TREŚĆ.

O WŁASNOŚCIACH PEWNEJ CAŁKI WIELOKROTNEJ,

będących uogólnieniem dwóch twierdzeń z teoryi wirów.

NAPISAŁ

K. ŻORAWSKI.

W artykule „O zachowaniu ruchu wirowego"[1] zajmowałem się takiemi ruchami ciągłego skupienia punktów materyalnych, podczas których linie wirowe składają się z tych samych materyalnych elementów liniowych, a w szczególności wyprowadziłem wzory, które określają, jak podczas takich ruchów zmieniają się natężenia wirów. Nadto wyznaczyłem całki podwójne, niezmienne przy wszystkich przemieszczeniach wzdłuż linij wirowych. W niniejszej pracy zamiast równań różniczkowych linij wirowych, uważam układ $r < n$ niezależnych równań Pfaffa o n zmiennych niezależnych i określam, jak przy przekształceniu układu Pfaffa zmienia się pewna całka r-krotna, odpowiadająca natężeniu wiru, a także zajmuję się wyznaczeniem całek r-krotnych, niezmiennych przy wszystkich przemieszczeniach wzdłuż elementów liniowych układu równań Pfaffa. Część rachunków tej pracy opieram na pewnym wzorze ogólnym, wyprowadzonym w ustępie **1**, a określającym nieskończenie małe przekształcenie jakiejkolwiek całki, rozpostartej na r-wymiarową rozmaitość w przestrzeni o 4 wymiarach. O ile mi wiadomo, wzór ten w swej zupełnie ogólnej postaci nigdzie dotychczas podany nie został. Pierwsze z zagadnień tu wymienionych, t. j. określenie zachowania się całki, odpowiadającej natężeniu wiru i wywodów z tem związanych, wykonywam i bezpośrednio za pomocą nieskończenie małego

[1]) Rozprawy Wydz. mat. przyr. Akad. Umiej. w Krakowie, t. XXXIX.

przekształcenia i za pomocą przekształcenia skończonego. Ten drugi sposób postępowania, podany w ustępie 3. jest prostszy i możnaby na nim poprzestać, przechodząc, jak to czynię w tym ustępie, od przekształcenia skończonego do nieskończenie małego. Wydawało mi się wszakże interesującem wykonanie tych rachunków także bezpośrednio za pomocą nieskończenie małego przekształcenia, stosując wzór, o którym wyżej była mowa; te rachunki zamieszczone są w ustępie 2. W ustępie 4 omawiam jeszcze różne szczegóły, odnoszące się do wywodów poprzednich; w 5-ym zajmuję się drugiem z wymienionych zagadnień, t. j. stosując wzór wyżej wspomniany, wyznaczam całki r-krotne niezmienne przy wszystkich przemieszczeniach wzdłuż elementów liniowych układu równań Pfaffa; wreszcie w ostatnim ustępie podaję geometryczną interpretacyę poprzednich analitycznych wywodów.

---

1. Niechaj będzie suma:

$$S=\sum_1^n{}^{\sigma_1}\sum_1^n{}^{\sigma_2}\cdots\sum_1^n{}^{\sigma_r}A_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r}\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1}\frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r},$$

gdzie $A_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r}$ są funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które uważać będziemy jako funkcye parametrów $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Założymy, że $r<n$ oraz, że w równaniach, określających zmienne x_i jako funkcye parametrów $p_\varkappa$:

$$x_i=x_i(p_1,p_2,\ldots,p_r)\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

parametry te są istotne, t. j. że równania te określają w przestrzeni o n wymiarach pewną rozmaitość r-wymiarową. Z innej strony uważać będziemy nieskończenie małe przekształcenie przestrzeni n-wymiarowej:

$$Df=\sum_1^n{}^i u_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

i postaramy się wykonać działanie Df na sumie S, zakładając, że parametry $p_\varkappa$ nie podlegają przytem żadnej zmianie.

Na podstawie widocznego wzoru:

$$D\left(\frac{\partial x_{\sigma_\varkappa}}{\partial p_\varkappa}\right)=\sum_1^n{}^i\frac{\partial u_{\sigma_\varkappa}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial p_\varkappa}$$

otrzymujemy:

$$D\left(\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1}\frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r}\right)=\sum_1^n{}^i\left\{\frac{\partial x_i}{\partial p_1}\frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r}\frac{\partial u_{\sigma_1}}{\partial x_i}\right.$$

$$+\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1}\frac{\partial x_i}{\partial p_2}\frac{\partial x_{\sigma_3}}{\partial p_3}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r}\frac{\partial u_{\sigma_2}}{\partial x_i}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.+\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1}\frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_{r-1}}}{\partial p_{r-1}}\frac{\partial x_i}{\partial p_r}\frac{\partial u_{\sigma_r}}{\partial x_i}\right\}.$$

Ponieważ zaś sumę:

$$\sum_1^n{}^i\sum_1^n{}^{\sigma_1}\sum_1^n{}^{\sigma_2}\cdots\cdots\sum_1^n{}^{\sigma_r}A_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r}\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_{\varkappa-1}}}{\partial p_{\varkappa-1}}\frac{\partial x_i}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial x_{\sigma_{\varkappa+1}}}{\partial p_{\varkappa+1}}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r}\frac{\partial u_{\sigma_\varkappa}}{\partial x_i}$$

możemy przez przestawienie znaczków i i $\sigma_\varkappa$ napisać w postaci:

$$\sum_1^n{}^{\sigma_1}\sum_1^n{}^{\sigma_2}\cdots\cdots\sum_1^n{}^{\sigma_r}\left(\sum_1^n{}^i A_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{\varkappa-1},i,\sigma_{\varkappa+1},\ldots,\sigma_r}\frac{\partial u_i}{\partial x_{\sigma_\varkappa}}\right)\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1}\frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r},$$

otrzymujemy więc:

$$D(S)=\sum_1^n{}^{\sigma_1}\sum_1^n{}^{\sigma_2}\cdots\sum_1^n{}^{\sigma_r}\left\{D(A_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r})+\sum_1^n{}^i A_{i,\sigma_2,\ldots,\sigma_r}\frac{\partial u_i}{\partial x_{\sigma_1}}\right.$$

$$\left.+\sum_1^n{}^i A_{\sigma_1,i,\sigma_3,\ldots,\sigma_r}\frac{\partial u_i}{\partial x_{\sigma_2}}+\ldots+\sum_1^n{}^i A_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{r-1},i}\frac{\partial u_i}{\partial x_{\sigma_r}}\right\}\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1}\frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r},$$

wprowadzając zaś symbol:

$$\begin{aligned}W^{(i)}_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r}f=A_{i,\sigma_2,\ldots,\sigma_r}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_1}}+A_{\sigma_1,i,\sigma_3,\ldots,\sigma_r}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_2}}+\ldots\\ \ldots+A_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{r-1},i}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_r}},\end{aligned}\tag{1}$$

możemy rezultat ten przedstawić krócej w postaci:

$$D(S) = \sum_1^n{}^{\sigma_1} \sum_1^n{}^{\sigma_2} \ldots \sum_1^n{}^{\sigma_r} \Big\{ D(A_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r})$$

$$+ \sum_1^n W^{(i)}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r}(u_i) \Big\} \frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1} \frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r}.$$

