quad \delta x \cos \alpha + \delta y \cos \beta + \delta z \cos \gamma = 0.$$

Poczyńmy niektóre szczególne założenia o osiach (T) i liniach współrzędnych u , v ; przyjmijmy mianowicie, że liniami $v = \text{const.}$ są krzywe styczne do rzutów promieni kongruencji na odpowiednie płaszczyzny styczne do powierzchni S ; rzuty te przyjmijmy zarazem za osi x współrzędnych (T) . Jako krzywe $u = \text{const.}$ uważajmy krzywe normalne do krzywych $v = \text{const.}$; osiami y układu T będą styczne do nich. Przejdziemy do tego przypadku, kładąc we wzorach paragrafu poprzedzającego:

$$\xi_1 = \eta = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

skutkiem czego związek (4) przybierze postać:

$$(5) \quad dq + \xi \cos \alpha du = 0,$$

a ponieważ może on zachodzić dla wszelkich wartości du , dv , wnosimy stąd, że szukanym warunkiem będzie:

$$(6) \quad \frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0.$$

Widzimy przedewszystkiem, że warunek ten utrzymuje się, jeżeli zamiast a weźmiemy $-a$ i zamiast $\cos a$ weźmiemy $k \cos a$, gdzie k jest stałą. Lecz zmieniając a na $-a$, przechodzimy oczywiście od promieni padających do promieni odbitych, zmieniając $\cos a$ na $k \cos a$ przechodzimy od promieni padających do załamanych. Tym sposobem otrzymujemy sławne twierdzenie, znalezione przez Malusa dla promieni odbitych, przez Dupina dla promieni załamanych i dla tego nazwane twierdzeniem Malusa-Dupina, mianowicie:

Kongruencja promieni, stanowiąca układ normalnych pewnej powierzchni, pozostaje kongruencją normalnych i po jakiegokolwiek liczbie odbić i załamania.

Zwracając się jeszcze do warunku (6) widzimy, że zachodzą w nim tylko kąt α i współczynnik elementu liniowego powierzchni S . Założymy, że kongruencja D jest związana niezmiennie z powierzchnią S ; jeżeli będziemy odkształcali dowolnie tę powierzchnię, to kongruencja przybierać będzie różne położenia D' , D'' , ..., a ponieważ dla wszystkich tych kongruencji spełniać się będzie warunek (6), przeto wszystkie one będą kongruencjami normalnych. Tym sposobem otrzymujemy następujące twierdzenie Beltramięgo:

Jeżeli kongruencja liniowa promieni padających, związana niezmiennie z pewną powierzchnią S , jest kongruencją normalnych, to pozostaje taką i przy wszelkich odkształceniach powierzchni S .

§ 3. Zajmiemy się obecnie rozstrząsaniem następującego pytania: kiedy krzywe główne powierzchni S względem kongruencji promieni padających D tworzą układ krzywych sprzężonych? Można to pytanie wyrazić i tak: kiedy powierzchnie rozwijalne kongruencji D odpowiadają krzywym sprzężonym powierzchni S .

Równania linii sprzężonych jest, jak wiadomo:

$$-q \xi du du + p_1 \eta_1 dv dv + p_1 \eta_1 (du dv + dv du) = 0,$$

równania zaś krzywych głównych otrzymamy z równania (2), kładąc w tym przypadku $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\xi_1 = \eta = 0$; będzie tedy:

$$(7) \quad \xi \sin a (r \cos a - p \sin a) du^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial a}{\partial v} - q_1 \right) dv^2 + \left(\xi r_1 \cos a \sin a - \xi p_1 \sin^2 a + \eta_1 \frac{\partial a}{\partial u} - q \eta_1 \right) du dv = 0.$$

Stąd warunkiem szukanym będzie:

$$(8) \quad \sin a \cos a (p_1 r - p r_1) + q_1 \frac{\partial a}{\partial u} - q \frac{\partial a}{\partial v} = 0.$$

Warunek ten nie zmienia się, gdy zamiast a weźmiemy $-a$, t. j. przez przejście od promieni padających do odbitych, a zatem:

Jeżeli powierzchnie rozwijalne promieni padających odpowiadają krzywym sprzężonym powierzchni odbijającej S , to i powierzchnie rozwijalne promieni odbitych odpowiadają będą krzywym sprzężonym powierzchni S .

Twierdzenie to podał Malus.

§ 4. Krzywe główne, odpowiadające kongruencyom promieni padających i odbitych są w ogóle różne; zbadałmy, przy jakich warunkach zlewają się.

Równanie różniczkowe krzywych głównych promieni odbitych znajdziemy, i szcując w równaniu (7) $-a$ zamiast a ; będzie tedy:

$$(9) \quad \xi \sin a (p \sin a + r \cos a) du^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial a}{\partial v} + q_1 \right) dv^2 + \left(\xi r_1 \cos a \sin a + \xi p_1 \sin^2 a + \eta_1 \frac{\partial a}{\partial u} + q \eta_1 \right) du dv = 0.$$

Załóżmy najprzód, że funkcje p i q_1 są różne od zera, t. j. że krzywe u , v nie są liniami krzywiznowymi powierzchni S . Aby równania (7) i (9) były tożsame, jest koniecznem i dostatecznem, by zachodziły związki:

$$\frac{r \cos a - p \sin a}{r \cos a + p \sin a} = \frac{\frac{\partial a}{\partial v} - q_1}{\frac{\partial a}{\partial v} + q_1} = \frac{\xi r_1 \cos a \sin a - \xi p_1 \sin^2 a + \eta_1 \frac{\partial a}{\partial u} - q \eta_1}{\xi r_1 \cos a \sin a + \xi p_1 \sin^2 a + \eta_1 \frac{\partial a}{\partial u} + q \eta_1},$$

czyli:

$$(10) \quad \frac{p \sin a}{r \cos a} = \frac{q_1}{\frac{\partial a}{\partial v}} = \frac{\xi p_1 \sin^2 a + \eta_1 q}{\xi r_1 \cos a \sin a + \eta_1 \frac{\partial a}{\partial u}}.$$

Licznik i mianownik stosunku pierwszego pomnożywszy przez $\xi p_1 \sin a$, drugiego przez $-q \xi$, trzeciego przez $-p$ i dodawszy nowe liczniki, znajdziemy sumę zero, stąd wnosimy, że i suma nowych mianowników jest zerem, t. j.

$$(11) \quad \xi \sin a \cos a (p_1 r - p r_1) - q \xi \frac{\partial a}{\partial v} - p \eta_1 \frac{\partial a}{\partial u} = 0;$$

jest to nasz warunek poprzedni (8).

Kombinując znów dwa pierwsze stosunki w wyrażeniu (10), znajdziemy:

$$\eta_1 p \sin a \frac{\partial a}{\partial v} - q_1 \eta_1 r \cos a = 0,$$

lub, na zasadzie wzorów Coda zzi'ego - Mainardi'ego:

$$(12) \quad \frac{\partial (\xi \cos a)}{\partial v} = 0,$$

co wskazuje, że kongruencje rozważane są kongruencyami normalnych. Dochodzimy zatem do następującego twierdzenia:

Mamy pewną kongruencję promieni padających, których płaszczyzny padania nie zlewają się z przecięciami głównymi powierzchni odbijającej S ; jeżeli powierzchnie rozwijalne kongruencji promieni padających i odbitych odpowiadają sobie wzajemnie, wtedy: 1) promienie tak padające jak i odbite tworzą kongruencję normalnych do pewnych powierzchni; 2) ich powierzchnie rozwijalne odpowiadają krzywym sprzężonym powierzchni S .

Łatwo dowieść, że zachodzi twierdzenie odwrotne, mianowicie, że gdy spełniają się dwa ostatnie warunki, to powierzchnie rozwijalne kongruencji promieni padających i odbitych odpowiadają sobie wzajemnie. W samej rzeczy, warunki te wyrażają się analitycznie związkami (11) i (12); z ostatniego z nich mamy:

$$\frac{r \cos a}{p \sin a} = \frac{\frac{\partial a}{\partial v}}{q_1}.$$

Mnożąc licznik i mianownik pierwszego stosunku przez $\xi p_1 \sin a$, drugiego przez $-q \xi$, tworząc z nich proporcję złożoną i uwzględniając związek (11), dochodzimy do warunku (10).

§ 5. Pominęliśmy wyżej przypadek, w którym płaszczyzny padania promieni zlewają się z przecięciami głównymi powierzchni odbijającej S , t. j. przypadek, w którym $p = q_1 = 0$.

W tem założeniu warunki (10) sprowadzają się do jednego:

$$(13) \quad \xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 q = 0.$$

Niechaj R_1, R_2 będą promienie krzywizny naszej powierzchni; ponieważ:

$$R_1 = -\frac{\xi}{q}, \quad R_2 = \frac{\eta_1}{p_1},$$

będzie przeto:

$$(14) \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$$

gdzie jeden znak odpowiada promieniom padającym, drugi odbitym.

Łatwo spostrzedz, że promienie rozważanej kongruencji będą rzeczywistymi tylko wtedy, gdy R_1 i R_2 są jednego znaku, t. j. gdy krzywizna gaussowska powierzchni w danym punkcie będzie dodatnia, przyczem musi jeszcze koniecznie spełniać się warunek:

$$|R_2| < |R_1|.$$

Przy spełnieniu tych warunków, będziemy mieli dwa układy prostych:

$$y = 0, \quad z = x \operatorname{tg} \alpha; \quad y = 0, \quad z = -x \operatorname{tg} \alpha,$$

których powierzchnie rozwijalne będą sobie wzajemnie odpowiadały.

Rozpatrując kongruencje, utworzone z promieni analogicznych, leżących na płaszczyźnie drugiego przecięcia głównego powierzchni S , otrzymamy znowu dwa układy prostych, czyniących zadość postawionym warunkom, mianowicie:

$$x = 0, \quad z = y \operatorname{tg} \beta; \quad x = 0, \quad z = -y \operatorname{tg} \beta,$$

gdzie:

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Proste te będą rzeczywistymi przy warunku, gdy krzywizna gaussowska powierzchni S jest dodatnia i $|R_1| < |R_2|$.

Widzimy, że warunek drugi rzeczywistości ostatnich prostych jest sprzeczny z drugim warunkiem rzeczywistości prostych, poprzednio rozważanych.

Te kongruencje badał pierwszy Darboux i nazywał je kongruencjami osi optycznych powierzchni S .

Z powyższego wnosimy, że każda powierzchnia posiada cztery układy osi optycznych. W punktach powierzchni, w których krzywizna jej jest dodatnia, dwie osi optyczne, leżące w jednej płaszczyźnie, są rzeczywiste, dwie są urojone; w punktach zaś, w których krzywizna gaussowska jest ujemna, wszystkie cztery osi optyczne są urojone.

Chcąc wykreślić osi optyczne w punkcie powierzchni, w których krzywizna gaussowska jest dodatnia, postępujemy w ten sposób: znajdziemy równanie walca prostego kołowego, którego osią jest jedna z osi optycznych, a koło kierownicze ma promień dowolny a ; równaniem tem będzie:

$$\cos^2 \alpha (z - \operatorname{tg} \alpha x)^2 + y^2 = a^2.$$

Równaniem przecięcia tego walca z płaszczyzną styczną do powierzchni S będzie oczywiście:

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \frac{a^2}{R_2}, \quad z = 0,$$

a jest to elipsa, podobna do wskazującej Dupina dla danego punktu. Tym sposobem można powiedzieć:

Oś optyczna w punkcie powierzchni, w którym krzywizna gaussowska jest dodatnia, jest osią walca kołowego, przecinającego odpowiednią płaszczyznę styczną według wskazującej Dupina, punktowi styczności odpowiadającej.

Twierdzenie to można też wyrazić nieco inaczej. Równaniem elipsy, przedstawiającej wskazującą Dupina, będzie:

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 1,$$

a równaniem spółgłównkowej z nią hyperboli:

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{R_1 - R_2} - \frac{z^2}{R_2} = \pm 1.$$

Asymptoty tej hyperboli wyrażają się równaniami:

$$y = 0, \quad z = \pm \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2}} x,$$

a jest to właśnie równanie naszych osi optycznych. Wnosimy stąd, że:

Osi optyczne rzeczywiste są asymptotami hyperbol ogniskowych wskazującej Dupina.

§ 6. Lubo w wykładzie dalszym nie będziemy już mieli do czynienia z osiami optycznymi, pozwolimy sobie wszakże zatrzymać się nieco nad ich teorią. A czynimy to dlatego, że teoria ta, zaledwie naszkicowana przez Darboux'a, nie została dotąd rozwinięta.

Zajmiemy się w niniejszym paragrafie szukaniem warunków na to, aby kongruencja osi optycznych powierzchni była kongruencją normalnych. Z uwagi, że w rozważanym przypadku jest:

$$\xi = -qR_1, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_1}},$$

możemy warunek (6) przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial (q \sqrt{R_1} \cdot \sqrt{R_1 - R_2})}{\partial v} = 0,$$

lub także:

$$\frac{\partial \log (q \sqrt{R_1} \cdot \sqrt{R_1 - R_2})}{\partial v} = 0.$$

Przy pomocy związku:

$$\frac{\partial \log q}{\partial v} = \frac{1}{R_2 - R_1} \frac{\partial R_1}{\partial v},$$

wynikającego z wzorów Codazzi'ego-Mainardi'ego, możemy warunek powyższy przekształcić na następujący:

$$\frac{1}{2R_1(R_2 - R_1)} \frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial v} = \frac{1}{2R_1(R_2 - R_1)} \frac{\partial \left(\frac{1}{K} \right)}{\partial v} = 0,$$

gdzie K oznacza krzywiznę gaussowską powierzchni S .

Wnosimy stąd, że K jest funkcją samego tylko parametru u ; inaczej mówiąc, powierzchnia S jest taką, że jej krzywizna gaussowska pozostaje stałą wzdłuż linii krzywiznowych, ortogonalnych do rozważanych osi optycznych. Aby wszystkie osi optyczne były kongruencjami normalnych, jest koniecznem i dostatecznem, by krzywizna K czyniła zadość warunkom:

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial v} = 0,$$

t. j. aby była stałą. Stąd:

Tylko dla powierzchni krzywiznie stałej kongruencje osi optycznych są kongruencjami normalnych.

Podamy jeszcze jedną własność charakterystyczną osi optycznych, tworzących kongruencje normalnych.

Przekształćmy pierwsze z dwu równań:

$$\frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0, \quad \xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 q = 0,$$

którym czynią zadość w tym przypadku funkcje α , a mianowicie rozwinijmy je, pomnożmy przez $p_1 \sin \alpha$ i uwzględnijmy równanie drugie, a otrzymamy:

$$r p_1 \cos \alpha \sin \alpha - q \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0;$$

jest to właśnie warunek (8) paragrafu trzeciego, wykazujący, że powierzchnie rozwijalne naszej kongruencji odpowiadają krzywym sprzężonym powierzchni S . Tym sposobem otrzymaliśmy twierdzenie następujące:

Jeżeli kongruencja osi optycznych pewnej powierzchni S jest kongruencją normalnych, wtedy jej powierzchnie rozwijalne odpowiadają krzywym sprzężonym powierzchni S .

§ 7. Powróćmy do badań § 3-go, a mianowicie do przypadku, w którym krzywe główne na powierzchni S , odpowiadające pewnej kongruencji D , tworzą układy krzywych sprzężonych. Załóżmy, że promienie kongruencji D są niezmiennie związane z powierzchnią S ; przyjmijmy dalej, że powierzchnia S odkształca się jakkolwiek; wtedy kongruencja D staje się kolejno kongruencją D' , D'' , ...

Zobaczymy, przy jakich warunkach krzywe główne odpowiednich powierzchni S' , S'' , ... będą pozostawały krzywymi sprzężonymi; tu S' , S'' , ... oznaczają rozmaite zgięcia powierzchni S .

Zanim przystąpimy do rozwiązania tego zagadnienia, podamy kilka rozważań ogólnych, mających znaczenie zasadnicze w badaniu naszym.

Wiadomo, że wyznaczenie wszystkich powierzchni, mających dany element liniowy lub przedstawiających rozmaite odkształcenia pewnej danej powierzchni, prowadzi do całkowania równań Codazzi'ego-Mainardi'ego. Całka ogólna tych równań zawiera, oczywiście, dwie funkcje dowolne. Niechaj dla pewnej danej powierzchni S zachodzi związek określony pomiędzy funkcjami p , q , p_1 , q_1 :

$$f(p, q, p_1, q_1) = 0.$$

Przy pomocy równań Codazzi'ego-Mainardi'ego możemy zawsze wyrażać z tego związku dwie funkcje, dajmy na to p , q , i przedstawić go w postaci:

$$F(p, q) = 0.$$

Dajmy, że ten ostatni związek zachodzi przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S . Łatwo dowieść, że może to mieć miejsce tylko wtedy, gdy ten związek spełnia się tożsamościowo.

W samej rzeczy, gdyby było przeciwnie, to ze związku tego moglibyśmy wyrazić jedną z funkcji p , q przez drugą; a dla wyznaczenia drugiej funkcji będziemy mieli dwa równania o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Jeżeli przypuścimy nawet, że te dwa równania sprowadzają się do jednego, dojdziemy do tego, że przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S funkcje p , q , p_1 , q_1 zależą od jednej tylko funkcji dowolnej—co oczywiście jest nieprawdą.

Po tych uwagach przejdziemy do rozwiązania zadania.

Rugując ze związku (8) funkcje p i q przy pomocy równań Codazzi'ego-Mainardi'ego:

$$q_1 \xi + p \eta_1 = 0, \quad \xi \eta_1 K = p q_1 - p_1 q,$$

gdzie K jest krzywizną powierzchni, sprowadzimy ten związek do postaci:

$$p_1 r \sin \alpha \cos \alpha + q_1 \left(\frac{r_1 \xi}{\eta_1} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) + \frac{\xi \eta_1 K}{p_1} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\xi}{\eta_1} \frac{q_1^2}{p_1} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0.$$

Na mocy powyższych rozważań, związek ten musi spełniać się tożsamościowo, niezależnie od wartości funkcji p , q . Tym sposobem dochodzimy do równań:

$$(15) \quad r \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad r_1 \xi \cos \alpha \sin \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0.$$

Wyłączwszy rozwiązania oczywiste $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 0$, t. j. przypadki, w których kongruencja nasza jest albo kongruencją normalnych do powierzchni S , albo kongruencją stycznych do niej, znajdziemy, po odpowiednim wyborze parametrów u , v , rozwiązania następujące:

$$(16) \quad \xi = 1, \quad \alpha = \varphi(u), \quad \eta_1 = k \cotg \alpha = k \omega(u),$$

gdzie φ a zatem i ω są funkcjami dowolnymi, k zaś wielkością stałą.

Tym sposobem w rozważanym przypadku element liniowy powierzchni S daje się sprowadzić do postaci:

$$ds^2 = du^2 + k^2 \omega^2(u) dv^2,$$

t. j. powierzchnia S daje się nawiąć na powierzchnię obrotową.