Wzór ten zastosujemy do takich wyrażeń S, których spółczynniki mają własności następujące. Jeżeli którekolwiek dwa ze skaźników $\sigma_\varkappa$ są sobie równe, to:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r} = 0;$$

jeżeli zaś wszystkie skaźniki $\sigma_\varkappa$ są od siebie różne, to:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r} = \pm A_{s_1, s_2, \ldots, s_r},$$

gdzie $s_1, s_2, \ldots, s_r$ są te same liczby, co $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, ale napisane w tym porządku, że

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_r.$$

i gdzie należy brać znak $+$, jeżeli przemiana $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ otrzymuje się z przemiany $s_1, s_2, \ldots, s_r$ za pomocą parzystej liczby zmian dwu liter, a znak $-$, jeżeli przemiana ta otrzymuje się z przemiany $s_1, s_2, \ldots, s_r$ za pomocą nieparzystej liczby zmian dwu liter. Przy takich założeniach można sumę S napisać w postaci:

(2) $$S = \sum_1^n{}^{s_r} \sum_1^{s_r - 1}{}^{s_{r-1}} \ldots \sum_1^{s_2 - 1}{}^{s_1} A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} \frac{d(x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_r})}{d(p_1, p_2, \ldots, p_r)}$$

Przekonamy się, że sumę $D(S)$ można przy tych założeniach napisać w postaci analogicznej. W tym celu pokażemy, że:

$$W^{(i)}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}, \sigma_{\varkappa'}, \sigma_{\varkappa+1}, \ldots, \sigma_{\varkappa'-1}, \sigma_\varkappa, \sigma_{\varkappa'+1}, \ldots, \sigma_r} f = - W^{(i)}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}, \sigma_\varkappa, \sigma_{\varkappa+1}, \ldots, \sigma_{\varkappa'-1}, \sigma_{\varkappa'}, \sigma_{\varkappa'+1}, \ldots, \sigma_r} f.$$

Wyrażenia te składają się z wyrazów, które zawierają pochodne funkcyi f względem wszystkich zmiennych x_i prócz $x_{\sigma_\varkappa}$ i $x_{\sigma_{\varkappa'}}$ oraz z wyrazów, zawierających pochodne właśnie tych dwóch ostatnich zmiennych. Przy przestawieniu $\sigma_\varkappa$ na $\sigma_{\varkappa'}$ pierwsza kategorya wyrazów zmienia znak, bo taką własność według założenia mają spółczynniki A, które wszystkie w wyrazach pierwszej kategoryi zawierają zarówno skaźnik $\sigma_\varkappa$ jak i skaźnik $\sigma_{\varkappa'}$. Wyrazy drugiej kategoryi w wyrażeniu, stojącem po stronie lewej równości, którą mamy udowodnić, są:

$$A_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}, i, \sigma_{\varkappa+1}, \ldots, \sigma_{\varkappa'-1}, \sigma_\varkappa, \sigma_{\varkappa'+1}, \ldots, \sigma_r} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_{\varkappa'}}}$$

$$+ A_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}, \sigma_{\varkappa'}, \sigma_{\varkappa+1}, \ldots, \sigma_{\varkappa'-1}, i, \sigma_{\varkappa'+1}, \ldots, \sigma_r} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_\varkappa}}.$$

Jeżeli w wyrazach tych przestawimy $\sigma_\varkappa$ i $\sigma_{\varkappa'}$, to otrzymamy:

$$A_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}, i, \sigma_{\varkappa+1}, \ldots, \sigma_{\varkappa'-1}, \sigma_{\varkappa'}, \sigma_{\varkappa'+1}, \ldots, \sigma_r} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_\varkappa}}$$

$$+ A_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}, \sigma_\varkappa, \sigma_{\varkappa+1}, \ldots, \sigma_{\varkappa'-1}, i, \sigma_{\varkappa'+1}, \ldots, \sigma_r} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_{\varkappa'}}},$$

i widoczna, że wyrazy te różnią się od poprzednich tylko znakiem, bo spółczynniki przy tych samych pochodnych otrzymują się jedne z drugich przez przestawienie i oraz $\sigma_{\varkappa'}$, względnie i oraz $\sigma_\varkappa$. W ten sposób własność powyższa naszego symbolu jest udowodniona i widoczna zarazem, że każdy taki symbol jest tożsamościowo równy zeru, skoro tylko którekolwiek dwa znaczki dolne są sobie równe. Stąd wynika, że te symbole mają takie same własności, jak spółczynniki A, a więc przy powyższych założeniach otrzymujemy na $D(S)$ wzór następujący:

$$D(S) = \sum_1^n{}^{s_r} \sum_1^{s_r - 1}{}^{s_{r-1}} \ldots \sum_1^{s_2 - 1}{}^{s_1} \Big\{ D(A_{s_1, s_2, \ldots, s_r})$$

(3) $$+ \sum_1^n{}^{i} W^{(i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_i) \Big\} \frac{d(x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_r})}{d(p_1, p_2, \ldots, p_r)}.$$

Na podstawie tego wzoru można odrazu wypisać warunki niezmienności całki r-krotnej przy przekształceniu Df. Jeżeli mianowicie całkę taką napiszemy w postaci:

$$M = \iint \ldots \int \sum_1^n{}^{s_r} \sum_1^{s_r - 1}{}^{s_{r-1}} \ldots \sum_1^{s_2 - 1}{}^{s_1} A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} dx_{s_1} dx_{s_2} \ldots dx_{s_r},$$

to mieć będziemy:

$$D(M) = \iint \ldots \int \sum_1^n{}^{s_r} \sum_1^{s_r - 1}{}^{s_{r-1}} \ldots \sum_1^{s_2 - 1}{}^{s_1} \Big\{ D(A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}) + \sum_1^n{}^{i} W^{(i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_i) \Big\} dx_{s_1} dx_{s_2} \ldots dx_{s_r}$$

i warunki niezmienności będą widocznie:

(4) $$D(A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}) + \sum_1^n{}^{i} W^{(i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_i) = 0,$$

gdzie za $s_1, s_2, \ldots, s_r$ należy po kolei wziąć wszystkie kombinacye z $1, 2, \ldots, n$

po r. Określeniem takich warunków zajmuje się Th. de Donder w pracy „Étude sur les invariants intégraux“ [1], ale poprzestaje na ich wyznaczeniu w przypadkach szczególnych, postępując zresztą drogą od naszej odmienną.

2. Uważajmy teraz $n-r$ takich nieskończenie małych przekształceń:

$$(5)\qquad X_\varkappa f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{\varkappa i}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-r)$$

że nie wszystkie wyznaczniki stopnia $n-r$ macierzy:

$$\left|\begin{array}{cccc} \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \xi_{21}, & \xi_{22}, & \ldots, & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,1}, & \xi_{n-r,2}, & \ldots, & \xi_{n-r,n} \end{array}\right|$$

są tożsamościowo równe zeru, oraz oznaczmy przez Δ wyznacznik:

$$\left|\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,1}, & \xi_{n-r,2}, & \ldots, & \xi_{n-r,n} \end{array}\right|.$$

Jeżeli ilości dołączone do minora:

$$\frac{d\,(x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_r})}{d\,(p_1, p_2, \ldots, p_r)},$$

w wyznaczniku tym oznaczymy przez $A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}$, t. j. jeśli położymy:

[1] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom XV, 1901, str. 66—131, zobacz w szczególności str. 98—100.

$$(6)\qquad A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} = \pm \left|\begin{array}{cccc} \xi_{1t_1}, & \xi_{1t_2}, & \ldots, & \xi_{1t_{n-r}} \\ \xi_{2t_1}, & \xi_{2t_2}, & \ldots, & \xi_{2t_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,t_1}, & \xi_{n-r,t_2}, & \ldots, & \xi_{n-r,t_{n-r}} \end{array}\right|$$

gdzie liczby $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$ są wszystkie odmienne od $s_1, s_2, \ldots, s_r$ i czynią zadość nierównościom

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-r},$$

oraz gdzie należy brać znak $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy suma

$$(r+1) + (r+2) + \ldots + n + t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-r}$$

jest liczbą parzystą, czy też nieparzystą, to na mocy twierdzenia Laplace'a mieć będziemy:

$$\Delta = S.$$

A jeżeli stosunek symbolów $A_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r}$, gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ są którekolwiek z liczb $1, 2, \ldots, n$ do symbolów

$$A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} \quad (s_1 < s_2 < \ldots < s_r)$$

będzie taki, jak to określiliśmy w ustępie poprzedzającym, to $D(\Delta)$ można obliczyć na podstawie wzoru (4).

Jeżeli przez $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-r}$ oznaczymy funkcye dowolne zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to wzór:

$$(7)\qquad Xf = \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, \varrho_\varkappa\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, X_\varkappa f$$

będzie symbolem nieskończenie wielu nieskończenie małych przekształceń przestrzeni n-wymiarowej. Znajdziemy warunki niezmienności tego szeregu przekształceń przy przekształceniu Df. Warunki te można naprzód napisać w postaci:

$$(D, X_k) = \sum_1^{n-r} {}^\tau\, \omega_{\varkappa\tau}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, X_\tau f, \qquad (k=1,2,\ldots,n-r)$$

a gdy wykonamy działania, wskazane symbolem Poissona i zrównamy ze sobą spółczynniki, znajdujące się po obu stronach tej równości przy tychsamych pochodnych funkcyi f, to otrzymamy warunki tej niezmienności w postaci:

$$D(\xi_{ki}) = \sum_{1}^{n}{}^{l}\, \xi_{kl}\, \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \sum_{1}^{n-r}{}^{\tau}\, \omega_{\varkappa\tau}\, \xi_{\tau i}\,. \tag{8}$$

$$(k=1, 2, \ldots, n-r;\; i=1, 2, \ldots, n)$$

Prócz powyższych oznaczeń dogodnie będzie jeszcze wprowadzić oznaczenie:

$$B_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} = \begin{vmatrix} \xi_{1\lambda_1}, & \xi_{1\lambda_2}, & \ldots, & \xi_{1\lambda_{n-r}} \\ \xi_{2\lambda_1}, & \xi_{2\lambda_2}, & \ldots, & \xi_{2\lambda_{n-r}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-r,\lambda_1}, & \xi_{n-r,\lambda_2}, & \ldots, & \xi_{n-r,\lambda_{n-r}} \end{vmatrix},$$

Załóżmy, że warunki (8) są spełnione, i wykonajmy na tym wyznaczniku działanie Df. Otrzymamy dwie sumy wyznaczników, z których pierwszą, nie zawierającą funkcyj ω, można napisać w postaci:

$$\sum_{1}^{n-r}{}^{\mu} \begin{vmatrix} \xi_{1\lambda_1} & \ldots, & \xi_{1\lambda_{\mu-1}}, & \sum_{1}^{n}{}^{l}\, \xi_{1l}\, \frac{\partial u_{\lambda_\mu}}{\partial x_l} & , \xi_{1\lambda_{\mu+1}} & \ldots, & \xi_{1\lambda_{n-r}} \\ \xi_{2\lambda_1}, & \ldots, & \xi_{2\lambda_{\mu-1}}, & \sum_{1}^{n}{}^{l}\, \xi_{2l}\, \frac{\partial u_{\lambda_\mu}}{\partial x_l} & , \xi_{2\lambda_{\mu+1}}, & \ldots, & \xi_{2\lambda_{n-r}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-r,\lambda_1}, & \ldots, & \xi_{n-r,\lambda_{\mu-1}}, & \sum_{1}^{n}{}^{l}\, \xi_{n-r,l}\, \frac{\partial u_{\lambda_\mu}}{\partial x_l} & , \xi_{n-r,\lambda_{\mu+1}}, & \ldots, & \xi_{n-r,\lambda_{n-r}} \end{vmatrix},$$

albo krócej w postaci:

$$\sum_{1}^{n-r}{}^{\mu} \sum_{1}^{n}{}^{l}\, B_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-1}, l, \lambda_{\mu+1}, \ldots, \lambda_{n-r}}\, \frac{\partial u_{\lambda_\mu}}{\partial x_l}\,. \tag{9}$$