Jeżeli oznaczymy przez r_0 promień równoleżnika odpowiedniej powierzchni obrotowej, dla której $r_0 = \eta_1$, to na mocy ostatniego ze związków (16) znajdziemy, że kąt α pomiędzy promieniem naszej kongruencji a styczną do południka, przechodzącego przez odpowiedni punkt padania promienia, związany jest z promieniem równoleżnika, przez tenże punkt przechodzącego, równaniem:

$$(17) \quad r_0 \tg \alpha = k = \text{const.}$$

Mamy przeto twierdzenie:

Przez każdy punkt pewnej powierzchni obrotowej prowadzimy w płaszczyznach południków krzywe, tworzące z odpowiednimi stycznymi do południków kąty α ; te kąty określają się związkami (17), w których r_0 jest promieniem równoleżnika, przechodzącego przez odpowiedni punkt powierzchni S . Dajmy, że otrzymana w ten sposób kongruencja D jest niezmiennie związana z powierzchnią S . Jeżeli będziemy teraz odkształcać dowolnie powierzchnię S , to linie główne powierzchni S względem kongruencji, powstających z kongruencji D , będą liniami sprzężonemi. Tęż własność posiadać będą kongruencje D' , otrzymane z kongruencji D przez odbicie od odpowiednich powierzchni S .

Prawdziwość ostatniej części twierdzenia jest widoczna stąd, że kąt β , jaki tworzy promień odbity z odpowiednią styczną do południka, równa się $-\alpha$, a więc i dla niego jest:

$$r_0 \tg \beta = -k = \text{const.}$$

§ 8. Na zakończenie tego rozdziału rozważmy jeszcze następujące zagadnienie szczególne, bardzo ważne w badaniu dalszem.

Dajmy, że pewna kongruencja promieni D , padających na pewną powierzchnię S i niezmiennie z nią związanych, tworzy układ normalnych jakiejś powierzchni Σ . Widzieliśmy w § 2, że w tym przypadku promienie odbite D' będą normalne do pewnej powierzchni Σ_1 . Z wyników, w tymże paragrafie otrzymanych, wypływa, że wszystkie kongruencje, powstające z kongruencji D i D' przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S , będą układami normalnych pewnych powierzchni. Niechaj dla pewnej powierzchni S powierzchnie Σ i Σ_1 będą związane taką zależnością, że liniom asymptotycznym jednej odpowiadają linie asymptotyczne drugiej

Powstaje pytanie, kiedy taka odpowiedniość powierzchni Σ i Σ_1 zachowuje się przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S .

Wyprowadźmy najprzód równania różniczkowe linii asymptotycznych powierzchni Σ i Σ_1 , opierając się na znanej własności tych krzywych, polegającej na tem, że są ortogonalne do swoich obrazów kulistych.

Spółrzednymi odpowiedniego punktu powierzchni Σ będą:

$$x = \varrho \cos \alpha, \quad y = 0, \quad z = \varrho \sin \alpha,$$

gdzie, według § 2, funkcje ϱ i α czynią zadość równaniom:

$$\frac{d\varrho}{du} + \xi \cos \alpha = 0, \quad \frac{\partial(\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0.$$

Spółrzedne odpowiedniego punktu powierzchni Σ_1 znajdziemy, kładąc — α zamiast α .

Weźmiemy teraz punkt dowolny nieruchomy O i umieścimy w nim początek układu ruchomego spółrzednych (T') , którego osi pozostają wciąż równoległymi do odpowiednich osi układu (T) . Spółrzedne obrazu kulistego odpowiedniego punktu powierzchni S względem osi (T') będą:

$$x_1 = \cos \alpha, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \sin \alpha.$$

Jeżeli przyrosty du, dv odpowiadają przesunięciu po powierzchni S wzdłuż linii asymptotycznej, i jeżeli przez $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ oznaczymy rzuty na osi (T) lub (T') przesunięć odpowiedniego punktu powierzchni Σ i jej obrazu kulistego, to na zasadzie własności linii asymptotycznych będzie:

$$(19) \quad \delta x \delta x_1 + \delta y \delta y_1 + \delta z \delta z_1 = 0.$$

Równanie to jest właśnie równaniem szukanych linii asymptotycznych powierzchni Σ ; równanie linii asymptotycznych dla powierzchni Σ_1 otrzymamy z niego, kładąc wszędzie — α zamiast α .

Z uwagi, że:

$$\begin{aligned} \delta x &= \xi du + \cos \alpha d\varrho - \varrho \sin \alpha (da - q du - q_1 dv), \\ \delta y &= \eta_1 dv + \varrho [(r du + r_1 dv) \cos \alpha - (p du + p_1 dv) \sin \alpha], \\ \delta z &= \sin \alpha d\varrho + \varrho \cos \alpha (da - q du - q_1 dv), \end{aligned}$$

oraz, że:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -\sin \alpha (da - q du - q_1 dv), \\ \delta y_1 &= (r du + r_1 dv) \cos \alpha - (p du + p_1 dv) \sin \alpha, \\ \delta z_1 &= \cos \alpha (da - q du - q_1 dv), \end{aligned}$$

sprawdźmy po łatwych obliczeniach równanie (19) do postaci:

$$(M \pm N) du^2 + (M_1 \pm N_1) dv^2 + (M_2 \pm N_2) du dv = 0,$$

gdzie M, M_1, M_2 są funkcjami parzystymi, N, N_1, N_2 funkcjami nieparzystymi wielkości α , mianowicie:

$$M = -\xi \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \varrho \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 + \varrho^2 + \varrho r^2 \cos^2 \alpha + \varrho p^2 \sin^2 \alpha,$$

$$N = \xi q \sin \alpha - 2 \varrho q \frac{\partial \alpha}{\partial u} - 2 \varrho r p \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$M_1 = \eta_1 r_1 \cos \alpha + \varrho \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 + \varrho q_1^2 + \varrho r_1^2 \cos^2 \alpha + \varrho p_1^2 \sin^2 \alpha,$$

$$N_1 = -\eta_1 p_1 \sin \alpha - 2 \varrho q_1 \frac{\partial \alpha}{\partial v} - 2 \varrho r_1 p_1 \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$M_2 = -\xi \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2 \varrho \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + 2 \varrho q q_1 + \eta_1 r \cos \alpha + 2 \varrho r r_1 \cos^2 \alpha + 2 \varrho p p_1 \sin^2 \alpha,$$

$$N_2 = \xi q_1 \sin \alpha - 2 \varrho q_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} - 2 \varrho q \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \eta_1 p \sin \alpha - 2 \varrho r p_1 \cos \alpha - 2 \varrho r_1 p \cos \alpha \sin \alpha.$$

Znaki niższe w powyższym równaniu stosują się do krzywych asymptotycznych powierzchni Σ_1 .

Jest jasnem, że warunki odpowiedniości linii asymptotycznych Σ i Σ_1 będą postaci:

$$\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1} = \frac{M_2}{N_2},$$

t. j. będą dwoma równaniami stopnia drugiego względem funkcji ϱ . Samych równań z powodu ich złożoności wypisywać nie będziemy. Rugując z nich przy pomocy równań O d a z z i e g o - M a i n a r d i e g o funkcje p i p_1 i pamiętając, że na mocy rozważań § 7 otrzymane równania powinny spełniać się niezależnie od wartości funkcji q i q_1 , dojdziemy do warunków:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0, \quad r = 0, \quad \xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0,$$

$$2 \varrho^2 \left[r_1 \cos \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \xi \eta_1 K \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right] - \varrho \xi \sin \alpha \left(3 r_1 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \xi \eta_1 K \sin \alpha \right) \quad (20)$$

$$- \xi \eta_1 \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0,$$

gdzie K oznacza krzywiznę gaussowską powierzchni S .

Do tych równań winniśmy jeszcze dołączyć równania (18).

Na mocy pierwszego z warunków (20), dobrawszy odpowiednio parametr u , możemy przyjąć:

$$a = u.$$

Drugi z tych warunków, t. j. $r=0$, wskazuje, że ξ jest funkcją samego tylko parametru u , że tedy linie $v = \text{const.}$ są geodezyjnymi.

Przy pomocy warunku trzeciego, przy odpowiednim doborze parametru v , możemy napisać:

$$\eta_1 = k \cotg u,$$

gdzie k jest stałą.

Wnosimy stąd, że powierzchnie S dają się nawinąć na powierzchnie obrotowe.

Ostatni z warunków (20) daje na q dwie wartości:

$$(21) \quad q_1 = \frac{\xi \sin u}{2}, \quad q_2 = \frac{\xi^2 \cos u}{\frac{d\xi}{du} + 3\xi \cotg u}.$$

Rozpatrzmy osobno oba przypadki.

Do wyznaczenia funkcji ξ może służyć pierwsze z równań (18). W przypadku pierwszym przybierze ono postać:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{du} + 3 \frac{\cos u}{\sin u} = 0,$$

stąd znajdujemy:

$$\xi = \frac{a}{\sin^3 u},$$

gdzie a jest stałą. W tym więc przypadku element liniowy powierzchni S będzie postaci:

$$ds^2 = \frac{a^2}{\sin^6 u} du^2 + k^2 \cotg^2 u dv^2.$$

Zobaczymy niżej, że powierzchnia S daje się nawinąć na paraboloidę obrotową.

W przypadku drugim wyznaczamy wielkości ξ sposobem następującym. Wyznaczwszy $\cos u$ z pierwszego z równań (18) i wstawiając tę wartość w równanie (21), otrzymamy:

$$\frac{d \log(q_2)}{du} = -3 \cotg u,$$

skąd:

$$q_2 \xi = \frac{a}{\sin^3 u},$$

gdzie a jest stałą. Wstawiając tę wartość na ξ w pierwsze z równań (18), sprowadzamy je do postaci:

$$q \frac{dq}{du} + \frac{a \cos u}{\sin^3 u} = 0,$$

skąd łatwo znajdziemy:

$$q^2 = \frac{a}{\sin^2 u} + m,$$

gdzie m jest nową stałą.

Mając q , znajdziemy już wyrażenie na ξ , mianowicie:

$$\xi = \frac{a}{\sin^2 u \sqrt{a + m \sin^2 u}}.$$

Tym sposobem element liniowy powierzchni S wyrazi się wzorem:

$$ds^2 = \frac{a^2}{\sin^4 u (a + m \sin^2 u)} du^2 + k^2 \cotg^2 u dv^2.$$

Zobaczymy później, że odpowiednie powierzchnie, zależnie od wartości stałych m i a , dadzą się nawinąć na pięć następujących powierzchni obrotowych, mianowicie: 1) przy $m > 0$, $a > 0$ powierzchnia S nawija się na hyperboloidę dwupowłokową obrotową; 2) przy $m > 0$, $a < 0$ — na elipsoidę obrotową względem osi wielkiej; 3) przy $m > 0$, $a > -m > 0$ — na sinusoidę hyperboliczną obrotową, której równaniem jest:

$$x^2 + y^2 = (a + m) \sinh^2 \frac{z}{\sqrt{-m}},$$

4) przy $m < 0$ i $0 < a < -m$ na katenoidę skróconą lub przedłużoną, której równaniem jest:

$$x^2 + y^2 = -(m + a) \cosh^2 \frac{z}{\sqrt{-m}},$$

inakoniec 5) przy $m < 0$ i $a = -m$ — na powierzchnię logarytmową obrotową o równaniu:

$$2z = \sqrt{-m} \log(x^2 + y^2).$$

Te powierzchnie wraz z paraboloidą obrotową nazywać będziemy zasadniczymi powierzchniami obrotowymi.

Kongruencje promieni padających i odbitych, rozpatrzone przez nas w tym rozdziale, nazywać będziemy dołączonymi do powierzchni.

Zestawiając wyniki, otrzymane w tym paragrafie, dochodzimy do następującego twierdzenia:

Jeżeli przyjmujemy, że przy wszelkich możliwych odkształceniach jednej z zasadniczych powierzchni obrotowych S są z niemi związane niezmiennie kongruencje dołączane promieniami padającymi i odbitych D i D' , to na powierzchniach Σ i Σ_1 , ortogonalnych odpowiednio do promieni kongruencji D i D' , linie asymptotyczne odpowiadają sobie wzajemnie.

ROZDZIAŁ II.

Powierzchnie ogniskowe kongruencji liniowej. Twierdzenie Weingartena. Przekształcenia powierzchni o krzywiznie stałej.

§ 1. W rozdziale poprzedzającym określiliśmy powierzchnie ogniskowe jako miejsce geometryczne krawędzi zwrotu wszystkich powierzchni rozwijalnych kongruencji. W rozdziale niniejszym poznamy bliżej niektóre własności powierzchni ogniskowych.

Z samego określenia tych powierzchni wynika, że wszystkie promienie kongruencji są styczne do powierzchni ogniskowych.

Weźmy jedną z tych powierzchni za powierzchnię S poprzedzającego rozdziału; według ustanowionych warunków, promienie naszej kongruencji zlewać się będą z osiami x ruchomego układu współrzędnych (T) .

Znajdźmy punkty ogniskowe naszej kongruencji i odpowiadające jej krzywe główne powierzchni S .

Obierzmy punkt określony O na powierzchni S ; jeżeli nadamy parametrom u, v przyrosty du, dv , odpowiadające przesunięciu punktu O po jednej z krzywych głównych, to odpowiednie przesunięcie punktu ogniskowego uważanego promienia kongruencji danej, na podstawie określenia punktów ogniskowych, będzie skierowane wzdłuż promienia, t. j. wzdłuż osi x ; inaczej mówiąc: rzuty tego przesunięcia na osi y i z będą zerami. Jeżeli $x, 0, 0$ będą współrzędnymi odpowiedniego punktu ogniskowego, $\delta x, \delta y, \delta z$ rzutami jego przesunięcia na osi (T) , to w uważanym przypadku będzie:

$$\delta y = \eta_1 \delta v + (r du + r_1 dv) x = 0, \quad \delta z = -(q du + q_1 dv) x = 0,$$

Znajdujemy stąd dwie wartości na x :

$$(1) \quad x = 0, \quad x = \frac{q \eta_1}{r \eta_1 - r_1 q},$$

równaniami zaś różniczkowymi dwóch odpowiednich krzywych głównych będą:

$$(2) \quad dv = 0, \quad q du + q_1 dv = 0.$$

Pierwsze rozwiązanie na x daje nam punkt O powierzchni, drugie daje punkt O_1 drugiej powierzchni ogniskowej, którą oznaczać będziemy przez S_1 . Te dwie powierzchnie zlewać się będą, gdy q równa się zeru, t. j. gdy linie $v = \text{const}$ będą liniami asymptotycznymi. Przypadku tego nie będziemy rozpatrywali.

Z uwagi, że równanie linii sprzężonych na powierzchni S

$$-q \xi du du + p_1 \eta_1 dv \delta v + p \eta_1 (du \delta v + dv \delta u) = 0$$

spełnia się tożsamościowo, gdy położymy:

$$dv = 0, \quad q du + q_1 dv = 0,$$

dochodzimy do wniosku, że krzywe główne na powierzchniach ogniskowych są liniami sprzężonymi. Do tegoż wniosku mogliśmy dojść bezpośrednio, zważywszy, że równanie (8) rozdziału poprzedzającego spełnia się, gdy a równa się zeru.

§ 2. Rozpatrzmy teraz płaszczyznę ogniskową naszej kongruencji.

Weźmy na osi x punkt jakikolwiek $(x, 0, 0)$; płaszczyzna styczna w tym punkcie do powierzchni prostoliniowej, którą opisuje punkt x przy zmianie parametrów u, v o wielkości du, dv , odpowiadające przesunięciu początku współrzędnych wzdłuż określonej krzywej, będzie miała równanie:

$$z = y \operatorname{tg} \theta,$$

gdzie $\operatorname{tg} \theta$ określa się z warunku:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{-x(q du + q_1 dv)}{\eta_1 dv + x(r du + r_1 dv)}.$$

Przyjmując, że początek współrzędnych przesunął się wzdłuż jednej z krzywych głównych (2), lub — co wychodzi na jedno — że oś x opisała powierzchnię rozwijalną, znajdziemy, że przy $q du + q_1 dv = 0$ i $dv = 0$ wartościami stycznymi będą odpowiednio:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = 0, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = -\frac{q}{r},$$

a więc równaniami odpowiednich płaszczyzn ogniskowych będą:

$$x = 0, \quad qy + rz = 0.$$

Widzimy stąd, że pierwsza płaszczyzna ogniskowa jest styczną do powierzchni S .

Jeżeli oznaczymy przez $\delta x, \delta y, \delta z$ rzuty przesunięć drugiego punktu ogniskowego, znajdziemy łatwo, że dla wszelkich wartości du, dv zachodzi związek:

$$q\delta y + r\delta z = 0,$$

t. j. że druga płaszczyzna ogniskowa jest styczna do drugiej powierzchni ogniskowej.

Tym sposobem powierzchnie ogniskowe możemy uważać za obwiednie płaszczyzn ogniskowych.

Przyjmijmy teraz, że kongruencja jest kongruencją normalnych do pewnej powierzchni Σ , t. j. że na każdym jej promieniu istnieje taki punkt $(x, 0, 0)$, którego przesunięcia są ortogonalne do odpowiedniego promienia przy wszelkich nieskończenie małych zmianach parametrów u, v . Warunkiem na to, by rzuty przesunięć tego punktu na oś x równały się zeru, będzie:

$$(4) \quad dx + \xi du = 0,$$

stąd:

$$(5) \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\eta_1 r = 0.$$

Ten warunek wskazuje, że krzywe $v = \text{const}$ są krzywymi geodezyjnymi powierzchni S , która jest oczywiście jedną z powłok rozwiniętej dla powierzchni Σ . Stąd: Kongruencje normalnych są stycznymi do linii geodezyjnych swych powierzchni ogniskowych.

Wracając do równań płaszczyzn ogniskowych i wyłączając przypadek $q=0$, znajdujemy, że dla kongruencji normalnych $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$,

t. j. płaszczyzny ogniskowe są wzajemnie prostopadłe.

Spółrzednymi odpowiedniego punktu drugiej powierzchni ogniskowej będą w tym przypadku:

$$(6) \quad x = -\frac{\eta_1}{r_1}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

W wyłączonym wyżej przypadku, t. j. gdy $q=0$, krzywe $r = \text{const}$ zamieniają się na proste, gdyż powinny być równocześnie liniami geodezyj-

nemi i asymptotycznymi powierzchni S . Powierzchnia ta będzie prostoliniową; jej tworzące prostoliniowe $c = \text{const}$ będą promieniami naszej kongruencji. Tym sposobem w uważanym przypadku kongruencja liniowa przekształca się na powierzchnię prostoliniową.

Łatwo dowieść, że powierzchnia Σ , normalna do promieni kongruencji, zamienia się na linię krzywą. W samej rzeczy, rzutami przesunięć odpowiedniego jej punktu $(x, 0, 0)$ będą:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = (\eta_1 + r_1 x) dv, \quad \delta z = -q_1 x dv,$$

skąd widzimy, że dla $r = \text{const}$ będzie $\delta x = \delta y = \delta z = 0$. Stąd właśnie wypływa, że powierzchnia Σ zamienia się na linię krzywą. Przypadek ten wyłączamy zupełnie z naszego badania.