Druga suma jest postaci:

$$\sum_{1}^{n-r}{}^{\nu} \begin{vmatrix} \xi_{1,\lambda_1}, & \xi_{1,\lambda_2}, & \ldots, & \xi_{1\lambda_{n-r}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{\nu-1,\lambda_1}, & \xi_{\nu-1,\lambda_2}, & \ldots, & \xi_{\nu-1,\lambda_{n-r}} \\ \sum_{1}^{n-r}{}^{\tau}\, \omega_{\nu\tau}\, \xi_{\tau\lambda_1}, & \sum_{1}^{n-r}{}^{\tau}\, \omega_{\nu\tau}\, \xi_{\tau\lambda_2}, & \ldots, & \sum_{1}^{n-r}{}^{\tau}\, \omega_{\nu\tau}\, \xi_{\tau\lambda_{n-r}} \\ \xi_{\nu+1,\lambda_1}, & \xi_{\nu+1,\lambda_2}, & \ldots, & \xi_{\nu+1,\lambda_{n-r}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-r,\lambda_1}, & \xi_{n-r,\lambda_2}, & \ldots, & \xi_{n-r,\lambda_{n-r}} \end{vmatrix},$$

skąd widać, że w tej sumie odmienne od zera są tylko wyrazy, odpowiadające wartości $\tau=\nu$ i że suma ta sprowadza się wprost do wyrazu:

$$\tilde{\omega}\, B_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}}, \tag{10}$$

gdzie

$$\tilde{\omega} = \sum_{1}^{n-r}{}^{\nu}\, \omega_{\nu\nu}\,.$$

Z otrzymanego rezultatu na $D(B_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}})$ możemy skorzystać dla obliczenia $D(\Delta)$ w przypadku, gdy powyższy szereg nieskończenie małych przekształceń pozostaje bez zmiany przy Df. W tym celu zwrócimy najprzód uwagę na pewną własność naszych wielkości A i B. Oznaczając liczby $1, 2, \ldots, n$, napisane w jakimkolwiek porządku przez $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$, mamy widocznie:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r} = \pm B_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}}\,. \tag{11}$$

Łatwo dostrzedz, że jeżeli w tym wzorze jednę z liter σ przestawimy z jedną z liter λ, to będzie:

$$A_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}, \lambda_\mu, \sigma_{\varkappa+1}, \ldots, \sigma_r} = \mp B_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-1}, \sigma_\varkappa, \lambda_{\mu+1}, \ldots, \lambda_{n-r}}\,. \tag{12}$$

Można tu mieć wątpliwość tylko co do znaku. Wyznacznik Δ zawiera wyraz:

$$\pm B_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-1}, \lambda_\mu, \lambda_{\mu+1}, \ldots, \lambda_{n-r}}\, \frac{d\,(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_\varkappa}, x_{\sigma_\varkappa}, x_{\sigma_{\varkappa+1}}, \ldots, x_{\sigma_r})}{d\,(p_1, \ldots, p_{\varkappa-1}, p_\varkappa, p_{\varkappa+1}, \ldots, p_r)}\,.$$

Jeżeli w wyznaczniku Δ przestawimy kolumny $\sigma_\varkappa$ i λ_μ, to otrzymamy wyznacznik $-\Delta$, który zawierać będzie wyraz:

$$\pm B_{t_1,\dots,t_{\mu-1},\sigma_\varkappa,t_{\mu+1},\dots,t_{n-r}} \frac{d(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_{\varkappa-1}},x_{t_\mu},x_{\sigma_{\varkappa+1}},\dots,x_{\sigma_r})}{d(p_1,\dots,p_{\varkappa-1},p_\varkappa,p_{\varkappa+1},\dots,p_r)}\,.$$

W wyznaczniku zatem Δ ilość, dołączona do wyznacznika funkcyjnego tego wyrazu, będzie $\mp B_{t_1,\dots,t_{\mu-1},\sigma_\varkappa,t_{\mu+1},\dots,t_{n-r}}$, a to właśnie wyrażone jest wzorem (12). Widoczna przytem, że parzysta liczba takich przestawień nie zmienia znaku, a nieparzysta zmienia znak. Suma podwójna (9), biorąc w niej zamiast znaczków λ znaczki t, t. j.

$$\sum_1^{n-r}{}_\mu \sum_1^{n}{}_l B_{t_1,\dots,t_{\mu-1},l,t_{\mu+1},\dots,t_{n-r}} \frac{\partial u_{t_\mu}}{\partial x_l}$$

może być napisana w postaci:

$$\sum_1^{n-r}{}_\mu \sum_1^{r}{}_\varkappa B_{t_1,\dots,t_{\mu-1},s_\varkappa,t_{\mu+1},\dots,t_{n-r}} \frac{\partial u_{t_\mu}}{\partial s_\varkappa} + B_{t_1,t_2,\dots,t_{n-r}} \sum_1^{n-r}{}_\mu \frac{\partial u_{t_\mu}}{\partial x_{t_\mu}}\,,$$

albo korzystając z poprzedniej uwagi co do wielkości A i B, w postaci:

$$\mp \sum_1^{n-r}{}_\mu \sum_1^{n}{}_\varkappa A_{s_1,\dots,s_{\varkappa-1},t_\mu,s_{\varkappa+1},\dots,s_r} \frac{\partial u_{t_\mu}}{\partial s_\varkappa} \pm A_{s_1,s_2,\dots,s_r} \sum_1^{n-r}{}_\mu \frac{\partial u_{t_\mu}}{\partial x_{t_\mu}}\,.$$

To ostatnie wyrażenie można także inaczej napisać w postaci:

$$\mp \sum_1^{n}{}_i \sum_1^{r}{}_\varkappa A_{s_1,\dots,s_{\varkappa-1},i,s_{\varkappa+1},\dots,s_r} \frac{\partial u_i}{\partial x_{s_\varkappa}} \pm A_{s_1,s_2,\dots,s_r} \sum_1^{n}{}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,,$$

a korzystając z symbolu (1) i oznaczając dylatacyę objętości w przestrzeni n wymiarowej przez θ, t. j. kładąc:

$$\theta = \sum_1^{n}{}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

otrzymamy, że suma podwójna (9) równa się:

$$\mp \sum_1^{n}{}_i W^{(i)}_{s_1,s_2,\dots,s_r}(u_i) \pm \theta A_{s_1,s_2,\dots,s_r}\,. \tag{13}$$

Na mocy zatem wzorów (10), (11) i (13) otrzymujemy:

$$D(A_{s_1,s_2,\dots,s_r}) = (\theta + \tilde\omega) A_{s_1,s_2,\dots,s_r} - \sum_1^{n}{}_i W^{(i)}_{s_1,s_2,\dots,s_r}(u_i)\,, \tag{14}$$

a więc na podstawie wzoru (3) dochodzimy do rezultatu:

$$D(\Delta) = (\theta + \tilde\omega)\Delta\,. \tag{15}$$

Z niezmienności naszego szeregu nieskończenie małych przekształceń wyprowadziliśmy wzór (15), który określa zachowanie się przy Df wyznacznika Δ. Teraz założymy, że niezależnie od tego, jakiemi funkcyami parametrów $p_\varkappa$ są zmienne x_i, wyznacznik zachowuje się tak, jak to wskazuje wzór (15), t. j. że mamy wzory (14), które można także napisać:

$$D(A_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r}) = (\theta + \tilde\omega) A_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r} - \sum_1^{n}{}_i W^{(i)}_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r}(u_i)\,, \tag{16}$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ są liczby z szeregu $1, 2, \dots, n$, napisane w porządku zupełnie dowolnym i zapytamy, jak przy tem założeniu zachowuje się uważany szereg nieskończenie małych przekształceń. Aby odpowiedzieć na to zapytanie, zamiast nieskończenie małych przekształceń $X_\varkappa f$, wprowadzimy pewne inne nieskończenie małe przekształcenia $Y_\varkappa f$, wybrane w taki sposób, że szereg nieskończenie małych przekształceń:

$$\sum_1^{n-r}{}_\varkappa \varrho_\varkappa(x_1, x_2, \dots, x_n)\, Y_\varkappa f\,,$$

gdzie $\varrho_\varkappa$ oznaczają funkcye dowolne, jest tożsamościowy z szeregiem (7) Niechaj wyznacznik $B_{t_1,t_2,\dots,t_{n-r}}$ będzie odmienny od zera i niech będzie:

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{n-r}\,.$$

Układ równań:

$$X_\varkappa f = 0 \qquad (\varkappa=1,2,\dots,n-r)$$

jest równoważny z układem równań:

$$B_{t_1,t_2,\dots,t_{n-r}} \frac{\partial f}{\partial x_{t_\mu}} + \sum_1^{n}{}_\varkappa B_{t_1,\dots,t_{\mu-1},s_\varkappa,t_{\mu+1},\dots,t_{n-r}} \frac{\partial f}{\partial x_{s_\varkappa}} = 0,$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, n-r)$$

gdzie przez $s_\varkappa$ rozumiemy, jak poprzednio, liczby odmienne od liczb t_μ i takie, że

$$s_1 < s_2 < \dots < s_r\,.$$

Ten układ można, na mocy poprzednich uwag o wielkościach A i B, napisać w postaci:

$$A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} \frac{\partial f}{\partial x_{t_\mu}} - \sum_1^r {}_\varkappa \, A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r} \frac{\partial f}{\partial x_{s_\varkappa}} = 0,$$

lub w postaci:

$$A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} \frac{\partial f}{\partial x_{t_\mu}} - W^{(t_\mu)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r} f = 0,$$

i widoczna, że zamiast nieskończenie małych przekształceń $X_\varkappa f$ możemy wziąć:

$$Y_{t_\mu} f = \frac{\partial f}{\partial x_{t_\mu}} - \frac{W^{(t_\mu)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r} f}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n-r) \tag{17}$$

Zajmiemy się obliczeniem pewnych symbolów P o i s s o n a. Mamy widocznie:

$$\begin{aligned}(D, Y_{t_\mu}) = &-\sum_1^r {}_\varkappa \, D\left(\frac{A_{s_1, s_2, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r}}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}}\right) \frac{\partial f}{\partial x_{s_\varkappa}} \\ &-\sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{t_\mu}} - \frac{W^{(t_\mu)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_i)}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i}.\end{aligned} \tag{18}$$

Na mocy wzoru (14) otrzymujemy:

$$D\left(\frac{A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r}}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}}\right)$$

$$= \frac{1}{A^2_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} \sum_1^n {}_i \left\{ A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r} W^{(i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_i) - A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} W^{(i)}_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r}(u_i) \right.$$

Jeżeli teraz we wzorze (18) osobno zbierzemy wyrazy, zawierające pochodne $\frac{\partial f}{\partial x_{s_\varkappa}}$, osobno zaś wyrazy, zawierające pochodne $\frac{\partial f}{\partial x_{t_\mu}}$ i zamiast tych ostatnich podstawimy wartości, które wynikają ze wzorów (17), to otrzymamy:

$$\begin{aligned}(D, Y_{t_\mu}) = &\sum_1^{n-r} {}_\nu \left[\frac{W^{(t_\mu)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_{t_\nu})}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} - \frac{\partial u_{t_\nu}}{\partial x_{t_\mu}}\right] Y_{t_\nu} f \\ &+ \sum_1^r {}_\varkappa \left\{ \frac{1}{A^2_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} \sum_1^n {}_i \left[A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} W^{(i)}_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r}(u_i) \right.\right. \\ &\qquad \left. - A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r} W^{(i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_i) \right] \\ &+ \sum_1^{n-r} {}_\nu \frac{A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\nu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r}}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} \left[\frac{W^{(t_\mu)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_{t_\nu})}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} - \frac{\partial u_{t_\nu}}{\partial x_{t_\mu}}\right] \\ &\left. + \frac{W^{(t_\mu)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}(u_{s_\varkappa})}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} - \frac{\partial u_{s_\varkappa}}{\partial x_{t_\mu}} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_{s_\varkappa}}.\end{aligned} \tag{19}$$

Aby obliczyć wartość spółczynnika przy $\frac{\partial f}{\partial x_{s_\varkappa}}$, zauważmy, że symbole W zawierają pochodne funkcyj u_i tylko względem tych zmiennych x_λ, których skaźniki znajdują się pomiędzy dolnemi skaźnikami tych symbolów. Stąd wynika że z pochodnych względem x_{t_ν} figurować mogą tam tylko pochodne względem x_{t_μ}. Zbierając wyrazy zawierające pochodne wielkości u_i względem x_{t_μ} mamy

$$\sum_1^n {}_i \frac{A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, i, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r}}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} \frac{\partial u_i}{\partial x_{t_\mu}} - \sum_1^{n-r} {}_\nu \frac{A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\nu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r}}{A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}} \frac{\partial u_{t_\nu}}{\partial x_{t_\mu}} - \frac{\partial u_{s_\varkappa}}{\partial x_{t_\mu}},$$

ale te wyrazy na mocy własności wielkości A dają razem zero.

Dalej zauważymy, że z pomiędzy pochodnych $\frac{\partial u_{s_l}}{\partial x_{s_\lambda}}$ figurować mogą w uważanym spółczynniku, gdy $l \lesseqgtr \varkappa$, tylko pochodne $\frac{\partial u_{s_l}}{\partial x_{s_l}}$, ale łatwo dostrzedz, że wyrazy je zawierające się znoszą. Przy $l = \varkappa$ mamy pochodną $\frac{\partial u_{s_\varkappa}}{\partial x_{s_\lambda}}$ i zwrócimy naprzód uwagę na to, że gdy $\lambda > \varkappa$, spółczynniki tej pochodnej, po opuszczeniu wspólnego mianownika $A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}$ ma postać:

$$A_{s_1, s_2, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_{\lambda-1}, s_\varkappa, s_{\lambda+1}, \ldots, s_r} + A_{s_1, \ldots, s_{\lambda-1}, t_\mu, s_{\lambda+1}, \ldots, s_r},$$

wystarczy jednak w pierwszym wyrazie przestawić t_μ i $s_\varkappa$, żeby przekonać się, że suma tych wyrazów jest zerem i widoczna, że to samo stosuje się do przypadku $\lambda < \varkappa$. Także znoszą się wyrazy, zawierające pochodną $\dfrac{\partial u_{s_\varkappa}}{\partial x_{s_\varkappa}}$.