§ 3. Wiadomo, że Weingarten pierwszy zwrócił uwagę na interesującą klasę powierzchni, wyróżniających się tem, że pomiędzy ich promieniami krzywizny w każdym punkcie zachodzi zależność o współczynnikach stałych¹⁾. Powierzchnie te nazywają się zwykle powierzchniami W .

Jeżeli przez R_1 i R_2 oznaczmy promienie krzywizny jakiejkolwiek powierzchni, to warunek na to, aby powierzchnia ta należała do klasy powierzchni W , wyrazi się analitycznie w ten sposób:

$$(7) \quad \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial R_2}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial R_2}{\partial u} = 0.$$

Przypuśćmy, że rozpatrzona przez nas w poprzedzających paragrafach kongruencja jest układem normalnych do pewnej powierzchni W . Zbadajmy, jakim warunkom czynić wtedy winna zadość powierzchnia ogniskowa S .

Na mocy warunku $\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$ możemy przyjąć, że funkcja ξ równa się jedności. Oznaczmy przez x_1 odciętą odpowiedniego punktu naszej powierzchni W ; odcięta ta wyznacza się z równania (4) w paragrafie poprzedzającym; będzie mianowicie:

$$x_1 = -(u + c),$$

gdzie c jest stałą dowolną

Nie zmniejszając ogólności, możemy położyć $c = 0$, gdyż różnym wartościom stałej c odpowiadać będą powierzchnie W wzajemnie równoległe.

Jeżeli, jak wyżej, R_1 i R_2 są promieniami krzywizny uważanej po-

¹⁾ Weingarten. Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist. (Crelle's Journal, t. LXII).

wierzchni, jeżeli q_1, q_2 są odcięciami punktów ogniskowych promienia, to na podstawie równań (6) będzie:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = -\frac{\eta_1}{r_1} = -\frac{\frac{\partial \eta_1}{\partial u}}{\frac{\partial \eta_1}{\partial u}},$$

a więc otrzymamy stąd następujące wyrażenia na promienie R_1 i R_2 :

$$R_1 = x_1 - q_1 = -u, \quad R_2 = x_1 - q_2 = -u + \frac{\eta_1}{\frac{\partial \eta_1}{\partial u}},$$

Przy tych wartościach na R_1 i R_2 warunek (7) przybierze postać:

$$\frac{\partial q_2}{\partial v} = 0,$$

a więc:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial u} \frac{\partial \eta_1}{\partial v} - \eta_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

Całkując to równanie, otrzymamy na η_1 następujące wyrażenie:

$$\eta_1 = UV,$$

gdzie U jest funkcją samego parametru u , V zaś funkcją samego parametru v . Wybrawszy w odpowiedni sposób parametr v , możemy uczynić funkcję V równą jedności. Element liniowy powierzchni S da się tedy sprowadzić do postaci:

$$(8) \quad ds^2 = du^2 + U^2 dv^2,$$

t. j. powierzchnia S da się nawinąć na powierzchnię obrotową. W ten sposób doszliśmy do twierdzenia:

Twierdzenie Weingartena. Rozwinięte powierzchnie W dają się nawinąć na powierzchnie obrotowe.

Łatwo też dowieść twierdzenia odwrotnego, mianowicie:

Jeżeli powierzchnia S daje się nawinąć na powierzchnię obrotową, to styczne do krzywych, będących rozwiniętymi południkami powierzchni obrotowych tworzą układ normalnych do pewnej powierzchni W ; zachodzi to przy wszelkich odkształceniach powierzchni S .

W samej rzeczy, przyjąwszy, że element liniowy powierzchni S wyraża się w postaci (8), przekonujemy się bezpośrednio, że styczne do krzywych

$v = \text{const}$ tworzą układ normalnych pewnej powierzchni Σ . Promienie krzywizny tej powierzchni wyrażają się w ten sposób:

$$(9) \quad R_1 = -u, \quad R_2 = -u + \frac{U}{U'}.$$

Rugując z tych wyrażeń parametr u , znajdziemy związek określony o współczynnikach stałych pomiędzy promieniami R_1 i R_2 . Ponieważ związek ten określa się w zupełności postacią funkcji U , stanowiącej współczynnik w wyrażeniu elementu liniowego powierzchni S , przeto pozostanie niezmiennym przy wszystkich możliwych odkształceniach powierzchni.

§ 4. Widzimy tedy, że znając jakąś powierzchnię o elemencie liniowym (8), możemy już wyznaczyć odpowiednią powierzchnię W . Odwrotnie, mając pewną określoną powierzchnię W , można już wyznaczyć powierzchnię obrotową, na którą rozwija się rozwinięta danej powierzchni W .

W rzeczy samej, niechaj promienie krzywizny R_1 i R_2 powierzchni W łączą związek $f(R_1, R_2) = 0$; rugując R_1, R_2 z tego związku i ze związków (9), znajdziemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego na wyznaczenie funkcji U .

Rozpatrzmy tu dwa proste przykłady. Dajmy, że dana powierzchnia W jest powierzchnią minimalną, t. j. że pomiędzy promieniami jej zachodzi związek $R_1 + R_2 = 0$.

Na wyznaczenie funkcji U będziemy mieli równanie różniczkowe:

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{2u},$$

skąd $U = k\sqrt{u}$, gdzie k jest stała. Element liniowy powierzchni S wyraża się równaniem:

$$ds^2 = du^2 + k^2 u dv^2,$$

a jest to, jak wiadomo, element liniowy powierzchni, dającej się nawinąć na rozwiniętą katenoidy.

Dajmy teraz, że powierzchnia W jest powierzchnią o krzywiznie stałej $\frac{1}{m}$; wtedy $R_1 R_2 = m$, a na wyznaczenie funkcji U będziemy mieli równanie:

$$\frac{U'}{U} = \frac{u}{u^2 - m},$$

skąd:

$$U = \sqrt{u^2 - m}.$$

Element liniowy tej powierzchni wyraża się równaniem:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 - m) dv^2.$$

Jeżeli $m < 0$, t. j. gdy krzywizna powierzchni W jest ujemna, wtedy — jak to łatwo widzieć — powierzchnia S daje się nawinąć na katenoidę. Jeżeli $m > 0$, to nawinąć się daje na powierzchnię obrotową:

$$z = \int \frac{(1 - k^2) r^2 + mk^4}{\sqrt{(k^2 r^2 - mk^4)[(1 - k^2) r^2 + mk^4]}} dr,$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

§ 5. Przejdźmy do drugiej powierzchni ogniskowej S_1 . Łatwo dowieść, co zresztą jest jasne a priori, że daje się ona nawinąć na powierzchnię obrotową. Spółrzednymi odpowiedniego jej punktu będą:

$$x = -\frac{\eta_1}{\frac{d\eta_1}{du}}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

gdzie $\eta_1 = U$. Rzuty przesunięć tego punktu na osi (T) są oczywiście:

$$\delta x = -\frac{\eta_1 \frac{d^2 \eta_1}{du^2}}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^2} du, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \frac{\eta_1}{\frac{d\eta_1}{du}} (q du + q_1 dv),$$

a zatem element liniowy powierzchni będzie postaci:

$$ds_1^2 = \frac{\eta_1^2 \left(\frac{d^2 \eta_1}{du^2}\right)^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^4} du^2 + \frac{\eta_1^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^2} (q du + q_1 dv)^2.$$

Łatwo okazać, że w tym przypadku wyrażenie $\eta_1 (q du + q_1 dv)$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji u ; w samej rzeczy, warunek, aby różniczka ta była zupełna, t. j.

$$\frac{\partial (\eta_1 q)}{\partial v} = \frac{\partial (\eta_1 q_1)}{\partial u}$$

zamienia się na następujący:

$$q_1 + \eta_1 p = 0,$$

a jest to jedno z równań *Codazzi*ego - *Mainardi*ego. Tym sposobem element liniowy powierzchni S_1 może być wyrażony w postaci:

$$(10) \quad ds_1^2 = \frac{\eta_1^2 \left(\frac{d^2 \eta_1}{du^2}\right)^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^4} du^2 + \frac{du^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^2}.$$

Ponieważ tu η_1 jest funkcją jednego tylko parametru u , to wynika stąd, że powierzchnia S_1 daje się nawinąć na powierzchnię obrotową.

Dwie powierzchnie S , S_1 , dające się nawinąć na powierzchnie obrotowe i przedstawiające dwie powłoki pewnej powierzchni W , nazywają się powierzchniami dopełniającymi się wzajemnie.

§ 6. Uczynimy tu niewielkie zboczenie i wyprowadzimy pewne wzory, potrzebne nam w dalszym wykładzie.

Niechaj będzie pewien ruchomy układ spółrzednych prostokątnych (T), którego położenie zależy od dwóch parametrów u, v . Rzuty przesunięcia początku tych osi, w założeniu, że zmienia się tylko jeden parametr u , oznaczmy przez ξ, η, ζ ; rzuty odpowiedniego obrotu na te same osi — przez p, q, r . Rzuty odpowiednich przesunięć w założeniu, że zmienia się tylko parametr v , oznaczmy przez ξ_1, η_1, ζ_1 ; p_1, q_1, r_1 .

Obierzmy określone położenie osi i nadajmy parametrom u, v przyrosty du, dv . Osi (T) przybiorą wtedy nowe położenie, które oznaczmy przez (T'). Znajdźmy zależność pomiędzy spółrzednymi x, y, z jakiegokolwiek punktu w układzie (T) a spółrzednymi x', y', z' w układzie (T'). Niechaj M będzie dowolnym nieruchomym punktem przestrzeni; warunek jego nieruchomości wyrazimy w ten sposób, że rzuty przesunięć $\delta x, \delta y, \delta z$ uczynimy zerem przy wszelkich możliwych zmianach parametrów u, v , t. j. napiszemy:

$$\delta x = dx + \xi du + \xi_1 dv + (q du + q_1 dv) x - (r du + r_1 dv) y = 0,$$

$$\delta y = dy + \eta du + \eta_1 dv + (r du + r_1 dv) x - (p du + p_1 dv) z = 0,$$

$$\delta z = dz + \zeta du + \zeta_1 dv + (p du + p_1 dv) y - (q du + q_1 dv) x = 0.$$

Tu dx, dy, dz są rzutami przesunięć naszego punktu względem osi spółrzednych, t. j. równają się $x' - x, y' - y, z' - z$ z pominięciem wielkości nieskończenie małych rzędów wyższych. Otrzymujemy stąd szukane wzory na przekształcenie:

$$(11) \quad \begin{aligned} x' &= x - (\xi du + \xi_1 dv) - (q du + q_1 dv) x + (r du + r_1 dv) y, \\ y' &= y - (\eta du + \eta_1 dv) - (r du + r_1 dv) x + (p du + p_1 dv) z, \\ z' &= z - (\zeta du + \zeta_1 dv) - (p du + p_1 dv) y + (q du + q_1 dv) x. \end{aligned}$$

§ 7. Po tem zboczeniu zajmijmy się wyprowadzeniem równania różniczkowego krzywych sprzężonych na powierzchni S_1 , dopełniającej względem powierzchni S i mającej element liniowy (8).

Wzmyjmy na powierzchni S dowolny punkt O ; odpowiednim punktem powierzchni dopełniającej niechaj będzie O_1 . Równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni S_1 w punkcie O_1 znajdziemy, kładąc $r=0$ w drugim z równań (3); będzie nim $y=0$. Przejdźmy po pewnej krzywej od punktu O do punktu O' i niechaj temu przejściu odpowiadają przyrosty du, dv parametrów; punkt na powierzchni S_1 , odpowiadający punktowi O' , oznaczmy przez O'_1 . Osi (T) przybiorą położenie (T') ; równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni S_1 w punkcie O'_1 w odniesieniu do tych osi będzie $y'=0$. Stąd na podstawie wzorów paragrafu poprzedzającego równanie tej płaszczyzny w odniesieniu do osi (T) będzie:

$$y - r_1 dv \cdot x + (p du + p_1 dv) z - \eta_1 dv = 0.$$

Położenie graniczne prostej, będącej przecięciem tej płaszczyzny z płaszczyzną $y=0$, jest, jak wiadomo, styczną do krzywej sprzężonej z krzywą $O_1 O'_1$. Prosta ta wyraża się równaniem:

$$y = 0, \quad r_1 dv \cdot x - (p du + p_1 dv) z + \eta_1 dv = 0.$$

Niechaj $\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z$ oznaczają rzuty przesunięcia punktu O_1 po powierzchni S_1 w kierunku sprzężonym z kierunkiem $O_1 O'_1$; odpowiednie przyrosty parametrów oznaczmy przez $\delta u, \delta v$. Wtedy równaniem różniczkowym krzywych sprzężonych na powierzchni S_1 będzie:

$$\begin{aligned} & r_1 dv \delta_1 x - (p du + p_1 dv) \delta_1 z = 0, \\ \text{lub} \\ (12) \quad & q \xi du \delta u - p_1 \eta_1 dv \delta v - r_1 \eta_1 (du \delta v + dv \delta u) = 0, \end{aligned}$$

a jest to równanie krzywych sprzężonych powierzchni S . A więc:

Powierzchnie dopełniające się są związane wzajemnie w ten sposób, że każdemu układowi krzywych sprzężonych na jednej odpowiada układ krzywych sprzężonych na drugiej.

Twierdzenie to można wyrazić w ten sposób:

Linie asymptotyczne dwóch dopełniających się powierzchni odpowiadają sobie wzajemnie.

Wynika to stąd, że równanie różniczkowe linii asymptotycznych na powierzchni S_1 otrzymujemy, kładąc w równaniu (12) $du = \delta u, dv = \delta v$; równanie w ten sposób otrzymane jest identyczne z równaniem krzywych asymptotycznych powierzchni S .

§ 8. Zajmiemy się obecnie pewnem zagadnieniem, mającem ważne znaczenie w teorii powierzchni o krzywiznie stałej gaussowskiej.

Załóżmy, że powierzchnia S , będąca jedną z powierzchni ogniskowych pewnej kongruencji normalnych, jest rzeczywista. Znajdźmy warunki, przy których odległość dwóch odpowiednich punktów powierzchni S i drugiej powierzchni ogniskowej S_1 tejże kongruencji jest wielkością stałą m . Wielkość m niechaj będzie rzeczywistą lub zespoloną, to znaczy, że powierzchnia S_1 może być rzeczywistą lub urojoną. Ponieważ na podstawie równań (6) współrzędne odpowiedniego punktu powierzchni S_1 będą:

$$x = -\frac{\eta_1}{r_1}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

kładąc przeto $\xi=1$, będziemy mieli na wyznaczenie w tym przypadku wielkości η_1 równanie różniczkowe:

$$m \frac{\partial \eta_1}{\partial u} + \eta_1 = 0,$$

tak, że obawszy odpowiednio parametr r , znajdziemy:

$$(13) \quad \eta_1 = e^{-\frac{u}{m}}.$$

Stąd element liniowy powierzchni S wyrazi się wzorem:

$$ds^2 = du^2 + e^{-\frac{2u}{m}} dv^2;$$

widzimy więc, że powierzchnia S ma stałą krzywiznę gaussowską $-\frac{1}{m^2}$.

Ponieważ założyliśmy, że powierzchnia S jest rzeczywista, przeto liczba $\frac{1}{m^2}$ będzie rzeczywista, a to możliwe jest tylko wtedy, kiedy m jest rzeczywiste lub czysto-urojone. W przypadku pierwszym powierzchnia S będzie miała krzywiznę ujemną, w drugim—dodatnią. Widzimy tedy, że tylko w przypadku, kiedy krzywizna powierzchni S jest ujemna, druga powierzchnia ogniskowa S_1 będzie rzeczywista.

Ponieważ powierzchnia S daje się nawinąć na powierzchnię obrotową, krzywe zaś $v=\text{const.}$ są zgięciami południków, przeto, według twierdzenia Weingartena, rozważana tu kongruencja normalnych jest układem normalnych do pewnej powierzchni W . Wynika stąd, że powierzchnie S i S_1 są dopełniającymi się wzajemnie. I dla tego element liniowy powierzchni S , otrzymamy z wzoru (10), kładąc $\eta_1 = e^{-\frac{u}{m}}$; będzie tedy:

$$ds_1^2 = du^2 + m^2 e^{\frac{2u}{m}} dv^2,$$

a jest to także element liniowy powierzchni o krzywiznie stałej $-\frac{1}{m^2}$. Dochodzimy więc do twierdzenia następującego:

Jeżeli kongruencja normalnych ma własność, że odległość punktów ogniskowych każdego jej promienia jest stała, wtedy: 1) [promienie kongruencji są normalne do pewnej powierzchni W ; 2) krzywizna gaussowska jej powierzchni ogniskowych równa się stałej $-\frac{1}{m^2}$.

Przejdźcie od powierzchni o krzywiznie stałej do powierzchni dopełniającej w rozważanym przez nas przypadku nazywa się przekształceniem Bianchi'ego lub przekształceniem dopełniającym.

Nie zatrzymując się nad tem przekształceniem, przejdźmy do przekształcenia ogólniejszego powierzchni, podanego po raz pierwszy przez Bäcklunda ¹⁾ dla powierzchni o krzywiznie stałej ujemnej. Do tego przekształcenia prowadzi rozwiązanie zadania, będącego uogólnieniem zadania, rozwiązanego w tym paragrafie.

§ 9. Zadanie paragrafu poprzedzającego możemy sformułować w ten sposób: zbadać własności powierzchni ogniskowych kongruencji danej przy warunku: 1) odległość odpowiednich punktów obu powierzchni ogniskowych jest wielkością stałą; 2) kąt pomiędzy płaszczyznami ogniskowymi równa się $\frac{\pi}{2}$. Uogólnimy to zadanie, uogólniając warunek drugi, zakładając mianowicie, że kąt pomiędzy płaszczyznami ogniskowymi równa się $\frac{\pi}{2} - \sigma$. Wielkościom m i σ , tak jak poprzednio, nadajemy wartości rzeczywiste lub zespolone.

Z uwagi, że na podstawie równań (1) odległość odpowiednich punktów powierzchni S i S_1 równa się $\frac{q\eta_1}{rq_1 - qr_1}$, że równania płaszczyzn ogniskowych danej kongruencji są: $z=0$, $qy + rz=0$ wyrazimy warunki nasze analitycznie w ten sposób:

$$(14) \quad q = -r \cotg \sigma, \quad \eta_1 q = m(rq_1 - qr_1).$$

¹⁾ Bäcklund. Om ytor med konstant negativ krökning. (Lunds Univ. Arsskrift 19. 1883).

Rozwiązując te równania względem q i q_1 , znajdziemy:

$$q = -r \cotg \sigma, \quad q_1 = -\cotg \sigma \left(r_1 + \frac{\eta_1}{m} \right),$$

skąd przy pomocy wzorów Codazzi'ego-Mainardi'ego otrzymujemy z łatwością:

$$\frac{pq_1 - p_1q}{\sin^2 \sigma} = -\frac{\xi \eta_1 \cotg^2 \sigma}{m^2}.$$

Ponieważ wyrażenie $\frac{pq_1 - p_1q}{\xi \eta_1}$ przedstawia krzywiznę gaussowską K powierzchni S , to związek poprzedzający można napisać w postaci:

$$(15) \quad K = -\frac{\cos^2 \sigma}{m^2} = \text{const.}$$

Tak więc i w tym przypadku krzywizna powierzchni ogniskowej S jest stała.