Pozostaje zatem obliczyć spółczynniki przy pochodnych $\dfrac{\partial u_{t_\nu}}{\partial x_{s_\lambda}}$. Naprzód, gdy $\lambda = \varkappa$, mamy po opuszczeniu wspólnego mianownika wyraz:

$$- A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r} A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\nu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r}$$

i taki sam wyraz ze znakiem $+$, a więc znowu zero. Gdy $\lambda > \varkappa$, mamy znowu po opuszczeniu wspólnego mianownika wyrazy:

(20)
$$\begin{aligned} & A_{s, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_{\lambda-1}, t_\nu, s_{\lambda+1}, \ldots, s_r} \cdot A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} \\ & - A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\mu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r} \cdot A_{s_1, \ldots, s_{\lambda-1}, t_\nu, s_{\lambda+1}, \ldots, s_r} \\ & + A_{s_1, \ldots, s_{\varkappa-1}, t_\nu, s_{\varkappa+1}, \ldots, s_r} \cdot A_{s_1 \ldots, s_{\lambda-1}, t_\mu, s_{\lambda+1}, \ldots, s_r}, \end{aligned}$$

które, na mocy związku znaków A ze znakami B można także napisać tak:

$$\begin{aligned} & B_{t_1, \ldots, t_{\mu-1}, s_\varkappa, t_{\mu+1}, \ldots, t_{\nu-1}, s_\lambda, t_{\nu+1}, \ldots, t_{n-r}} \cdot B_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}} \\ & - B_{t_1, \ldots, t_{\mu-1}, s_\varkappa, t_{\mu+1}, \ldots, t_{n-r}} \cdot B_{t_1, \ldots, t_{\nu-1}, s_\lambda, t_{\nu+1}, \ldots, t_{n-r}} \\ & + B_{t_1, \ldots, t_{\nu-1}, s_\varkappa, t_{\nu+1}, \ldots, t_{n-r}} \cdot B_{t_1, \ldots, t_{\mu-1}, s_\lambda, t_{\mu+1}, \ldots, t_{n-r}}. \end{aligned}$$

Wchodzące tu wyznaczniki są wyznacznikami stopnia $n-r$ macierzy:

$$\left| \begin{array}{llll} \xi_{1, t_1}, \ldots\ldots, & \xi_{1, t_{n-r}}, & \xi_{1, s_\varkappa}, & \xi_{1, s_\lambda} \\ \xi_{2, t_1}, \ldots\ldots, & \xi_{2, t_{n-r}}, & \xi_{2, s_\varkappa}, & \xi_{2, s_\lambda} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-1, r_1}, \ldots\ldots, & \xi_{n-r, t_{n-r}}, & \xi_{n-r, s_\varkappa}, & \xi_{n-r, s_\lambda} \end{array} \right|$$

i pomiędzy temi wyznacznikami istnieją pewne związki. Jeden z takich związków orzeka, że suma powyższa równa się zeru [1]. Widoczna, że to stosuje się także do przypadku, w którym $\lambda < \varkappa$. Wykazaliśmy zatem, że we wzorze (19) pozostają tylko wyrazy, zawarte w pierwszym wierszu.

Rachunkiem tym udowodniliśmy, że jeżeli niezależnie od tego, jakiemi funkcyami parametrów $p_\varkappa$ są funkcye x_i, ma miejsce wzór (15), to nasz szereg nieskończenie małych przekształceń Xf pozostaje bez zmiany przy przekształceniu Df.

[1]) Zob. E. Pascal. Die Determinanten. Leipzig 1900, str. 118–120.

Uważajmy teraz układ r równań Pfaffa:

(21)
$$\sum_1^n {}_i\, a_{\lambda i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r)$$

i załóżmy, że po pierwsze nie wszystkie wyznaczniki stopnia r macierzy:

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}, \ a_{12}, \ \ldots, \ a_{1n} \\ a_{21}, \ a_{22}, \ \ldots, \ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}, \ a_{r2}, \ \ldots \ a_{,rn} \end{array} \right|$$

są równe zeru i że, podrugie, wielkości a z poprzedniemi wielkościami ξ są związane równaniami:

$$\sum_1^n {}_i\, \xi_{\chi i}\, a_{\lambda i} = 0. \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-r;\ \lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

Wiadomo, że wówczas przekształcenia (5) są z układem (21) skojarzone niezmiennie (invariant verknüpft), t. j. że w szczególności każde przekształcenie, które nie zmienia szeregu Xf, nie zmienia także układu Pfaffa i nawzajem. Zatem wywód, który przeprowadziliśmy, wypowiada pewne twierdzenie o warunkach niezmienności układu równań Pfaffa przy nieskończenie małem przekształceniu Df.

Aby to twierdzenie wypowiedzieć w formie, która byłaby bezpośrednim uogólnieniem odpowiedniego twierdzenia z zakresu teoryi ruchu wirowego [1]), zauważmy, że oznaczając:

(22)
$$N = \int\!\!\int \ldots \int \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r,$$

gdzie całka jest rozpostarta na jakąkolwiek rozmaitość r-wymiarową, ze wzoru (15) otrzymujemy wzór:

(23)
$$D(N) = \int\!\!\int \ldots \int (\theta + \bar{\omega})\, \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r$$

i nawzajem z tego ostatniego wzoru wynika wzór (15).

[1]) Zob. rozprawy Wydz. mat. przyr. Akad Umiej. w Krakowie t. XXXIX, str. 241.

Doszliśmy zatem do twierdzenia następującego:

Jeżeli układ p równań Pfaffa (21) jest niezmiennym układem nieskończenie małego przekształcenia Df, to jakąkolwiek byłaby rozmaitość r-wymiarowa, wzdłuż której wykonywa się całkowanie w całce N, $D(N)$ wyraża się wzorem (23), gdzie $\bar{\omega}$ jest funkcyą zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i nawzajem: jeżeli dla każdej r-wymiarowej rozmaitości, wzdłuż której odbywa się całkowanie w całce N, $D(N)$ wyraża się wzorem (23), gdzie $\bar{\omega}$ jest jakąkolwiek funkcyą zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to układ równań Pfaffa (21) jest niezmiennym układem nieskończenie małego przekształcenia Df.

3. Dowód twierdzenia tego wymagał dość skomplikowanych rachunków. Zobaczymy, że prościej rezultat analogiczny można uzyskać dla przekształceń skończonych, a następnie przejść do przekształceń nieskończenie małych; w ten sposób twierdzenie nasze będzie udowodnione dwiema drogami.