Znajdźmy krzywiznę gaussowską drugiej powierzchni ogniskowej S_1 . Postępujemy w ten sposób. Równania normalnej do powierzchni S_1 w odpowiednim punkcie będą, jak łatwo widzieć: $x=m$, $y \sin \sigma + z \cos \sigma = 0$, a współrzędne środków krzywizny powierzchni S_1 : $x=m$, $y = \varrho \cos \sigma$, $z = -\varrho \sin \sigma$, gdzie ϱ określa się z warunku, że przesunięcie odpowiedniego środka krzywizny skieruje się wzdłuż normalnej, gdy parametrom u , v nadamy przyrosty du , dv , odpowiadające jakiegokolwiek linii krzywiznowej powierzchni S_1 . Tym sposobem dla przyrostów takich będzie:

$$\delta x = 0, \quad \sin \sigma \delta y + \cos \sigma \delta z = 0.$$

Rugując z tych związków stosunek $\frac{du}{dv}$, otrzymamy równanie stopnia drugiego względem ϱ , którego pierwiastkami będą wartości promieni krzywizny S_1 w odpowiednim punkcie. Równaniem tem będzie:

$$\frac{p\eta_1 \cos \sigma}{m} \varrho^2 - (p_1 \xi - r\eta_1 \cotg \sigma) \varrho - \frac{m p \eta_1}{\cos \sigma} = 0.$$

Ponieważ krzywizna gaussowska powierzchni S_1 równa się $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$, gdzie ϱ_1 i ϱ_2 są pierwiastkami tego równania, przeto na krzywiznę tę znajdziemy wyrażenie:

$$K_1 = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{\cos^2 \sigma}{m^2} = K,$$

widać więc, że krzywizna powierzchni S_1 jest także stała i zarazem równa krzywiznie powierzchni S . Stąd:

Jeżeli kongruencja promieni ma własność, że odległość punktów ogniskowych każdego promienia i kąt między płaszczyznami ogniskowymi mają wartości stałe, wtedy powierzchnie ogniskowe kongruencji mają jedną i tę samą krzywiznę stałą.

Z wyrażenia (15) widać, że stałe m i σ mają być równocześnie rzeczywiste tylko w tym razie, jeżeli krzywizna powierzchni ogniskowych jest ujemna.

Przejdźcie od powierzchni S o stałej krzywiznie ujemnej do powierzchni S_1 , stanowiącej drugą powierzchnię ogniskową rozpatrywanej przez nas kongruencji, nazywa się przekształceniem Bäcklunda. Same zaś kongruencje liniowe, nazywają się w tym przypadku kongruencjami pseudosferycznymi.

§ 10. Rugując ϱ z równań (16) otrzymamy, oczywiście, równanie różniczkowe linii krzywiznowych powierzchni S_1 . Równanie to, przy uwzględnieniu związków (14) będzie postaci:

$$\left| \begin{array}{cc} \xi du, & \frac{\eta_1 \cos \sigma}{m} dv \\ \frac{m}{\sin \sigma} (rdu + r_1 dv) + \frac{\eta_1 dv}{\sin \sigma}, & pdu + p_1 dv \end{array} \right| = 0.$$

lub też:

$$p \xi du^2 + (p_1 \xi + q \eta_1) du dv + q_1 \eta_1 dv^2 = 0,$$

a jest to równanie różniczkowe linii krzywiznowych na powierzchni S . Tak więc:

Jeżeli odległość punktów ogniskowych danej kongruencji liniowej i kąt pomiędzy jej płaszczyznami ogniskowymi mają wartości stałe, to linie krzywiznowe powierzchni ogniskowych tej kongruencji odpowiadają sobie wzajemnie.

§ 11. W § 7 dowiedliśmy twierdzenia ogólniejszego o powierzchniach dopełniających się, mianowicie, że każdemu układowi krzywych sprzężonych na jednej z nich odpowiada układ krzywych sprzężonych na drugiej. Zbadajmy, czy to twierdzenie stosuje się do rozważanych przez nas kongruencji.

Do wywodu równania różniczkowego krzywych sprzężonych powierzchni S_1 będziemy stosowali metodę, użytą przez nas w § 7. Weźmy znowu dwa odpowiadające sobie punkty powierzchni S i S_1 ; pierwszy z nich

oznaczymy przez O , drugi przez O_1 . Równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni S_1 w punkcie O_1 będzie $z = y \cotg \sigma$. Nadając parametrom u, v przyrosty du, dv , przeniesiemy się z punktu O do pewnego punktu O' , niechaj wtedy punkt O_1 przejdzie po powierzchni S_1 do punktu O'_1 . Osi (T) przyjmą położenie (T') , równaniem zaś płaszczyzny stycznej do powierzchni S_1 w punkcie O'_1 względem tych osi będzie $z' = y' \cotg \sigma$. Równanie to, w odniesieniu do osi (T) (patrz § 6 niniejszego rozdziału) przybierze postać:

$$z - (pdu + p_1 dv)y + (qdu + q_1 dv)x = \cotg \sigma [y - (rdu + r_1 dv)x + (pdu + p_1 dv)z].$$

Równaniami prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych (T) i równoległej do stycznej do linii krzywej, sprzężonej z krzywą $O_1 O'_1$, będą:

$$[(qdu + q_1 dv) + \cotg \sigma (rdu + r_1 dv)]x - (pdu + p_1 dv)y - \cotg \sigma (pdu + p_1 dv)z = 0, \\ z = y \cdot \cotg \sigma;$$

jeżeli więc przez $\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z$ oznaczymy rzuty przesunięć po powierzchni S_1 w kierunku sprzężonym z kierunkiem $O_1 O'_1$, to otrzymamy szukane równanie różniczkowe sprzężonych, podstawiając w równaniu pierwszym $\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z$, zamiast x, y, z . Jeżeli odpowiednie przesunięcia parametrów oznaczamy przez $\delta u, \delta v$, to z uwagi, że

$$\delta_1 x = \xi \delta u, \quad \delta_1 y = \eta_1 \delta v + (r \delta u + r_1 \delta v)m, \quad \delta_1 z = -(q \delta u + q_1 \delta v)m,$$

oraz uwzględniając równania C o d a z z i'ego - Mainardi'ego i związki (14), sprowadzimy to równanie do postaci:

$$p q du \delta u + p_1 q_1 dv \delta v + p q_1 (du \delta v + dv \delta u) = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe krzywych sprzężonych na powierzchni S . Many zatem twierdzenie następujące:

Jeżeli odległości ogniskowe promieni kongruencji i kąt pomiędzy jej płaszczyznami ogniskowymi mają wartości stałe, wtedy każdemu układowi krzywych sprzężonych na jednej powierzchni ogniskowej odpowiada układ krzywych sprzężonych na drugiej.

Inaczej można twierdzenie to wyrazić w ten sposób:

Linie asymptotyczne powierzchni ogniskowych rozważanych kongruencji odpowiadają sobie wzajemnie.

§ 12. Zajmijmy się obecnie szczegółowem rozpatrzeniem przekształcenia Bäcklunda. W tym celu posilkujemy się innym nieco układem

spółrzędnych, a mianowicie na powierzchni S , której krzywiznę, bez zmniejszenia (gólności, można przyjąć równą -1 , weźmy za krzywe współrzędne linie krzywiznowe $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Spółrzędne (T) obierzmy w ten sposób, aby osi x i y były stycznymi odpowiednio do krzywych $\beta = \text{const}$ i $\alpha = \text{const}$. Wiadomo, że w tym przypadku można przyjąć¹⁾:

$$\xi = \cos \omega, \quad \eta_1 = \sin \omega, \quad p = q_1 = 0, \quad p_1 = \cos \omega, \quad q = \sin \omega,$$

$$r = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \quad r_1 = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha};$$

tu funkcja ω czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \sin \omega \cos \omega.$$

Równanie to przedstawia warunek, że krzywizna powierzchni równa się -1 .

Weźmy kongruencję stycznych do powierzchni S , tworzących z osią x kąt θ ; równaniami takiej stycznej w odniesieniu do układu (T) będą:

$$(18) \quad z = 0; \quad x \sin \theta - y \cos \theta = 0.$$

Kąt θ obierzmy tak, aby kongruencja prostych (10) czyniła zadość dwóm warunkom: 1) odległość m punktów ogniskowych ma być stała; 2) kąt $\frac{\pi}{2} - \sigma$ między jej płaszczyznami ogniskowymi ma być stały. Jedną z powierzchni ogniskowych naszej kongruencji będzie, oczywiście, powierzchnia S ; współrzędnymi zaś odpowiedniego punktu O_1 drugiej powierzchni ogniskowej S_1 będą:

$$x = m \cos \theta, \quad y = m \sin \theta, \quad z = 0.$$

Parametrom α, β nadajmy przyrosty $d\alpha, d\beta$, odpowiadające przesunięciu po powierzchni S wzdłuż jednej z krzywych głównych względem kongruencji danej. Wybierzmy tę z krzywych głównych, której odpowiada przesunięcie punktu O_1 wzdłuż prostej (18); jeżeli $\delta x, \delta y, \delta z$ są rzuty przesunięcia punktu O_1 , to rozważane przesunięcie charakteryzować będą dwa związki równoczesne:

$$\sin \theta \cdot \delta x - \cos \theta \cdot \delta y = 0, \quad \delta z = 0.$$

Zważywszy, że:

$$\delta x = \cos \omega \cdot d\alpha - m \sin \theta d\theta - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) m \sin \theta,$$

$$(19) \quad \delta y = \sin \omega d\beta + m \cos \theta d\theta + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) m \cos \theta,$$

$$\delta z = m (\cos \omega \sin \theta d\beta - \sin \omega \cos \theta d\alpha),$$

możemy związki te sprowadzić do postaci:

$$\left[m \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) - \sin \theta \cos \omega \right] d\alpha + \left[m \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right) + \cos \theta \sin \omega \right] d\beta = 0,$$

$$\sin \omega \cos \theta d\alpha - \cos \omega \sin \theta d\beta = 0.$$

Warunkiem równoczesnego ich zachodzenia będzie, oczywiście, równanie o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego względem funkcji θ :

$$(20) \quad \left[m \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) - \cos \omega \sin \theta \right] \cos \omega \sin \theta$$

$$+ \left[m \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right) + \sin \omega \cos \theta \right] \sin \omega \cos \theta = 0.$$

Wyprowadzimy teraz drugi warunek.

Równanie wszelkiej płaszczyzny, przechodzącej przez prostą (18), będzie postaci:

$$x \sin \theta - y \cos \theta + k z = 0,$$

gdzie k jest czynnikiem dowolnym. Wyznamy k tak, aby ta płaszczyzna była płaszczyzną ogniskową kongruencji danej. Na prostej (18) weźmy punkt dowolny P o współrzędnych $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = 0$; nadajmy parametrom α, β przyrosty $d\alpha, d\beta$. Wtedy prosta (18) opisze powierzchnię prostoliniową, punkt zaś P przesunie się po płaszczyźnie stycznej do tej powierzchni, poprowadzonej przez punkt P . Tym sposobem na wyznaczenie czynnika k , płaszczyźnie tej odpowiadającego, będziemy mieli związek:

$$\delta x \sin \theta - \delta y \cos \theta + k \delta z = 0,$$

a podstawiając tu wartości na $\delta x, \delta y, \delta z$, otrzymamy,

$$k = \frac{\rho \left(d\theta + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) - \sin \theta \cos \omega d\alpha + \cos \theta \sin \omega d\beta}{\rho (\cos \omega \sin \theta d\beta - \sin \omega \cos \theta d\alpha)}.$$

¹⁾ Darboux. Théorie des surfaces, t. III, str. 377—378.

Przyjmijmy teraz, że przyrosty da , $d\beta$ odpowiadają przesunięciu początku współrzędnych (T') wzdłuż krzywej głównej, t. j. innymi słowy przyjmijmy, że przy tej zmianie parametrów prosta (18) opisuje powierzchnię rozwijalną. Wiadomo, że płaszczyzna styczna do powierzchni rozwijalnej jest jedna i ta sama wzdłuż całej tworzącej; w tym więc przypadku współczynnik k nie będzie zależny od wartości ϱ . Stąd dla płaszczyzny ogniskowej będziemy mieli warunki następujące:

$$d\theta + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} da + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\beta - k(\cos \omega \sin \theta d\beta - \sin \omega \cos \theta da) = 0,$$

$$\sin \theta \cos \omega da - \cos \theta \sin \omega d\beta = 0.$$

Warunki te będą zgodne, jeżeli θ czyni zadość równaniu:

$$(21) \quad \left[\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + k \cos \theta \sin \omega \right] \cos \theta \sin \omega + \left[\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - k \sin \theta \cos \omega \right] \sin \theta \cos \omega = 0.$$

Stała k , jak łatwo widzieć, jest dotyczną kąta, który rozważana płaszczyzna ogniskowa tworzy z płaszczyzną $\alpha = 0$, t. j. w przypadku danym $k = \tan \sigma$.

Wdzieliśmy w § 9, że, przy danej krzywiznie powierzchni S , pomiędzy kątem σ i stałą m zachodzi związek (15). W rozważanym przypadku związek ten jest postaci $m^2 = \cos^2 \sigma$, jeżeli więc przez μ oznaczmy stałą, związaną z wielkością m równaniem:

$$(22) \quad \mu^2 + m^2 = 1,$$

będzie można k przedstawić w postaci $\frac{\mu}{m}$.

Jeżeli teraz rozwiążemy równania (19) i (20) względem pochodnych $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \theta}{\partial \beta}$, dojdziemy do równań następujących:

$$(23) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = -\frac{\mu \cos \theta \sin \omega}{m} + \frac{\sin \theta \cos \omega}{m};$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{\mu \sin \theta \cos \omega}{m} - \frac{\cos \theta \sin \omega}{m}.$$

Łatwo wykazać, że równania te są zgodne ze sobą. Dla uproszczenia rachunku wprowadzimy zamiast parametrów α , β parametry:

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2};$$

i zauważmy, że krzywe $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ są liniami asymptotycznymi powierzchni S . Wskutek tej zamiany zmiennych równania (23) przejdą na następujące:

$$(24) \quad \frac{\partial(\theta + \omega)}{\partial u} = \frac{1 + \mu}{m} \sin(\theta - \omega), \quad \frac{\partial(\theta - \omega)}{\partial v} = \frac{1 - \mu}{m} \sin(\theta + \omega),$$

równanie zaś (17), któremu czyni zadość funkcja ω , przybierze postać:

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega.$$

Otóż za pomocą prostego różniczkowania można przekonać się, że równanie (25) stanowi warunek równoczesnego zachodzenia równań (24).

Jeżeli z równań (24) wyrugujemy ω , to na wyznaczenie wielkości kąta θ otrzymamy równanie $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \sin \theta \cos \theta$, lub wprowadziwszy parametry α , β , równanie:

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} = \sin \theta \cos \theta.$$

Uwzględniając związki (23), znajdziemy następujące wyrażenia na rzuty przesunięć punktu O_1 powierzchni S_1 :

$$\delta x = \cos \theta (\cos \theta \cos \omega + \mu \sin \theta \sin \omega) da + \sin \theta (\cos \theta \sin \omega - \mu \sin \theta \cos \omega) d\beta,$$

$$(27) \quad \delta y = \cos \theta (\sin \theta \cos \omega - \mu \cos \theta \sin \omega) da + \sin \theta (\sin \theta \sin \omega + \mu \cos \theta \cos \omega) d\beta,$$

$$\delta z = -m \cos \theta \sin \omega da + m \sin \theta \cos \omega d\beta.$$

Stąd, przy uwzględnieniu związku (22), otrzymamy następujące wyrażenie elementu liniowego powierzchni S_1 :

$$(28) \quad ds_1^2 = \cos^2 \theta da^2 + \sin^2 \theta d\beta^2,$$

z którego widać, że warunek (26) orzeka, iż krzywizna gaussovska powierzchni S_1 równa się -1 . Ponieważ zaś, na podstawie twierdzenia § 10, krzywe $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ są liniami krzywiznowymi powierzchni S_1 , to wyrażenie (28) i równanie (26) wskazują, że funkcja θ odgrywa tę samą rolę dla powierzchni S_1 , jaką funkcja ω dla powierzchni S .

Jeżeli w otrzymanych związkach położymy $\sigma = 0$, a więc $m = 1$, $\mu = 0$, znajdziemy wzory na przekształcenie Bianchi'ego.

§ 13. Zajmiemy się teraz dowodem ważnego twierdzenia Bianchi'ego które uczony ten nazwał *prawem przemienności*:

Widzieliśmy w poprzedzających paragrafach, że każde przekształcenie Bäcklund'a charakteryzuje się pewną stałą σ . Przez B_σ oznaczajmy symbolicznie przekształcenie Bäcklund'a, za pomocą którego od jednej powierzchni o krzywiznie stałej ujemnej, przechodzimy do innej takiej powierzchni, przyczem stałą charakterystyczną tego przekształcenia jest σ .

Weźmy dwie jakiegokolwiek takie stałe: σ_1 i σ_2 . Twierdzenie Bianchi'ego polega na tem, że stosując kolejno do danej powierzchni S o krzywiznie stałej ujemnej dwa przekształcenia B_{σ_1} , B_{σ_2} , dochodzimy do tej samej powierzchni, do której doprowadzają też same dwa przekształcenia stosowane w porządku odwrotnym. Symbolicznie twierdzenie to możemy wyrazić w ten sposób:

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_2} B_{\sigma_1}.$$

Postawmy sobie zagadnienie ogólniejsze, mianowicie, jakim warunkom winny czynić zadość cztery przekształcenia B_{σ_1} , B_{σ_2} , B_{σ_3} , B_{σ_4} , aby kolejne stosowanie do danej powierzchni S o krzywiznie stałej ujemnej dwóch przekształceń B_{σ_1} , B_{σ_2} doprowadziło do tej samej powierzchni, do jakiej prowadzi kolejne stosowanie do powierzchni S przekształceń B_{σ_3} , B_{σ_4} . Innymi słowy, zbadajmy kiedy jest możliwą równość:

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4}.$$

Umówmy się co do oznaczeń. Przez S_1 oznaczmy powierzchnię, do której dochodzimy od danej powierzchni S przy pomocy przekształcenia B_{σ_1} ; przez S_2 — powierzchnię powstającą z S przez przekształcenie B_{σ_2} ; przez S_3 — powierzchnię powstającą z S_1 przez przekształcenie B_{σ_3} , albo z S_2 przez przekształcenie B_{σ_4} .

Przyjmujemy tu z góry istnienie takiej powierzchni S_2 , potem zaś wprowadzimy warunki, przy których ona istnieje. Niechaj elementy liniowe powierzchni S_1 , S_2 , odniesionych do linii krzywiznowych, wyrażają się wzorami:

$$ds_1^2 = \cos^2 \theta_1 da^2 + \sin^2 \theta_1 d\beta^2, \quad ds_2^2 = \cos^2 \theta_2 da^2 + \sin^2 \theta_2 d\beta^2,$$

$$ds_2^2 = \cos^2 \Omega da^2 + \sin^2 \Omega d\beta^2.$$

Funkcje θ_1 , θ_2 , Ω winny, według powyższego, czynić zadość równaniu postaci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \sin f \cos f,$$

gdzie $u = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $v = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Połóżmy wreszcie, że $m_h = \cos \sigma_h$,

$m_h = \sin \sigma_h$, gdzie h przybiera wartości 1, 2, 3, 4.