Uważajmy poprzedni szereg nieskończenie małych przekształceń:

$$Xf = \sum_{1}^{n-r} {}_{\varkappa}\, \varrho_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, X_\varkappa f,$$

oraz szereg nieskończenie małych przekształceń:

$$Yf = \sum_{1}^{n-r} {}_{\varkappa}\, \sigma_\varkappa(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, Y_\varkappa f,$$

gdzie funkcye $\sigma_\varkappa$, podobnie jak poprzednio funkcye $\varrho_\varkappa$, są funkcyami dowolnemi, a symbole $Y_\varkappa f$ oznaczają $n-r$ takich nieskończenie małych przekształceń:

$$Y_\varkappa f = \sum_{1}^{n} {}_{i}\, \eta_{\varkappa i}(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n-r)$$

że nie wszystkie wyznaczniki stopnia $n-r$ macierzy:

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} \eta_{11}, & \eta_{12}, & \ldots, & \eta_{1n} \\ \eta_{21}, & \eta_{22}, & \ldots, & \eta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_{n-r,1}, & \eta_{n-r,2} & \ldots, & \eta_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

są tożsamościowo równe zeru. Niechaj będzie przekształcenie:

$$(25)\qquad y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

i wyznaczmy warunki konieczne i dostateczne, aby przekształcenie to przeprowadzało szeregi Xf i Yf jeden w drugi. Jeżeli w $X_\varkappa f$ zmienne x_i zastąpimy przez y_i na mocy równań (25), to będzie:

$$(26)\qquad X_\varkappa f = \sum_{1}^{n} {}_{i} \left(\sum_{1}^{n} {}_{l}\, \xi_{\varkappa l} \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \right) \frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

Muszą widocznie zachodzić równości:

$$(27)\qquad Y_\varkappa f = \sum_{1}^{n-r} {}_{\tau}\, w_{\varkappa\tau} X_\tau f. \qquad (\varkappa=1,2,\ldots n-r)$$

Wielkości $w_{\varkappa\tau}$ oznaczają tu takie funkcye bądź zmiennych x_i bądź też zmiennych y_i, że wyznacznik:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} w_{11}, & w_{12}, & \ldots, & w_{1,n-r} \\ w_{21}, & w_{22}, & \ldots, & w_{2,n-r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n-r,1}, & w_{n-r,2}, & \ldots, & w_{n-r,n-r} \end{vmatrix}$$

nie jest tożsamościowo równy zeru, bo gdyby tak było, to pomiędzy $Y_\varkappa f$ istniałby związek liniowy i jednorodny, co sprzeciwia się założeniu co do funkcyj $\eta_{\varkappa i}$. Podstawiając w równości (27) wyrażenia (26), otrzymujemy szukane warunki w postaci:

$$(28)\qquad \eta_{\varkappa i} = \sum_{1}^{n} {}_{l} \left(\sum_{1}^{n-r} {}_{\tau}\, w_{\varkappa\tau}\, \xi_{\tau l} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_l}. \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varkappa=1,2,\ldots,n-r \\ i=1,2,\ldots,n\end{smallmatrix}\right)$$

Niech dalej rozmaitość r-wymiarowa:

$$x_i = x_i(p_1, p_2, \ldots, p_r) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

przechodzi za pomocą przekształcenia (25) na rozmaitość:

$$y_i = y_i(p_1, p_2, \ldots, p_r) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Przez różniczkowanie otrzymujemy:

$$(29)\qquad \frac{\partial y_i}{\partial p_\lambda} = \sum_{1}^{n} {}_{l}\, \frac{\partial x_l}{\partial p_\lambda} \frac{\partial y_i}{\partial x_l}. \qquad \left(\begin{smallmatrix}i=1,2,\ldots,n \\ \lambda=1,2,\ldots,r\end{smallmatrix}\right)$$

Wprowadźmy na chwilę oznaczenie:

(30)
$$c_{\varkappa l} = \sum_{1}^{n-r} {}^{\tau}\, w_{\varkappa\tau}\, \xi_{\tau l} \,. \qquad \begin{pmatrix} \varkappa=1,2,\ldots,n-r \\ l=1,2,\ldots,n \end{pmatrix}$$

Wówczas można będzie wzory (28) napisać w postaci:

(31)
$$\eta_{\varkappa i} = \sum_{1}^{n} {}^{l}\, c_{\varkappa l} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \,. \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,n \\ \varkappa=1,2,\ldots,n-r \end{pmatrix}$$

Zajmiemy się przekształceniem wyznacznika:

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial p_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial y_2}{\partial p_r}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial p_r} \\ \eta_{11}, & \eta_{12}, & \ldots, & \eta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_{n-r,1}, & \eta_{n-r,2}, & \ldots, & \eta_{n-r,n} \end{vmatrix};$$

widoczna, że gdy wstawimy tu wartości (29) i (31), to otrzymamy iloczyn dwóch wyznaczników: wyznacznika funkcyjnego

$$F = \frac{d\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

i wyznacznika:

(32)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r,1}, & c_{n-r,2}, & \ldots, & c_{n-r,n} \end{vmatrix},$$

Ale ten wyznacznik jest także iloczynem dwóch wyznaczników. Ze wzoru (30) widać, że temi czynnikami są: wyznacznik Δ, określony w ustępie 2, i wyznacznik Ω. Istotnie mnożąc kolumnami wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,1}, & \xi_{n-r,2}, & \ldots, & \xi_{n-r,n} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & w_{11}, & \ldots, & w_{n-r,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & w_{1n-r}, & \ldots, & w_{n-r,n-r} \end{vmatrix}$$

otrzymujemy wyznacznik (32). Dochodzimy zatem do rezultatu, wyrażającego się wzorem:

(33)
$$\nabla = F\,\Omega\,\Delta\,.$$

Zajmiemy się teraz kwestyą odwrotną. Założymy, że wyznaczniki Δ i ∇ są proporcyonalne, z czynnikiem proporcyonalności, będącym funkcyą zmiennych x_i lub y_i i zapytamy, jaki jest w tym razie stosunek szeregów nieskończenie małych przekształceń Xf i Yf. Widoczna, że nasz czynnik proporcyonalności zawsze można napisać w formie $F\,.\,\Omega$.