Znajdźmy spórzędne odpowiedniego punktu powierzchni S_2 w układzie (T) . Zauważmy przedewszystkiem, że dostawy kątów a , b , c oraz a' , b' , c' , które styczne do krzywych $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, w odpowiednich punktach powierzchni S tworzą z osiami spórzędnymi (T) , mają, na zasadzie równań (27), wyrażenia następujące: dla stycznych do krzywych $\beta = \text{const}$:

$$\cos a = \cos \omega \cos \theta_1 + \mu_1 \sin \omega \sin \theta_1, \quad \cos b = \cos \omega \sin \theta_1 - \mu_1 \sin \omega \cos \theta_1, \\ \cos c = -m_1 \sin \omega,$$

dla stycznych zaś do krzywych $\alpha = \text{const}$:

$$\cos a_1 = \sin \omega \cos \theta_1 - \mu_1 \cos \omega \sin \theta_1, \quad \cos b_1 = \sin \omega \sin \theta_1 + \mu_1 \cos \omega \cos \theta_1, \\ \cos c_1 = m_1 \cos \omega.$$

Analogiczne wyrażenia mamy dla stycznych do krzywych, nakreślonych na powierzchni S_3 , tylko że skąźnik 1 należy zastąpić skąźnikiem 3.

Rzuty promienia wodzącego, łączącego odpowiednie punkty powierzchni S_1 i S_2 , na styczne do linii $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, poprowadzone na powierzchni S_1 , będą $m_2 \cos \Omega$ i $m_2 \sin \Omega$, i dlatego spórzędne szukane odpowiedniego punktu powierzchni S_2 będą:

$$x_2 = m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos \theta_1 \cos(\Omega - \omega) - \mu_1 m_2 \sin \theta_1 \sin(\Omega - \omega), \\ (29) \quad y_2 = m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin \theta_1 \cos(\Omega - \omega) + \mu_1 m_2 \cos \theta_1 \sin(\Omega - \omega), \\ z_2 = m_1 m_2 \sin(\Omega - \omega).$$

Jeżeli będziemy uważali powierzchnię S_2 , jako wynik kolejnego stosowania przekształceń B_{σ_2} , B_{σ_3} , to te spórzędne powinny wyrażać się także w sposób następujący:

$$x_2 = m_3 \cos \theta_3 + m_4 \cos \theta_3 \cos(\Omega - \omega) - \mu_3 m_4 \sin \theta_3 \sin(\Omega - \omega), \\ (30) \quad y_2 = m_3 \sin \theta_3 + m_4 \sin \theta_3 \cos(\Omega - \omega) + \mu_3 m_4 \cos \theta_3 \sin(\Omega - \omega), \\ z_2 = m_3 m_4 \sin(\Omega - \omega).$$

Porównyując wyrażenia (29) i (30), otrzymamy najprzód:

$$(31) \quad m_1 m_2 = m_3 m_4,$$

prócz tego znajdziemy następujące równanie na wyznaczenie funkcji Ω :

$$(m_2 \cos \theta_1 - m_4 \cos \theta_3) \cos (\Omega - \omega) + (\mu_3 m_4 \sin \theta_3 - \mu_1 m_2 \sin \theta_1) \sin (\Omega - \omega) \\ = m_3 \cos \theta_3 - m_1 \cos \theta_1,$$

$$(m_2 \sin \theta_1 - m_4 \sin \theta_3) \cos (\Omega - \omega) + (\mu_1 m_2 \cos \theta_1 - \mu_3 m_4 \cos \theta_3) \sin (\Omega - \omega) \\ = m_3 \sin \theta_3 - m_1 \sin \theta_1.$$

Ostatnie dwa równania będą zachodziły równocześnie, jeżeli wyznaczone z nich funkcje $\sin(\Omega - \omega)$ i $\cos(\Omega - \omega)$ czynić będą zadość związkowi:

$$\sin^2(\Omega - \omega) + \cos^2(\Omega - \omega) = 1.$$

Wyrażenia na $\sin(\Omega - \omega)$ i $\cos(\Omega - \omega)$ są, jak łatwo widzieć, następujące:

$$(32) \quad \sin(\Omega - \omega) = \frac{m_2(\mu_3 - \mu_1) \sin(\theta_1 - \theta_3)}{m_2(1 - \mu_1 \mu_3) - m_1 m_2 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}, \\ \cos(\Omega - \omega) = \frac{m_3(1 - \mu_1 \mu_3) \cos(\theta_1 - \theta_3) - m_1 m_3^2}{m_2(1 - \mu_1 \mu_3) - m_1 m_2 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu i dodając otrzymane wyrażenia, powinniśmy otrzymać 1, co prowadzi do związku:

$$m_3^2(\mu_3 - \mu_1)^2 + m_1^2 m_3^4 - 2m_1 m_3^3(1 - \mu_1 \mu_3) \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ + m_3^2[(1 - \mu_1 \mu_3)^2 - (\mu_3 - \mu_1)^2] \cos^2(\theta_1 - \theta_3) \\ = m_2^2(1 - \mu_1 \mu_3)^2 - 2m_1 m_2^2 m_3(1 - \mu_1 \mu_3) \cos(\theta_1 - \theta_3) + m_1^2 m_2^2 m_3^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_3),$$

który powinien spełniać się tożsamościowo. Stąd otrzymamy warunek jedyny:

$$(33) \quad m_3^2 = m_2^2.$$

Zestawiając go z warunkiem (31), otrzymujemy:

$$m_4 = \pm m_1, \quad m_3 = \pm m_2.$$

Ponieważ pomiędzy stałymi μ_h i m_h zachodzi związek $m_h^2 + \mu_h^2 = 1$, będzie przeto:

$$(34) \quad \mu_4 = \pm \mu_1, \quad \mu_3 = \pm \mu_2.$$

gdzie znaki należy obrać tak, aby funkcja Ω , określona z równań (32), czyniła zadość równaniom:

$$\frac{\partial(\Omega + \theta_1)}{\partial u} = \frac{1 + \mu_2}{m^2} \sin(\Omega - \theta_1), \quad \frac{\partial(\Omega - \theta_1)}{\partial v} = \frac{1 - \mu_2}{m_2} \sin(\Omega + \theta_1), \\ (35) \quad \frac{\partial(\Omega + \theta_3)}{\partial u} = \frac{1 + \mu_4}{m_4} \sin(\Omega - \theta_3), \quad \frac{\partial(\Omega - \theta_3)}{\partial v} = \frac{1 - \mu_4}{m_4} \sin(\Omega + \theta_3),$$

namocy tylko równań:

$$\frac{\partial(\theta_1 + \omega)}{\partial u} = \frac{1 + \mu_1}{m_1} \sin(\theta_1 - \omega), \quad \frac{\partial(\theta_1 - \omega)}{\partial v} = \frac{1 - \mu_1}{m_1} \sin(\theta_1 + \omega), \\ (36) \quad \frac{\partial(\theta_3 + \omega)}{\partial u} = \frac{1 + \mu_3}{m_3} \sin(\theta_3 - \omega), \quad \frac{\partial(\theta_3 - \omega)}{\partial v} = \frac{1 - \mu_3}{m_3} \sin(\theta_3 + \omega),$$

Przyjmijmy najprzód, że $m_4 = m_1$, $m_3 = m_2$, wtedy łatwo okazać, że:

$$(37) \quad \operatorname{tg} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{1 - \mu_1 \mu_3 - m_1 m_3} \operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}.$$

Wyznaczywszy stąd $\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial u}$, $\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v}$, podstawivszy te wartości w równaniu (35) i uwzględnivszy równanie (36), przekonamy się, że równania (35) spełniają się tożsamościowo jedynie przy warunku:

$$(38) \quad \mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1,$$

Niechaj teraz będzie $m_3 = -m_2$, $m_4 = -m_1$, otrzymamy wtedy:

$$(39) \quad \operatorname{tg} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{1 - \mu_1 \mu_3 + m_1 m_3} \operatorname{cotg} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}.$$

I w tym przypadku za pomocą odpowiedniego podstawienia przekonamy się, że równaniu (35) zdaje się zadość przy warunku:

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Łatwo przypadek drugi sprowadzić do pierwszego; w tym celu dość zamiast funkcji θ_3 wprowadzić funkcję $\theta'_3 = \theta_3 + \pi$.

Widzimy tedy, że aby zachodziła równość symboliczna:

$$B_{\pi_1} B_{\pi_2} = B_{\pi_3} B_{\pi_4},$$

stałe m_h^2 i μ_h , charakteryzujące każde z przekształceń B_{π_h} , powinny czynić zadość związkowi:

$$m_3 = m_2, \quad m_4 = m_1, \quad \mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Z uwagi, że $m_h = \cos \sigma_h$, $\mu_h = \sin \sigma_h$, możemy te związki zastąpić przez następujące:

$$\sigma_4 = \sigma_1, \quad \sigma_3 = \sigma_2,$$

wyrażenie zaś (37) przybierze wtedy postać:

$$(40) \quad \operatorname{tg} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\cos \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}{\sin \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

Zbierając wszystko, co wyżej powiedziano, dochodzimy do następującego twierdzenia.

Aby dwa kolejno stosowane przekształcenia Bäcklunda $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ doprowadzały do tej samej powierzchni, do której prowadzą dwa kolejne przekształcenia $B_{\sigma_3}, B_{\sigma_4}$, jest koniecznym i dostatecznym, by stałe, charakteryzujące każde z tych przekształceń czyniły zażość warunkowi $\sigma_3 = \sigma_2$, $\sigma_4 = \sigma_1$. Równanie symboliczne:

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_2} B_{\sigma_1},$$

do którego tym sposobem dochodzimy, wyraża właśnie prawo przemienności Bianchi'ego.

Twierdzenie Bianchi'ego można interpretować geometrycznie w sposób następujący:

Weźmy czworokąt, którego wierzchołki znajdują się w odpowiednich punktach powierzchni o stałej krzywiznie ujemnej -1 , i którego dwa boki przeciwległe są równe stałej $\sin \sigma_1$, dwa drugie stałej $\sin \sigma_2$. Czworokąt ten może poruszać się w przestrzeni w ten sposób, że gdy boki jego zachowują długość stałą, wierzchołki opisują cztery powierzchnie pseudosferyczne o krzywiznie -1 , przy czym każde dwa boki wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni, którą opisuje punkt ich przecięcia, i przez ten punkt przechodząca.

§ 14. We wszystkich naszych rozważaniach nie ograniczaliśmy wcale stałych σ , innymi słowy, stałe te mogły przybierać wartości tak rzeczywiste jak i zespolone. W tym ostatnim przypadku funkcje θ , Ω będą oczywiście, w ogólności biorąc, postaci $\varphi + i\psi$, gdzie φ , ψ są funkcje zmiennych rzeczywistych; równocześnie powierzchnie S_h , jakie otrzymujemy przy tych przekształceniach, będą urojone. Lecz łatwo okazać, opierając się na twierdzeniu Bianchi'ego, że w przypadku, gdy stałe σ_1 i σ_2 są zespolone

sprzężone, powierzchnia S_2 może być rzeczywistą, jeżeli odpowiednio dobierzemy stałe, zachodzące w całkach równań (36). W rzeczy samej, przy odpowiednim wyborze tych stałych, możemy zawsze przyjąć, że funkcje θ_1 i θ_2 są zespolone sprzężone, t. j. $\theta_1 = \varphi + i\psi$, $\theta_2 = \varphi - i\psi$. Kładąc, prócz tego $\sigma_1 = a + bi$, a więc $\sigma_2 = a - bi$, znajdziemy z równań (40) na wyznaczenie wielkości Ω wyrażenie:

$$\operatorname{tg} \frac{\Omega - \omega}{2} = - \frac{\cos a}{\sinh b} \operatorname{tg} \psi,$$

skąd widzimy, że gdy ω jest rzeczywiste, będzie rzeczywistą i funkcją Ω .

Z mocy warunków naszych stałe, m_1 i m_2 , μ_1 i μ_2 będą zespolone sprzężone.

Na podstawie twierdzenia Bianchi'ego można spólrzędne powierzchni S_2 przedstawić w postaci:

$$r_2 = \frac{m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos \theta_2}{2} + \cos(\Omega - \omega) \frac{m_2 \cos \theta_1 + m_1 \cos \theta_2}{2} - \sin(\Omega - \omega) \frac{\mu_1 m_2 \sin \theta_1 + \mu_2 m_1 \sin \theta_2}{2},$$

$$t_2 = \frac{m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin \theta_2}{2} + \cos(\Omega - \omega) \frac{m_2 \sin \theta_1 + m_1 \sin \theta_2}{2} + \sin(\Omega - \omega) \frac{\mu_1 m_2 \cos \theta_1 + \mu_2 m_1 \cos \theta_2}{2},$$

$$z_2 = m_1 m_2 \sin(\Omega - \omega);$$

będą to wielkości rzeczywiste. Tak więc:

Kolejne stosowanie dwóch zespolonych sprzężonych przekształceń Bäcklunda doprowadza do pewnej powierzchni rzeczywistej.

§ 15. Zajmiemy się teraz bardziej szczegółowem rozpatrzeniem przekształcenia powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej, i znowu nie zmniejszając ogólności, możemy przyjąć, że krzywizna ta równa się $+1$.

Odniesmy rozważaną powierzchnię S do linii krzywiznowych $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, osi zaś spólrzędnych (T), podobnie jak poprzednio, oberzmy tak, aby osi $xizy$ były styczne do krzywych $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$. Przy takim wyborze spólrzędnych wielkości zasadnicze, charakteryzujące powierzchnię, będą¹⁾:

$$\xi = \cosh \omega, \quad \eta_1 = \sinh \omega, \quad p = q_1 = 0, \quad p_1 = -\cosh \omega, \quad q = \sinh \omega,$$

$$r = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \quad r_1 = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha},$$

¹⁾ Darboux, t. 3, str. 385.

gdzie funkcy ω jest całką równania różniczkowego:

$$(41) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \sinh \omega \cosh \omega = 0.$$

Równanie to wyraża właśnie warunek, aby krzywizna naszej powierzchni była $+1$.

Rozpatrzmy jak w § 12 kongruencję stycznych, które z osią x tworzą kąt $i\theta$; równanie tej stycznej w odniesieniu do odpowiednich osi (T) będzie oczywiście:

$$(42) \quad z = 0, \quad xi \sinh \theta - y \cosh \theta = 0.$$

Starajmy się znowu, jak wyżej, wybrać kąt $i\theta$ tak, aby: 1) odległość punktów ogniskowych kongruencji naszej była równa mi ; 2) aby kąt $\frac{\pi}{2} - \sigma$ między jej płaszczyznami ogniskowymi był stały.

Jedną z powierzchni ogniskowych kongruencji naszej będzie powierzchnia S ; spólrzędne zaś punktów drugiej powierzchni ogniskowej S_1 w odniesieniu do odpowiednich osi (T) będą:

$$x = mi \cosh \theta, \quad y = -m \sinh \theta, \quad z = 0.$$

Nie będziemy tu przytaczali wszystkich rozważań, niezbędnych do wyprowadzenia równań różniczkowych, którym czyni zadość funkcy θ , gdyż byłoby to prostem powtórzeniem rozważań, podanych w § 12. Podamy tylko rezultaty ostateczne.

Zauważmy, że podobnie jak w § 9, stała m i kąt x są połączone związkiem $m^2 = \cos^2 \sigma$; jeżeli teraz oznaczmy przez μ stałą, czyniącą zadość warunkowi:

$$(43) \quad \mu^2 + m^2 = 1.$$

to na wyznaczenie funkcy θ mieć będziemy następujący układ równań:

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + i \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= \frac{\mu i \sinh \omega \cosh \theta}{m} - \frac{i \cosh \omega \sinh \theta}{m}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - i \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= -\frac{\mu \cosh \omega \sinh \theta}{m} + \frac{\sinh \omega \cosh \theta}{m}. \end{aligned}$$

Łatwo wykazać, że równania te zgodnie spólistniają; dla uproszczenia obliczeń wprowadźmy nowe parametry $u = \frac{\alpha + i\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha - i\beta}{2}$, wtedy rów-

nanie (41), któremu czyni zadość funkcy ω , przekształci się na następujące:

$$(45) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \sinh \omega \cosh \omega = 0.$$

Na wyznaczenie zaś funkcy θ będziemy mieli równanie:

$$(46) \quad \frac{\partial(\theta - \omega)}{\partial u} = i \frac{\mu - 1}{m} \sinh(\theta + \omega), \quad \frac{\partial(\theta + \omega)}{\partial v} = -i \frac{1 + \mu}{m} \sinh(\theta - \omega).$$

Teraz już przy pomocy zwyczajnego różniczkowania możemy przekonać się, że równania te spólistniają zgodnie na mocy warunku (45). Prócz tego rugując z nich funkcy ω , dojdziemy do równania, któremu czyni zadość funkcy θ , mianowicie do równania:

$$(47) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \sinh \theta \cosh \theta = 0.$$

Uwzględniając równania (44), znajdziemy następujące wyrażenia na rzuty przesunięcia odpowiedniego punktu powierzchni S_1 :

$$(48) \quad \begin{aligned} \delta x &= \cosh \theta (\cosh \omega \cosh \theta - \mu \sinh \omega \sinh \theta) d\alpha \\ &\quad + i \sinh \theta (\sinh \omega \cosh \theta - \mu \cosh \omega \sinh \theta) d\beta, \\ \delta y &= i \cosh \theta (\cosh \omega \sinh \theta - \mu \sinh \omega \cosh \theta) d\alpha \\ &\quad + \sinh \theta [\mu \cosh \omega \cosh \theta - \sinh \omega \sinh \theta] d\beta, \\ \delta z &= -mi \cosh \theta \sinh \omega d\alpha + m \sinh \theta \cosh \omega d\beta; \end{aligned}$$

widzimy stąd, że element liniowy powierzchni S_1 wyraża się wzorem:

$$ds_1^2 = \cosh^2 \theta d\alpha^2 + \sinh^2 \theta d\beta^2.$$

Z uwagi na równanie (47), któremu czyni zadość funkcy θ , i pamiętając, że krzywe $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ są liniami krzywiznowymi powierzchni S_1 , widzimy, że funkcy α odgrywa tę samą rolę dla powierzchni S_1 , jaką funkcy ω dla powierzchni S .

§ 16. Przechodzimy do dowodu prawa przemienności Bianchi'ego dla powierzchni o krzywiznie gaussowskiej stałej dodatniej.

Znowu przez B_σ oznaczamy przekształcenie analogiczne do Bäcklundowskiego i charakteryzujące się stałą σ . Zajmijmy się rozstrzygnięciem

pytania, kiedy jest możliwą równość symboliczna:

$$B_{x_1} B_{x_2} = B_{x_3} B_{x_4},$$

t. j. kiedy przejść można od pewnej powierzchni S o krzywiznie stałej dodatniej do innej takiej powierzchni S_2 przy pomocy kolejnego stosowania dwóch przekształceń $B_{x_1} B_{x_2}$ lub dwóch przekształceń $B_{x_3} B_{x_4}$.

Oznaczmy przez S_1, S_3 powierzchnie, do której dochodzimy od powierzchni S przy pomocy odpowiednich przekształceń B_{x_1}, B_{x_2} ; elementy tych powierzchni będą:

$$ds_1^2 = \cosh^2 \theta_1 d\alpha^2 + \sinh^2 \theta_1 d\beta^2, \quad ds_3^2 = \cosh^2 \theta_3 d\alpha^2 + \sinh^2 \theta_3 d\beta^2.$$

Element liniowy powierzchni S_2 , do której dochodzimy od powierzchni S_1 za pomocą przekształcenia B_{x_2} , albo od powierzchni S_3 za pomocą przekształcenia B_{x_4} , wyrazimy w ten sposób:

$$ds_2^2 = \cosh^2 \Omega d\alpha^2 + \sinh^2 \Omega d\beta^2.$$

Funkcje $\theta_1, \theta_3, \Omega$ będą całkami równania postaci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \sinh f \cosh f = 0.$$

Zakładamy znowu a priori istnienie powierzchni S_2 , a potem wyprowadzimy warunek, przy których ona w rzeczy samej istnieje.

Przy pomocy rozważań, podobnych do rozważań w § 13, znajdziemy następujące wyrażenia na współrzędne odpowiedniego punktu powierzchni S_2 , uważanej jako przekształcenie powierzchni S_1 :

$$\begin{aligned} x_2 &= m_1 i \cosh \theta_1 + m_2 i \cosh \theta_3 \cosh(\Omega - \omega) + \mu_1 m_2 i \sinh \theta_1 \sinh(\Omega - \omega), \\ (49) \quad y_2 &= -m_1 \sinh \theta_1 - m_2 \sinh \theta_3 \cosh(\Omega - \omega) - \mu_1 m_2 \cosh \theta_1 \sinh(\Omega - \omega), \\ z_2 &= -m_1 m_2 \sinh(\Omega - \omega). \end{aligned}$$

Współrzędne tegoż punktu w założeniu, że powierzchnia S_2 jest przekształceniem powierzchni S_3 będą te same postaci z tą tylko różnicą, że wszędzie zamiast m_1, m_2, θ_1 trzeba będzie napisać odpowiednio m_3, m_4, θ_3 .

Porównyując otrzymane w ten sposób wyrażenia, otrzymamy warunki:

$$(50) \quad m_1 m_2 = -m_3 m_4,$$

oraz:

$$\begin{aligned} (m_2 \cosh \theta_1 - m_4 \cosh \theta_3) \cosh(\Omega - \omega) + (\mu_1 m_2 \sinh \theta_1 - \mu_3 m_4 \sinh \theta_3) \sinh(\Omega - \omega) \\ = m_3 \cosh \theta_3 - m_1 \cosh \theta_1, \end{aligned}$$

(51)

$$\begin{aligned} (m_2 \sinh \theta_1 - m_4 \sinh \theta_3) \cosh(\Omega - \omega) + (\mu_1 m_2 \cosh \theta_1 - \mu_3 m_4 \cosh \theta_3) \sinh(\Omega - \omega) \\ = m_3 \sinh \theta_3 - m_1 \sinh \theta_1, \end{aligned}$$

Wyznaczone z tych równań funkcje $\cosh(\Omega - \omega)$, $\sinh(\Omega - \omega)$ winny czynić zadość związkowi:

$$(52) \quad \cosh^2(\Omega - \omega) - \sinh^2(\Omega - \omega) = 1.$$

Rozwiązując równania (51) względem $\cosh(\Omega - \omega)$ i $\sinh(\Omega - \omega)$, znajdziemy:

$$\begin{aligned} \cosh(\Omega - \omega) &= \frac{m_3 [(1 - \mu_1 \mu_3) \cosh(\theta_1 - \theta_3) - m_1 m_3]}{m_2 [1 - \mu_1 \mu_3 - m_1 m_3 \cosh(\theta_1 - \theta_3)]}, \\ (53) \quad \sinh(\Omega - \omega) &= \frac{m_3 (\mu_3 - \mu_1) \sinh(\theta_1 - \theta_3)}{m_2 [1 - \mu_1 \mu_3 - m_1 m_3 \cosh(\theta_1 - \theta_3)]}. \end{aligned}$$

Wstawiając te wartości w warunek (52), powinniśmy otrzymać tożsamość; wykonanie łatwych rachunków doprowadzi wtedy do wniosku, że warunek (52) będzie spełniony tożsamościowo, jeżeli przyjmiemy $m_2^2 = m_3^2$, a więc:

$$(54) \quad m_3 = \pm m_2, \quad m_4 = \pm m_1.$$

Jeżeli przez μ_h oznaczymy takie wielkości, które z odpowiednią wielkością m_h łączą związek $\mu_h^2 + m_h^2 = 1$, wtedy z warunków (54) otrzymamy:

$$(55) \quad \mu_3 = \pm \mu_2, \quad \mu_4 = \pm \mu_1,$$

przyczem każdej kombinacji (54) mogą odpowiadać cztery kombinacje (56).

Zobaczmy teraz, jakie znaki w warunkach (54) i (55) odpowiadać będą naszemu pytaniu. Znaki te powinny być tak dobrane, aby równania, służące do określenia funkcji Ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Omega - \theta_1)}{\partial u} &= i \frac{\mu_2 - 1}{m_2} \sinh(\Omega + \theta_1), \quad \frac{\partial(\Omega - \theta_3)}{\partial u} = i \frac{\mu_4 - 1}{m_4} \sinh(\Omega + \theta_3), \\ (56) \quad \frac{\partial(\Omega + \theta_1)}{\partial v} &= -i \frac{\mu_2 + 1}{m_2} \sinh(\Omega - \theta_1), \quad \frac{\partial(\Omega + \theta_3)}{\partial v} = -i \frac{\mu_4 + 1}{m_4} \sinh(\Omega - \theta_3), \end{aligned}$$

spełniały się na mocy samych tylko równań:

$$(57) \quad \frac{\partial(\theta_1 - \omega)}{\partial u} = i \frac{\mu_1 - 1}{m_2} \sinh(\theta_1 + \omega), \quad \frac{\partial(\theta_3 - \omega)}{\partial u} = i \frac{\mu_3 - 1}{m_3} \sinh(\theta_3 + \omega),$$

$$\frac{\partial(\theta_1 + \omega)}{\partial v} = -i \frac{\mu_1 + 1}{m_1} \sinh(\theta_1 - \omega), \quad \frac{\partial(\theta_3 + \omega)}{\partial v} = -i \frac{\mu_3 + 1}{m_3} \sinh(\theta_3 - \omega).$$

Przyjmijmy najprzód $m_3 = m_2$, $m_4 = m_1$, wtedy z równań (53) mieć będziemy:

$$(58) \quad \operatorname{tgh} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{1 - m_1 m_3 - \mu_1 \mu_3} \operatorname{tgh} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}.$$

Wyznaczając stąd pochodne $\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial u}$, $\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v}$, podstawiając ich wartości we wzory (56) i uwzględniając równania (57), znajdziemy, że równania (56) spełniają się tożsamościowo jedynie przy warunku:

$$(59) \quad \mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Niechaj będzie teraz: $m_3 = -m_2$, $m_4 = -m_1$; wtedy z wzorów (53) znajdziemy:

$$(60) \quad \operatorname{tgh} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{1 - \mu_1 \mu_3 + m_1 m_3} \operatorname{cotgh} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}.$$

I w tym przypadku przy pomocy bezpośredniego podstawienia przekonamy się, że pomiędzy stałymi μ_h winny zachodzić związki:

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Ostatni przypadek sprowadzimy do pierwszego, jeżeli zamiast funkcji θ_3 weźmiemy funkcję $\theta'_3 = \theta_3 + \pi i$.

Tym sposobem widzimy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby zachodziła równość symboliczna:

$$B_{z_1} B_{z_2} = B_{z_3} B_{z_4},$$

jest, by stałe $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ były połączone związkami:

$$\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_1.$$

Tak więc, aby dwa kolejno po sobie stosowane przekształcenia B_{z_1}, B_{z_2} doprowadzały do tej samej powierzchni, co i dwa kolejno stosowane przekształcenia B_{z_3}, B_{z_4} jest koniecznym i dostatecznym, aby stałe σ , cha-

rakteryzujące każde z tych przekształceń, były połączone związkami $\sigma_3 = \sigma_2$, $\sigma_4 = \sigma_1$.

§ 17. Badania w paragrafie poprzedzającym są ważne z tego względu, że dają możliwość znalezienia przekształcenia rzeczywistego powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej. Poszukiwanie to było przedmiotem wielu dawniejszych daremnych usiłowań, które tylko doprowadziły były, jak to zobaczymy niżej, do szczególnego przypadku i to drogą uboczną. W paragrafie niniejszym postaramy się znaleźć takie przekształcenie, opierając się na dowiedzionym przez nas twierdzeniu Bianchi'ego.

Dajmy, że istnieją dwa przekształcenia B_{z_1}, B_{z_2} takie, że stosując je kolejno do pewnej rzeczywistej powierzchni S , dochodzimy do rzeczywistej powierzchni S_2 . Stosując twierdzenie Bianchi'ego i wyrażenia (49), możemy spółrzedne odpowiedniego punktu powierzchni S_2 przedstawić w postaci:

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{i(m_1 \cosh \theta_1 + m_3 \cosh \theta_3)}{2} + \frac{i(m_2 \cosh \theta_1 + m_4 \cosh \theta_3)}{2} \cosh(\Omega - \omega) \\ &\quad + i \frac{(\mu_1 m_2 \sinh \theta_1 + \mu_3 m_4 \sinh \theta_3)}{2} \sinh(\Omega - \omega), \\ y_2 &= -\frac{m_1 \sinh \theta_1 + m_3 \sinh \theta_3}{2} - \frac{m_2 \sinh \theta_1 + m_4 \sinh \theta_3}{2} \cosh(\Omega - \omega) \\ &\quad - \frac{\mu_1 m_2 \cosh \theta_1 + \mu_3 m_4 \cosh \theta_3}{2} \sinh(\Omega - \omega), \\ z_2 &= -m_1 m_2 \sinh(\Omega - \omega), \end{aligned} \right.$$

przyczem jest:

$$m_3 = m_2, \quad m_4 = m_1, \quad \mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1,$$

Zakładamy a priori, że funkcja $\Omega - \omega$ i wszystkie spółrzedne x_2, y_2, z_2 są rzeczywiste. Wnosimy stąd, że pomiędzy stałymi m_1, m_2 istnieje zależność taka, że jeżeli $m_1 = a + bi$, to $m_2 = \pm a \mp bi$.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\cosh \theta_1 = A + Bi, \quad \sinh \theta_1 = L + Mi, \quad \mu_4 = \mu_1 = h + ik,$$

$$\cosh \theta_3 = A_3 + B_3 i, \quad \sinh \theta_3 = L_3 + M_3 i, \quad \mu_3 = \mu_2 = h_3 + i k_3.$$

Ponieważ, według założenia, spółrzedne x_2, y_2, z_2 są rzeczywiste, możemy przyjąć, że funkcje

$$m_1 \cosh \theta_1 + m_2 \cosh \theta_2, \quad m_2 \cosh \theta_1 + m_1 \cosh \theta_3, \quad \mu_1 m_2 \sinh \theta_1 + \mu_2 m_1 \sinh \theta_3$$

są czysto urojone, funkcje zaś:

$$m_1 \sinh \theta_1 + m_2 \sinh \theta_3, \quad m_2 \sinh \theta_1 + m_1 \sinh \theta_3, \quad \mu_1 m_2 \cosh \theta_1 + \mu_2 m_1 \cosh \theta_3$$

są rzeczywiste. Stąd zaś łatwo wywnioskować, że czynią one zadość tym warunkom, jeżeli przyjmiemy:

$$A_2 = \pm A, \quad B_3 = \mp B, \quad L_3 = \mp L, \quad M_3 = \pm M, \quad h_3 = -h, \quad k_3 = k,$$

tak, że możemy ułożyć następującą tabelkę:

$$\begin{aligned} \cosh \theta_1 &= A + Bi, \quad \sinh \theta_1 = L + Mi, \quad m_1 = a + bi, \quad \mu_1 = h + ik, \\ (62) \quad \cosh \theta_3 &= \pm A \mp Bi, \quad \sinh \theta_3 = \mp L \pm Mi, \quad m_3 = \mp a \pm bi, \quad \mu_3 = -h + ik. \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy, że $\theta_1 = \varphi_1 + i\psi_1$, $\theta_3 = \varphi_3 + i\psi_3$ i uwzględnimy równości:

$$\cosh \theta = \cosh(\varphi + i\psi) = \cosh \varphi \cosh \psi + i \sinh \varphi \sinh \psi,$$

$$\sinh \theta = \sinh(\varphi + i\psi) = \sinh \varphi \cosh \psi + i \cosh \varphi \sinh \psi,$$

to pierwsze dwie kolumny powyższej tabelki dadzą nam związki następujące:

$$\begin{aligned} \cosh \varphi_3 \cosh \varphi_3 &= \pm \cosh \varphi_1 \cosh \varphi_1, \quad \sinh \varphi_3 \sinh \varphi_3 = \mp \sinh \varphi_1 \sinh \varphi_1, \\ (63) \quad \sinh \varphi_3 \cosh \varphi_3 &= \mp \sinh \varphi_1 \cosh \varphi_1, \quad \cosh \varphi_3 \sinh \varphi_3 = \pm \cosh \varphi_1 \sinh \varphi_1, \end{aligned}$$

stąd dla znaków górnych będzie:

$$(64) \quad \varphi_3 = -\varphi_1, \quad \varphi_3 = \psi_1,$$

dla dolnych zaś:

$$(65) \quad \varphi_3 = -\varphi_1, \quad \varphi_3 = \psi_1 + \pi.$$

Zobaczymy, czy wartości φ_3 i ψ_3 rozwiązują nasze zadanie.

Przedewszystkiem okażemy, że jeżeli przy obranych przez nas wartościach m_1, μ_1 funkcja $\theta_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ jest całką równań (44), to funkcja $\theta_3 = \varphi_3 + i\psi_3$ będzie całką równań tejże postaci, w których m_1, μ_1 zastąpiono odpowiednio przez m_3, μ_3 , te zaś ostatnie stałe mają wartości, wskazane przez wzory (62). Podstawiając w równania (44) zamiast m_1, μ_1 ich wartości (62), oddzielając części rzeczywiste i urojone, i podstawiając w te równania wartość θ_1 zamiast θ , znajdziemy tożsamości:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} (a^2 + b^2) &= (bh - ka) \sin h \omega \cosh \varphi_1 \cos \psi_1 \\ &- (ah + bk) \sinh \varphi_1 \sin \psi_1 \sinh \omega - b \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cos \psi_1 + a \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cosh \psi_1, \\ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial a} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) (a^2 + b^2) &= (ah - bk) \sin h \omega \cosh \varphi_1 \cos \psi_1 \\ &+ (bh - ak) \sinh \varphi_1 \sinh \psi_1 \sinh \omega - a \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cos \psi_1 - b \sinh \psi_1 \cosh \varphi_1 \cosh \omega, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} (a^2 + b^2) &= - (ah + bk) \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cos \psi_1 \\ &+ (ak - bh) \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cosh \psi_1 + a \sinh \omega \cosh \varphi_1 \cos \psi_1 + b \sinh \omega \sinh \varphi_1 \sinh \psi_1, \\ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \omega}{\partial a} \right) (a^2 + b^2) &= (bh - ak) \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cos \psi_1 \\ &- (ah + bk) \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cosh \psi_1 + a \sinh \omega \sinh \varphi_1 \sinh \psi_1 - b \sinh \omega \cosh \varphi_1 \cosh \psi_1. \end{aligned}$$

Teraz już łatwo widzieć, że te równości pozostaną tożsamościami przy odpowiedniej zamianie wielkości $\varphi_1, \psi_1, a, b, h, k$ na $-\varphi_1, \psi_1, -a, b, -h, k$, albo na: $-\varphi_1, \psi_1 + \pi, a, -b, -h, k$. Pozostaje jeszcze przekonać się, czy przy tych warunkach funkcja Ω będzie rzeczywista.

Z wyrażenia (58) przy pierwszym założeniu znajdujemy:

$$\operatorname{tgh} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{-2h}{1 + a^2 + b^2 + h^2 + k^2} \operatorname{tgh} \varphi_1;$$

Pamiętając, że $m_1 = \cos \sigma_1, \mu_1 = \sin \sigma_1$, i kładąc $\sigma_1 = a + \beta i$, znajdziemy łatwo:

$$\operatorname{tgh} \frac{\Omega - \omega}{2} = - \frac{\sin \alpha}{\cosh \beta} \operatorname{tgh} \varphi_1.$$

Ponieważ moduł obu mnożników strony pierwszej jest mniejszy od 1, przeto $\frac{\Omega - \omega}{2}$ jest funkcją rzeczywistą.

W przypadku drugim znajdziemy również:

$$\operatorname{tgh} \frac{\Omega - \omega}{2} = - \frac{\cosh \beta}{\sin \alpha} \cot \operatorname{tgh} \varphi_1.$$

Ponieważ moduły obu mnożników strony prawej są większe od 1, to w tym przypadku dochodzimy do sprzeczności z założeniem naszym o rzeczywistości funkcji $\Omega - \omega$.

Wreszcie, jeżeli przez $\bar{\sigma}_1$ oznaczymy wielkość sprzężoną z wielkością σ_1 i założymy, że $m_1 = \cos \sigma_1$, $\mu_1 = \sin \sigma_1$, $m_2 = \cos \sigma_2$, $\mu_2 = \sin \sigma_2$, dojdziemy do twierdzenia:

Kolejne stosowanie dwóch przekształceń B_{σ_1} i $B_{\pi+\sigma_1}$ daje przekształcenie rzeczywiste powierzchni krzywiznie stałej dodatniej.

ROZDZIAŁ III.

Twierdzenia Guicharda.

§ 1. W § 3 rozdziału poprzedzającego wypowiedzieliśmy ważne twierdzenie Weingartena, którego istota polega na tem, że jeżeli mamy jakąś powierzchnię S , powstałą ze zgięcia powierzchni obrotowej, to styczne do krzywych, będących zgięciami południków, są normalne do pewnej określonej powierzchni W .

Ponieważ charakter zależności pomiędzy promieniami krzywizny tej ostatniej powierzchni określa w zupełności forma elementu liniowego powierzchni S , przeto przy wszelkich odkształceniach powierzchni S styczne do zgięć południków są normalne do pewnej powierzchni W jednej i tej samej klasy.

W r. 1899 Guichard podał bez dowodu twierdzenie, będące uogólnieniem twierdzenia Weingartena dla dwóch przypadków szczególnych¹⁾. Zadanie, które postawił sobie Guichard, można wyrazić sposobem następującym:

Niechaj będzie pewna powierzchnia S i niezmiennie związana z nią kongruencja promieni padających D , będąca układem normalnych do pewnej powierzchni Σ . Dajmy, że powierzchnia Σ należy do klasy powierzchni W , t. j. że promienie jej krzywizny są połączone określonym związkiem:

$$(1) \quad f(R_1, R_2) = 0,$$

o współczynnikach stałych. Zapytujemy, jakim warunkom czynić winny zażość powierzchnia S i kongruencja D , aby przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S promienie kongruencji D pozostawały normal-

nemi do powierzchni Σ , których promienie krzywizny są połączone tymże związkiem (1).

Przystąpmy do rozwiązania tego zadania w przypadkach, zbadanych przez Guicharda, mianowicie, kiedy rzeczone powierzchnie Σ są powierzchniami minimalnymi albo powierzchniami ze stałą krzywizną gaussowską, t. j. gdy związek (1) ma jedną z dwóch postaci:

$$R_1 + R_2 = 0, \quad R_1 R_2 = m = \text{const.}$$

Tak, jak poprzednio, posługiwać się będziemy ruchomym układem współrzędnych (T) , związanym w pewien sposób określony z powierzchnią S . Za płaszczyznę xy przyjmijmy płaszczyznę styczną do powierzchni S , za płaszczyznę xz płaszczyznę padania promieni kongruencji D , za krzywe $v = \text{const}$ weźmy krzywe styczne do naszych osi x , za krzywe $u = \text{const}$ ich trajektorie ortogonalne. Przy tych założeniach, równaniami promienia kongruencji D względem odpowiednich osi (T) będą:

$$y = 0, \quad x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0,$$

a współrzędnymi jakiegokolwiek punktu tego promienia:

$$x = \varrho \cos \alpha, \quad y = 0, \quad z = \varrho \sin \alpha;$$

stąd rzuty przesunięcia tego punktu na osi (T) będą:

$$\delta x = \xi du + d(\varrho \cos \alpha) + (q du + q_1 dv) \varrho \sin \alpha,$$

$$\delta y = \eta_1 dv + (r du + r_1 dv) \varrho \cos \alpha - (p du + p_1 dv) \varrho \sin \alpha,$$

$$\delta z = d(\varrho \sin \alpha) - (q du + q_1 dv) \varrho \cos \alpha.$$

Aby nasze promienie były normalne do pewnej powierzchni Σ jest, — jakżeśmy to widzieli w rozdziale pierwszym — koniecznem i dostatecznem, by wszelkie przesunięcia jednego z punktów promienia $M(l \cos \alpha, 0, l \sin \alpha)$ czyniły zadość związkowi:

$$\delta x \cos \alpha + \delta z \sin \alpha = 0,$$

lub
(2)

$$dl + \xi \cos \alpha du = 0.$$

Z tego ostatniego równania wynika, że:

$$(3) \quad \frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0.$$

Odległość punktów ogniskowych promieni naszej kongruencji od początku

¹⁾ Comptes rendus de l'Acad. des sciences 1899 (23 stycznia).

spółrzędnych (T) otrzymamy, wyłączając du i dv ze związków $\delta y = 0$, $\delta x \sin \alpha - \delta z \cos \alpha = 0$; równanie, którego pierwiastkami będą te odległości, ma postać:

$$(4) \quad \begin{aligned} & q^2 \left[-r_1 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + r_1 q \cos \alpha + p_1 \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - p_1 q \sin \alpha + r \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right. \\ & \left. - p \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} - r q_1 \cos \alpha + p q_1 \sin \alpha \right] + q \left[\xi r_1 \sin \alpha \cos \alpha - \xi p_1 \sin^2 \alpha \right. \\ & \left. - \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \eta_1 q \right] + \xi \eta_1 \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Jeżeli przez q_1 i q_2 oznaczymy pierwiastki tego równania, przez l — odległość od początku współrzędnych (T) odpowiedniego punktu M powierzchni Σ , normalnej do promieni D , to na promienie krzywizny powierzchni Σ otrzymamy wyrażenia:

$$(5) \quad R_1 = l - q_1, \quad R_2 = l - q_2.$$

§ 2. Zajmiemy się teraz zagadnieniem Guicharda w przypadku, gdy powierzchnia Σ jest powierzchnią minimalną, t. j. gdy promienie tej krzywizny są połączone związkiem $R_1 + R_2 = 0$. Związek ten, na podstawie równań (5), przybiera postać:

$$(6) \quad 2l - (q_1 + q_2) = 0,$$

gdzie l wyznaczamy z równania (2). Wyznaczając z równań (4) sumę pierwiastków $q_1 + q_2$ i rugując ze związków (6) przy pomocy równań Codazzi'ego - Mainardi'ego funkcje p , q , nadamy temu związkowi postać

$$\begin{aligned} & -2lr_1 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2l\xi\eta_1 K \sin \alpha + \xi r_1 \sin \alpha \cos \alpha - \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2l \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ & - \frac{1}{p_1} \left[2lr_1 \xi \eta_1 K \cos \alpha + \xi \eta_1^2 K \right] - \frac{q_1^2}{p_1} \left[2lr_1 \frac{\xi}{\eta_1} \cos \alpha + \xi \right] \\ & + p_1 \left[2l \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \xi \sin^2 \alpha \right] + q_1 \left[2l \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\xi}{\eta_1} - 2lr \cos \alpha \right] = 0, \end{aligned}$$

gdzie K jest krzywizną gaussowską danej powierzchni S . Związek ten powinien zachodzić przy wszystkich przekształceniach powierzchni S ; lecz ponieważ przedstawia on pewną zależność pomiędzy funkcjami p_1 , q_1 , przeto na podstawie rozważań, przytoczonych w § 7 rozdziału I-go, musi on spełniać się tożsamościowo przy wszelkich wartościach na

p_1 i q_1 . Tym sposobem, jeżeli zadanie nasze ma rozwiązanie, to funkcje ξ , η_1 , α , l winny czynić zadość równaniom:

$$(7) \quad 2lr_1 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2l\xi\eta_1 K \sin \alpha + \xi r_1 \sin \alpha \cos \alpha - \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2lr \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0,$$

$$(8) \quad \xi \eta_1 K [2lr_1 \cos \alpha + \eta_1] = 0, \quad (9) \quad \frac{\xi}{\eta_1} [2lr_1 \cos \alpha + \eta_1] = 0,$$

$$(10) \quad \sin \alpha \left[2l \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \xi \sin \alpha \right] = 0, \quad (11) \quad \frac{2l}{\eta_1} \left[\xi \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} - r \eta_1 \cos \alpha \right] = 0,$$

do których winniśmy jeszcze dołączyć równania (2) i (3) § poprzedzającego, mianowicie:

$$dl + \xi \cos \alpha du = 0, \quad \frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0.$$

Zbiór równań (2), (3) oraz (7) — (11) nazwiemy dla krótkości równaniami (E). Widzimy, że równania (8) i (9) są tożsamościowe i dlatego równań (E) będzie sześć.

Wyłączmy na początek przypadek $\alpha = 0$. Z równań (8) i (11) otrzymujemy równania:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0,$$

z których pierwsze wskazuje, że krzywe $v = \text{const}$ są geodezyjue; na mocy zaś drugiego, obawszy w odpowiedni sposób parametr u , możemy napisać:

$$(12) \quad \alpha = u,$$

Wyłączając z równań (2) i (10) funkcję l , otrzymamy na wyznaczenie ξ równanie:

$$\frac{d\xi}{\xi} = - \frac{3 \cos u du}{\sin u},$$

które po zcałkowaniu daje:

$$(13) \quad \xi = \frac{a}{\sin^3 u},$$

gdzie a jest pewną stałą.

Z równań (10) otrzymujemy stąd na l wyrażenie:

$$(14) \quad 2l = \frac{a}{\sin^2 u}.$$

Jeżeli znalezione wartości na α, ξ, l wstawimy w równanie (9) i zauważymy, że $r_1 = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \eta_1}{\partial u}$, to na wyznaczenie wielkości η_1 dostaniemy równanie różniczkowe:

$$\sin u \cos u \frac{\partial \eta_1}{\partial u} + \eta_1 = 0,$$

które po zcałkowaniu daje:

$$\eta_1 = M(v) \cotg u,$$

gdzie $M(v)$ jest funkcją dowolną parametru v ; wybrawszy w odpowiedni sposób parametr v , możemy przyjąć, że ta funkcja równa się ilości stałej k . Podstawiając otrzymane na ξ, η_1, α, l wartości w równanie (7), spostrzeżemy, że spełnia się ono tożsamościowo. Tym sposobem zadanie nasze ma rozwiązanie oznaczone.

Element liniowy powierzchni S wyraża się wzorem:

$$(15) \quad ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^6 u} + k^2 \cotg^2 u dv^2,$$

skąd wnosimy, że powierzchnia S daje się nawinąć na pewną powierzchnię obrotową. Aby znaleźć równanie tej powierzchni, musimy, jak wiadomo, wyrażenie (15) sprowadzić do postaci:

$$(16) \quad ds^2 = [1 + (\varphi'(r_0))^2] dr_0^2 + r_0^2 dv_1^2,$$

wtedy równanie szukanej powierzchni będzie postaci $z = \varphi(r_0)$, gdzie osią z jest oś obrotu, r_0^2 zaś równa się $x^2 + y^2$. Porównyując wyrażenia (15) i (16) możemy napisać:

$$v_1 = \frac{kv}{a}, \quad r_0^2 = a^2 \cotg^2 u,$$

a stąd i z uwagi, że $dr_0 = -\frac{a du}{\sin^2 u}$, otrzymamy:

$$[1 + (\varphi'(r_0))^2] = \frac{1}{\sin^2 u} = 1 + \frac{r_0^2}{a^2}.$$

Całkując to równanie, znajdziemy, że szukana powierzchnia jest paraboloidą o równaniu:

$$(17) \quad z = \frac{r_0^2}{2a} = \frac{x^2 + y^2}{2a}.$$

Przyjmijmy tę paraboloidę za początkową postać powierzchni S ; łatwo widzieć, że płaszczyznami padania promieni odpowiedniej kongruencji D będą płaszczyzny południków. Z drugiej strony z równania:

$$(18) \quad r_0 = a \cotg u$$

wnosimy, że u jest kątem, jaki tworzy styczna do południka z promieniem wodzącym punktu styczności, przechodzącym przez ognisko. Wypływa stąd zatem, że dla wybranej przez nas początkowej postaci powierzchni S wszystkie promienie odpowiedniej kongruencji D przechodzą przez ognisko paraboloidy obrotowej.

Wyrażenie (14) na odległość pomiędzy dwoma odpowiadającymi sobie punktami powierzchni S i Σ będzie w tym przypadku:

$$(18) \quad l = \frac{a^2 + r_0^2}{2a}.$$

Wracając do równań (E), zauważmy, że pozostają one bez zmiany przy zamianie a na $-a$, t. j. przy przejściu od kongruencji promieni padających D do kongruencji promieni odbitych D_1 ; powierzchnię minimalną, tak związaną z kongruencją D_1 , jak powierzchnia Σ jest związana z D , będziemy oznaczali przez Σ_1 .

Zbierając to wszystko, dochodzimy do pierwszego twierdzenia Guicharda:

Połączmy wszystkie punkty paraboloidy obrotowej $2az = x^2 + y^2 = r_0^2$ z ogniskiem; otrzymana w ten sposób kongruencja D prostych będzie układem normalnych do pewnej powierzchni minimalnej Σ . Odległość odpowiadających sobie punktów paraboloidy i powierzchni Σ będzie $l = \frac{a^2 + r_0^2}{2a}$. Jeżeli będziemy dowolnie odkształcali rozważaną paraboloidę i związaną z nią niezmiennie kongruencję D , ta ostatnia będzie w ciągu całego odkształcenia normalna do odpowiednich powierzchni minimalnych D . Podobną własność będzie miała kongruencja D_1 , niezmiennie związana z odkształcającą się powierzchnią i stanowiąca układ promieni odbitych od powierzchni, jeżeli za promienie padające uważać będziemy promienie kongruencji D . Punkty powierzchni minimalnej Σ_1 , normalnej do promieni kongruencji D_1 , są symetrycznymi z punktami powierzchni Σ względem płaszczyzn stycznych

nych do powierzchni S , poprowadzonych w punktach padania odpowiednich promieni. Powierzchnie S są to zgięcia naszej paraboloidy.

Uczynimy jeszcze następującą uwagę o rzekomej zależności pomiędzy powierzchniami Σ i Σ_1 , normalnemi odpowiednio do kongruencji D i D_1 .

Równaniem płaszczyzny stycznej w odpowiadających sobie punktach tych powierzchni będzie:

$$x \cos \alpha \pm z \sin \alpha - l = 0,$$

gdzie znak górny stosuje się do powierzchni Σ , dolny zaś do powierzchni Σ_1 .

Uwzględniając otrzymane wartości na α i l , dochodzimy do twierdzenia:

Odległość punktów jednej z powierzchni minimalnych do promieni kongruencji D i D_1 , od płaszczyzny stycznej poprowadzonej do drugiej z tych powierzchni w odpowiednim punkcie, równa się stałej $|a|$.

Wyłączyliśmy na początku z rozważania naszego przypadek $a = \text{const.}$

Z równań (E) widzimy, że można w tym przypadku przyjąć $\xi = 1$, dalej z równania (10) mamy $\sin \alpha = 0$, t. j. $\alpha = 0$, inaczej mówiąc, promienie naszej kongruencji są styczne do powierzchni S ; jest to przypadek, rozpatrzony przez Weingartena i zbadany przez nas w § 4 rozdziału poprzedzającego.

§ 3. Przejdźmy teraz do przypadku, w którym kongruencya promieni padających D pozostaje normalną do powierzchni o krzywiznie stałej gausowskiej $\frac{1}{m}$ przy wszelkich odkształceniach odbijającej powierzchni S .

Na podstawie wyrażeń (5) związek $R_1 R_2 = m$ przybiera postać:

$$(l^2 - m) - l(q_1 + q_2) + q_1 q_2 = 0;$$

na zasadzie, zaś równania (4) oraz równań Codazzi'ego - Mainardi'ego, po wyłączeniu z niego wielkości p_1, q_1 , wyrazimy ten związek w postaci:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \alpha}{\partial u} [(l^2 - m) r_1 \cos \alpha + l \eta_1] + (l^2 - m) \xi \eta_1 K \sin \alpha \\ & + (l^2 - m) r \cos u \frac{\partial \alpha}{\partial v} + l \xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha + \xi \eta_1 \sin \alpha - \frac{1}{p_1} [(l^2 - m) r_1 \xi \eta_1 K \cos \alpha \\ & + l \xi \eta_1^2 K] - \frac{q_1^2}{p_1} [(l^2 - m) \frac{\xi r_1 \cos \alpha}{\eta_1} + \xi l] + p_1 [(l^2 - m) \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \xi l \sin^2 \alpha] \\ & + q_1^2 [(l^2 - m) \frac{\xi \sin \alpha}{\eta_1} \frac{\partial \alpha}{\partial v} - (l^2 - m) r \cos \alpha] = 0. \end{aligned}$$

Tu, jak i poprzednio, K jest krzywizną gausowską powierzchni S .

Wyrażenie to musi być tożsamością dla wszelkich wartości na p_1, q_1 ; i dlatego funkcje ξ, η_1, α, l winny czynić zadość równaniom:

$$(20) \quad (l^2 - m) \xi \eta_1 K \sin \alpha + (l^2 - m) r \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} + l r_1 \xi \sin \alpha \cos \alpha + \xi \eta_1 \sin \alpha = 0,$$

$$(21) \quad \xi \eta_1 K [(l^2 - m) r_1 \cos \alpha + l \eta_1] = 0,$$

$$(22) \quad \sin \alpha [(l^2 - m) \frac{\partial \alpha}{\partial u} - l \xi \sin \alpha] = 0,$$

$$(23) \quad (l^2 - m) [\sin \alpha \frac{\xi}{\eta_1} \frac{\partial \alpha}{\partial v} - r \cos \alpha] = 0;$$

do tych równań winniśmy dołączyć równania (2) i (3) tego rozdziału, t. j. równania:

$$dl + \cos \alpha du = 0, \quad \frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0.$$

I ten zbiór równań (2), (3), (20)–(23) nazywać będziemy, jak poprzednio, równaniami (E).

Pomijając przypadek $a = \text{const.}$ i zwracając się do równań (3) i (23), znajdujemy równania:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0;$$

z pierwszego z nich wnosimy, że krzywa $v = \text{const.}$ są krzywymi geodezyjnymi na powierzchni S ; na zasadzie zaś drugiego, wybrawszy odpowiednio parametr u , możemy położyć:

$$(24) \quad \alpha = u.$$

Wyznaczwszy z równania (22) funkcję ξ i podstawiając jej wartość w równanie (2), otrzymamy na wyznaczenie funkcji l następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{l dl}{l^2 - m} + \frac{\cos u du}{\sin u} = 0;$$

całkując to równanie, znajdujemy:

$$(25) \quad l^2 - m = \frac{a}{\sin^2 u},$$

gdzie a jest stałą całkowania. Z ostatniego wyrażenia mamy:

$$l = \frac{\sqrt{a + m \sin^2 u}}{\sin u},$$

a stąd dla powierzchni rzeczywistych S zachodzić będzie nierówność:

$$(26) \quad a + m \sin^2 u > 0.$$

Znając l , znajdujemy ξ , mianowicie:

$$(27) \quad \xi = \frac{a}{\sin^2 u \sqrt{a + m \sin^2 u}}.$$

Równanie (21) przy pomocy równania (22) i znalezionych wartości na ξ , l , a : możemy sprowadzić do postaci:

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = - \frac{1}{\sin u \cos u},$$

stąd zaś, obrawszy odpowiednio parametr v , znajdujemy następujące wyrażenie funkcji η_1 :

$$(28) \quad \eta_1 = k \cotg u,$$

gdzie k jest stałą.

Podstawiając w równaniu (20) otrzymane wartości funkcji ξ , η_1 , a , l , spostrzeżemy, że równanie to spełnia się tożsamościowo.

W tym przypadku będziemy mieli następujące wyrażenie na element liniowy powierzchni S :

$$(29) \quad ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a + m \sin^2 u)} + k^2 \cotg^2 u dv^2,$$

skąd wnosimy, że powierzchnia S daje się nawinąć na powierzchnię obrotową.

Znajdźmy równanie jednej z odpowiednich powierzchni obrotowych, przyczem nadając na k rozmaite wartości dowolne, otrzymywać będziemy rozmaite powierzchnie obrotowe, nawijające się jedna na drugą.

Rozwiązując to pytanie, winniśmy rozróżnić dwa przypadki: 1) kiedy krzywizna powierzchni Σ jest dodatnia, i 2) kiedy krzywizna ta jest ujemna.

Rozpatrzmy najprzód przypadek pierwszy, t. j. gdy $m = n^2 > 0$. O stałej a możemy uczynić dwa założenia: $a > 0$, $a < 0$.

Gdy $a > 0$, wtedy nierówność (26) spełnia się tożsamościowo przy wszelkich wartościach na a . Porównajmy wyrażenie (29) na element liniowy powierzchni S z ogólnym wyrażeniem na element liniowy powierzchni obrotowej, t. j. z wyrażeniem:

$$ds^2 = [1 + (\varphi'(r_0))^2] dr_0^2 + r_0^2 dv_1^2;$$

możemy tu, jak łatwo widzieć, przyjąć:

$$v = v_1, \quad r_0 = k \cotg u,$$

skąd znajdziemy:

$$1 + [\varphi'(r_0)]^2 = \frac{a^2 r_0^2 + a^2 k^2}{k^2 [a r_0^2 + k^2 (a + n^2)]},$$

lub też, rozwiązując względem $[\varphi'(r_0)]^2$:

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{(a^2 - k^2 a) r_0^2 + k^2 [a^2 - k^2 (a + n^2)]}{k^2 [a r_0^2 + k^2 (a + n^2)]}.$$

Z uwagi, że, gdy $a > 0$, wielkość $a + n^2$ jest zawsze dodatnia, możemy przyjąć $k^2 = \frac{a^2}{a + n^2}$, przez co wyrażenie poprzednie przybierze postać:

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2 r_0^2}{a (r_0^2 + a)}.$$

Całkując to ostatnie równanie, znajdziemy równanie szukanej powierzchni obrotowej:

$$\frac{z^2}{n^2} - \frac{x^2 + y^2}{a} = 1;$$

wnosimy stąd, że w rozważanym przypadku powierzchnia S daje się nawinąć na hyperboloidę obrotową dwupowłokową.

Przejdźmy do przypadku drugiego, w którym $m = n^2 > 0$, a stała a ujemna. Na mocy nierówności (26) wartość bezwzględna wielkości a musi być mniejsza od m , t. j.

$$(30) \quad a + n^2 > 0.$$

Rozumując zupełnie tak samo, jak w przypadku poprzednim, możemy wyznaczyć stałą k^2 tak, aby było $k^2 = \frac{a^2}{a + n^2}$, a wtedy na wyznaczenie odpowiedniej funkcji $\varphi(r_0)$ otrzymamy równanie różniczkowe:

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2 r_0^2}{-a(-a - r_0^2)}.$$

Kładąc $-a = b^2 > 0$, łatwo otrzymać równanie szukanej powierzchni obrotowej:

$$\frac{z^2}{n^2} + \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1;$$

jest to elipsoida obrotowa. Tak więc w drugim przypadku powierzchnia S rozwija się na elipsoidę obrotową.

Ponieważ na mocy nierówności (30) wielkość $n^2 > l^2$, przeto oś obrotu zlewa się z osią wielką elipsy.

Ze związku $r_0 = k \cotg u$, zachodzącego w obu przypadkach, wypływa, po podstawieniu za k jego wartości, że u jest kątem, jaki tworzy styczna do południka z promieniem wodzącym punktu styczności, przechodzącym przez ognisko. Z drugiej strony, $u = a$ jest kątem, jaki z tą styczną tworzy odpowiedni promień kongruencji D , przeprowadzony przez punkt styczności. I dla tego, jeżeli przyjmiemy, że początkową formą powierzchni S jest jedna z otrzymanych przez nas powierzchni obrotowych rzędu 2-go, to na zasadzie powyższego wywnioskujemy, że wszystkie promienie odpowiedniej kongruencji D przechodzą będą przez jedno z którychkolwiek ognisk odpowiedniej powierzchni rzędu 2-go.

Zwracając się do wyrażenia na odległość l dwóch odpowiadających sobie punktów powierzchni S i Σ , znajdziemy:

$$l^2 = (a + n^2) \frac{r_0^2}{a} + (a + n^2),$$

a więc:

$$l^2 = \frac{z^2 (a + n^2)}{n^2}.$$

Z uwagi, że promień wodzący południka wyraża się wzorem:

$$d^2 = \left(n \pm \frac{\sqrt{n^2 + a}}{n} z \right)^2,$$

mieć będziemy:

$$d_1 = \pm (l - n), \quad d_2 = n + l,$$

gdzie znak górny przed nawiasem odpowiada elipsie, znak dolny — hyperboli. Wnosimy stąd, że odległość odpowiedniego punktu powierzchni Σ od ogniska powierzchni rzędu 2-go, położonego na normalnej do powierzchni Σ , jest wielkością stałą, równą n , jeżeli krzywizną powierzchni Σ jest $\frac{1}{n^2}$.

Zwracając się do równań (E), zauważymy, że nie ulegają one zmianie, gdy zmieniamy a na $-a$, t. j. gdy od kongruencji promieni padających D przechodzimy do kongruencji odbitych D_1 .

Tak, jak poprzednio, powierzchnię związaną niezmiennie z tą ostatnią kongruencją w taki sam sposób, w jaki powierzchnia Σ związana jest z kongruencją D , oznaczać będziemy przez Σ_1 .

Zbierając to wszystko, dochodzimy do drugiego twierdzenia Guicharda.

Mamy hyperboloidę dwupowłokową obrotową o osi rzeczywistej równej $2n$, albo też elipsoidę obrotową około osi wielkiej, której długość równa się $2n$. Łączymy wszystkie punkty rozważanej powierzchni z jednym z jej ognisk; otrzymana tym sposobem kongruencja liniowa D będzie normalna do pewnej powierzchni Σ o krzywiznie gaussowskiej stałej i równej $\frac{1}{n^2}$. Jeżeli będziemy dowolnie odkształcali powierzchnię obrotową, zakładając, że promienie kongruencji D są niezmiennie z nią związane, to promienie te przez cały ciąg odkształcenia będą normalne do odpowiednich powierzchni Σ o stałej krzywiznie $\frac{1}{n^2}$. Drugą taką kongruencją D_1 otrzymamy, łącząc punkty naszych powierzchni obrotowych z drugim ogniskiem. Łatwo widzieć, że punkty odpowiadające tej kongruencji powierzchni Σ_1 będą symetryczne do punktów powierzchni Σ względem płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do powierzchni S w punktach padania odpowiednich promieni. Przez powierzchnie S rozumiemy zgięcia naszych powierzchni obrotowych rzędu 2-go. Jeżeli rozważać będziemy powierzchnie, utworzone przez punkty powierzchni D , zlewające się z ogniskiem odpowiedniej powierzchni obrotowej, to na zasadzie znanego twierdzenia Bonneta¹⁾, powierzchnie te, jako równoległe do powierzchni Σ o stałej krzywiznie gaussowskiej $\frac{1}{n^2}$

będą miały stałą krzywiznę średnią równą $\frac{1}{n}$. Tą samą własność posiadać będą powierzchnie, których punkty są symetryczne do punktów rozważanych powierzchni względem płaszczyzn stycznych do powierzchni S .

§ 4. Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym krzywizna powierzchni Σ jest ujemna, t. j. gdy $m = -n^2 < 0$. Wyrażenie na odległość odpowia-

¹⁾ Bonnet. Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (Journal de l'École Polytechnique, XLII cahier, s. 77).

jących sobie punktów powierzchni S i Σ będzie w tym przypadku:

$$l = \frac{\sqrt{a-n^2 \sin^2 u}}{\sin u},$$

i dlatego dla powierzchni rzeczywistych Σ zachodzić musi nierówność

$$(31) \quad a - n^2 \sin^2 u > 0.$$

Z nierówności tej wnosimy, że stała a musi być dodatnia; możemy o niej uczynić trzy założenia: $a > n^2$, $a < n^2$, $a = n^2$. Rozpatrzmy osobno każdy z tych przypadków; przyczem wyrażenie na $[\varphi'(r_0)]^2$ będzie jak poprzednio postaci:

$$(32) \quad [\varphi'(r_0)]^2 = \frac{(a^2 - k^2 a) r_0^2 + k^2 (a^2 - k^2 a) + k^4 n^2}{k^2 [a(r_0^2 + k^2) - n^2 k^2]}.$$

W przypadku pierwszym, t. j. gdy $a > n^2$, gdybyśmy chcieli wybrać k , jak wyżej, tak, aby wyraz w liczniku niezależny od r_0 był zerem, mielibyśmy

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{-n^2 r_0^2}{a(r_0^2 + k^2)} < 0,$$

t. j. otrzymalibyśmy powierzchnię obrotową rzędu 2-go urojoną.

Co się tyczy pozostałych dwóch przypadków, to w drugim z nich mielibyśmy przyjąć $k^2 = 0$, co być nie może; w pierwszym zaś mielibyśmy na k^2 wyrażenie:

$$k^2 = \frac{a^2}{a - n^2} < 0,$$

wielkość k byłaby urojona i znowu doszlibyśmy do powierzchni urojonych rzędu 2-go. I dla tego wybierzmy k^2 tak, aby w wyrażeniu (32) spółczynnik przy r_0^2 w liczniku był zerem. Przy tym warunku znajdziemy $k^2 = a > 0$, a wyrażenie na $[\varphi'(r_0)]^2$ przybierze postać:

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2}{r_0^2 + a - n^2}.$$

Całkując to równanie, znajdziemy:

$$\text{gdy } a > n^2, \quad r_0 = \sqrt{a - n^2} \frac{e^{\frac{z}{n}} + e^{-\frac{z}{n}}}{2} = \sqrt{a - n^2} \sinh \frac{z}{n},$$

$$\text{gdy } a < n^2, \quad r_0 = \sqrt{n^2 - a} \frac{e^{\frac{z}{n}} + e^{-\frac{z}{n}}}{2} = \sqrt{n^2 - a} \cosh \frac{z}{n},$$

$$, \quad a = n^2, \quad r_0 = e^{\frac{z}{n}}.$$

W ostatnim przypadku południkiem szukanej powierzchni obrotowej będzie logarytmika, której asymptota zlewa się z osią obrotu; w przypadku drugim południkiem będzie linia łańcuchowa, skrócona albo wydłużona, (stosownie do tego, czy $\sqrt{n^2 - a} \lesseqgtr 1$).

Bianchi w rozprawie, wymienionej przez nas we Wstępie, nazywa otrzymane powierzchnie odpowiednio: sinusoidą hyperboliczną, katenoidą, skróconą albo wydłużoną i powierzchnią obrotową logarytmową.

Dochodzimy tym sposobem do trzeciego twierdzenia Guicharda:

Mamy jedną z powierzchni obrotowych równań:

$$x^2 + y^2 = (a - n^2) \sinh^2 \frac{z}{n}, \quad x^2 + y^2 = (n^2 - a) \cosh^2 \frac{z}{n}, \quad x^2 + y^2 = e^{\frac{2z}{n}}.$$

W płaszczyznach południków przez każdy punkt tych powierzchni poprowadźmy proste, tworzące ze stycznymi do południków nakreślonych w tych punktach kąt u , którego dotyczna wyraża się przez współrzędne punktu styczności w ten sposób:

$$\cotg u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a}}.$$

Otrzymana tym sposobem kongruencja prostych D jest układem normalnych do pewnej powierzchni Σ o stałej krzywiznie gaussowskiej $-\frac{1}{n^2}$. Jeżeli będziemy dowolnie odkształcali naszą powierzchnię obrotową w założeniu, że promienie kongruencji D są niezmiennie z nią związane, to promienie te przez cały ciąg odkształcenia pozostaną normalnymi do odpowiednich powierzchni Σ , mających krzywiznę stałą ujemną $-\frac{1}{n^2}$. Taką własność posiadać będą kongruencje promieni D_1 , odbitych od odkształcającej się

powierzchni. Punkty, odpowiadające im powierzchni Σ_1 o stałej krzywiznie będą symetryczne do punktów powierzchni Σ względem płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do powierzchni S w punktach padania odpowiednich promieni. Przez powierzchnie S rozumiemy zgięcia danych powierzchni obrotowych.

Wyrażenie na odległość l odpowiadających sobie punktów powierzchni S i Σ będzie, jak łatwo widzieć:

$$l = \sqrt{r_0^2 + a - n^2}.$$

W przypadku gdy $a = n^2$, znajdujemy następującą ciekawą konstrukcję. Zauważmy, że w tym przypadku $l = r_0$; dalej z równania południka $z = n \log r_0$, i ze związku $r_0 = k \cotg u = n \cotg u$ mamy $\frac{dz}{dr_0} = \tg u$, skąd wnosimy, że promienie równoleżników zlewają się z promieniami kongruencji D . Co się tyczy powierzchni Σ , to łatwo przekonać się można, że gdy S jest powierzchnią logarytmową obrotową, powierzchnia S jest miejscem geometrycznym środków równoleżników, t. j. osią obrotu. Tym sposobem dochodzimy do następującego twierdzenia:

Przekształcimy dowolnie powierzchnię logarytmową obrotową:

$$2z = n \log(x^2 + y^2),$$

zakładając, że z nią związana jest niezmiennie kongruencya promieni D , zlewających się z promieniami równoleżników. W tym przypadku miejscem geometrycznym punktów, które poprzednio zlewały się z osią obrotu, będą powierzchnie Σ okrzywiznie stałej gausowskiej $-\frac{1}{n^2}$, ortogonalne do promieni odpowiedniej kongruencji D .

Pozostaje jeszcze rozpatrzyć pominięty na razie przypadek, w którym $a = \text{const.}$ Z równań (E) znajdujemy, że gdy l jest różne od zera (a to zakładamy a priori), będzie a równe 0, co wskazuje, że proste kongruencji D są styczne do powierzchni S . Dochodzimy tym sposobem do przypadku Weingartenowskiego, rozpatrzonego już w § 4 rozdziału poprzedzającego.

§ 5. Z poprzedzającego widzimy, że dla wszystkich powierzchni obrotowych, na które nawinąć się dają nasze powierzchnie S , zachodzi następujący związek pomiędzy kątem α , który tworzą promienie kongruencji ze

stycznymi, poprowadzonymi do południków w punkcie padania promienia, a promieniem równoleżnika, przechodzącego przez tenże punkt:

$$r_0 \tg \alpha = k = \text{const.}$$

Na podstawie wyników § 7 rozdziału I-go widzimy, że w tym przypadku krzywe główne powierzchni S względem kongruencji D i D_1 są krzywymi sprzężonymi i pozostają takimi przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S . Dalej, ponieważ kongruencje D i D_1 są kongruencjami normalnymi, to na mocy rozważań w § 4 rozdziału I-go krzywe główne powierzchni S względem kongruencji D i D_1 zlewają się. Wreszcie z samej definicji krzywych głównych wypływa, że w tym przypadku odpowiadają one liniom krzywiznowym powierzchni Σ i Σ_1 , normalnych odpowiednio do promieni kongruencji D i D_1 . Dochodzimy tym sposobem do twierdzenia, mającego znaczenie podstawowe w dowodzeniu twierdzeń odwrotnych do twierdzeń Guicharda.

Linie krzywiznowe powierzchni Σ i Σ_1 , normalnych odpowiednio do promieni padających i odbitych D i D_1 , rozważanych w twierdzeniach Guicharda, odpowiadają sobie wzajemnie oraz pewnemu układowi krzywych sprzężonych na odpowiedniej powierzchni odbijającej S .

§ 6. Ponieważ elementy liniowe powierzchni S wyrażają się wzorami:

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^6 u} + k^2 \cotg^2 u dv^2, \quad ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a + m \sin^2 u)} + k^2 \cotg^2 u dv^2,$$

przeto nasze powierzchnie obrotowe S są zasadniczymi powierzchniami obrotowymi, które napotkaliśmy już w § 8 rozdziału I-go, kongruencje zaś D i D_1 będą dołączonymi do nich kongruencjami. Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie:

Linie asymptotyczne na powierzchniach Σ i Σ_1 , rozważanych w twierdzeniach Guicharda, odpowiadają sobie wzajemnie.

§ 7. Podamy tu ciekawy związek, zachodzący pomiędzy rozpatrzonem przez nas twierdzeniem Guicharda a zagadnieniem o wyznaczeniu kongruencji liniowej cyklicznej, t. j. kongruencji, utworzonej z osi kół normalnych do nieskończonej mnogości powierzchni.

Z rozważań w naszym paragrafie wypływa, że istnieje układ kół, ortogonalnych do powierzchni Σ i Σ_1 i mających środki na odpowiednich płasz-

czyznach stycznych do powierzchni S . Spółrzędne punktów jakiegokolwiek z tych kół względem odpowiednich osi (T) będą:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r_0 \cos t, \quad y = 0, \quad z = r_0 \sin t, \\ (33) \quad x_0 &= \frac{l}{\cos u}, \quad r_0 = l \operatorname{tg} u, \end{aligned}$$

t zaś jest kątem, jaki odpowiedni promień koła tworzy z kierunkiem dodatnim osi x . Jeżeli jakikolwiek punkt M tego koła opisuje powierzchnię ortogonalną do rozważanej kongruencji kół, to rzuty przesunąć jej na osi (T) winny czynić zadość równaniu $\delta x \sin t - \delta z \cos t = 0$ przy wszelkich wartościach du, dv . Ponieważ w tym przypadku x_0 i r_0 są funkcjami jednego tylko parametru u , przeto równanie poprzednie sprowadzi się do postaci:

$$(34) \quad Udu + Vdv + Tdt = 0,$$

gdzie:

$$U = qr_0 + qx_0 \cos t + \left(\xi + \frac{dx_0}{du} \right) \sin t, \quad V = q_1(r_0 + x_0 \cos t), \quad T = -r_0.$$

Wiadomo, że równanie (34) spełniać się będzie przy wszelkich wartościach du, dv , jeżeli zachodzić będzie związek tożsamościowy:

$$U \left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v} \right) + V \left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) + T \left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} \right) = 0,$$

który w przypadku obecnym sprowadza się do postaci:

$$A \sin t + B \cos t + C = 0,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad B = -q_1 \left[r_0 \xi + x_0 \frac{dr_0}{du} + \frac{r_0 x_0 r_1 \xi}{\eta_1} \right], \\ C &= -q_1 \left[x_0 \left(\xi + \frac{dx_0}{du} \right) + \frac{r_0^2 r_1 \xi}{\eta_1} \right]. \end{aligned}$$

Aby koła nasze były ortogonalne do nieskończonej mnogości powierzchni jest koniecznem i dostatecznem, by funkcye A, B, C były tożsamościowo zerem¹⁾, t. j. by stawało się zadość równaniom:

$$(35) \quad r_0 \xi \eta_1 + x_0 \eta_1 \frac{dr_0}{du} + r_0 x_0 r_1 \xi = 0, \quad \eta_1 x_0 \xi + \eta_1 x_0 \frac{dx_0}{du} + r_0^2 r_1 \xi = 0.$$

¹⁾ Patrz Bianchi, l. c. str. 321.

Podstawiając tu wartości ξ, η_1, r_0, x_0 dla każdego z rozpatrzonych przez nas w tym rozdziale przypadków, przekonamy się, że we wszystkich tych przypadkach spełniają się równania (35). Jeżeli zauważymy nadto, że warunki (35) nie zależą od funkcji p, q, p_1, q_1 , dojdziemy do następującego twierdzenia:

Z każdą powierzchnią S , dającą się nawinąć na jedną z powierzchni obrotowych zasadniczych, niezmiennie związana jest pewna kongruencja cykliczna, która pozostaje cykliczną przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S .

(D. n.)