Założenie nasze polega na tem, że wprowadzając w wyznacznik ∇ zamiast zmiennych x_i zmienne y_i na mocy przekształcenia (25), otrzymujemy równość (33), w której niezależnie od tego, jakiemi funkcyami parametrów $p_\varkappa$ są zmienne y_i lub, co na jedno wychodzi, zmienne x_i, Ω jest zupełnie określoną, odmienną od zera funkcyą zmiennych x_i lub y_i. Chcąc scharakteryzować wynikający stąd stosunek szeregów nieskończenie małych przekształceń Xf i Yf, traktować będziemy $\eta_{\varkappa i}$ jako niewiadome, a $\xi_{\varkappa i}$ jako dane i czyniące zadość warunkowi, że nie wszystkie wyznaczniki stopnia $n-r$ macierzy tych wielkości są równe zeru. Zamiast niewiadomych $\eta_{\varkappa i}$ możemy wprowadzić niewiadome $c_{\varkappa l}$ na podstawie równań:

$$\eta_{\varkappa i} = \sum_{1}^{n} {}^{l}\, c_{\varkappa l} \frac{\partial y_i}{\partial x_l}\,, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

bo wyznacznikiem tych n równań jest odmienny od zera wyznacznik F. Korzystając z równań (29), można będzie równość (33) napisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r,n}, & c_{n-r,2}, & \ldots, & c_{n-r,n} \end{vmatrix} = \Omega \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,1}, & \xi_{n-r,2}, & \ldots, & \xi_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

która ma zachodzić niezależnie od kształtu funkcyj x_i parametrów $p_\varkappa$. Otrzymujemy stąd związki pomiędzy minorami:

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} c_{1\sigma_1}, & c_{1\sigma_2}, & \ldots, & c_{1\sigma_{n-r}} \\ c_{2\sigma_1}, & c_{2\sigma_2}, & \ldots, & c_{2\sigma_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r,\sigma_1}, & c_{n-r,\sigma_2}, & \ldots, & c_{n-r,\sigma_{n-r}} \end{vmatrix} = \Omega \begin{vmatrix} \xi_{1\sigma_1}, & \xi_{1\sigma_2}, & \ldots, & \xi_{1\sigma_{n-r}} \\ \xi_{2\sigma_1}, & \xi_{2\sigma_2}, & \ldots, & \xi_{2\sigma_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,\sigma_1}, & \xi_{n-r,\sigma_2}, & \ldots, & \xi_{n-r,\sigma_{n-r}} \end{vmatrix}$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-r}$ oznaczają jakiekolwiek odmienne od siebie liczby z szeregu $1, 2, \ldots, n$. Stąd wnosimy, że wszystkie wyznaczniki stopnia $n-r+1$ macierzy:

$$\begin{vmatrix} c_{\varkappa 1}, & c_{\varkappa 2}, & \ldots, & c_{\varkappa n} \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,1}, & \xi_{n-r,2}, & \ldots, & \xi_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

są równe zeru. Istotnie wyznaczniki stopnia $n-r$ wielkości ξ są na mocy równości (34) proporcyonalne do odpowiednich wyznaczników stopnia $n-r$ wielkości c, więc rzeczone wyznaczniki stopnia $n-r+1$ są proporcyonalne do wyznaczników, których dwa wiersze są sobie równe, a więc są zerami. Stąd wynika, że pomiędzy wielkościami:

$$c_{\varkappa l}, \ \xi_{1l}, \ \xi_{2l}, \ \ldots, \ \xi_{n-r,l}$$

istnieje związek tożsamościowy, którego spółczynniki są niezależne od skaźnika l. Ten związek musi zawierać wielkość $c_{\varkappa l}$, bo nie wszystkie wyznaczniki stopnia $n-r$ wielkości ξ są równe zeru, a więc taki związek nie może zachodzić pomiędzy samemi wielkościami ξ. Otrzymujemy zatem wzory:

$$c_{\varkappa l} = \sum_{1}^{n-r} {}_{\tau}\, w_{\varkappa\tau}\, \xi_{\tau l}, \qquad \begin{pmatrix} \varkappa=1,2,\ldots,n-r \\ l=1,2,\ldots,n \end{pmatrix}$$

z których na mocy (34) wynika, że wyznacznik wielkości $w_{\varkappa\tau}$ równa się Ω, a więc jest odmienny od zera. Otrzymujemy zatem na $\eta_{\varkappa i}$ wartości:

$$(35) \qquad \eta_{\varkappa i} = \sum_{1}^{n} {}_{l} \left(\sum_{1}^{n-r} {}_{\tau}\, w_{\varkappa\tau}\, \xi_{\tau l} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_l}, \qquad \begin{pmatrix} \varkappa=1,2,\ldots,n-r \\ l=1,2,\ldots,n \end{pmatrix}$$

które są takie, że nie wszystkie wyznaczniki stopnia $n-r$ macierzy (24) są równe zeru. Istotnie, gdyby było inaczej, to mielibyśmy n związków tożsamościowych:

$$\sum_{1}^{n-r} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa\, \eta_{\varkappa i} = 0, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

które można napisać w postaci:

$$\sum_{1}^{n} {}_{l} \left(\sum_{1}^{n-r} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa c_{\varkappa l} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_l} = 0. \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

skąd, ponieważ wyznacznik F jest odmienny od zera, otrzymalibyśmy n związków tożsamościowych:

$$\sum_{1}^{n-r} {}_{\varkappa}\, a_\varkappa c_{\varkappa l} = 0; \qquad (l=1,2,\ldots,n)$$

związki takie nie mają miejsca, bo nie wszystkie wyznaczniki stopnia $n-r$ wielkości c są równe zeru. Zatem tę samą własność posiadają znalezione wielkości η. Wzory (35), wielkości te określające, są warunkami koniecznemi i dostatecznemi, aby szeregi nieskończenie małych przekształceń Xf i Yf przechodziły jeden na drugi przez przekształcenie (25) zatem to jest wynikiem naszego założenia o wyznacznikach Δ i ∇.

Z szeregiem nieskończenie małych przekształceń Xf skojarzony jest niezmiennie układ równań Pfaffa:

$$(36) \qquad \sum_{1}^{n} {}_{i}\, a_{\lambda i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i = 0. \qquad (\lambda=1,2,\ldots,r)$$

Jeżeli układ równań Pfaffa, odpowiadający w ten sposób szeregowi Yf, oznaczymy wzorami:

$$(37)\qquad \sum_{1}^{n}{}^{i}\ \beta_{\lambda i}(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_i = 0, \qquad (\lambda=1,2,\ldots r)$$

to przypominając jeszcze przejście od wyznacznika Δ do całki r-krotnej poprzedzającego ustępu **2**, będziemy mogli otrzymany rezultat wypowiedzieć w postaci następującego twierdzenia:

Jeżeli układy równań Pfaffa (36) i (37) przechodzą jeden na drugi za pomocą przekształcenia (25), to mamy równość całek:

$$\iint\ldots\int \nabla\, dp_1\, dp_2 \ldots\ldots dp_r = \iint\ldots\int F\,\Omega\,\Delta\, dp_1\, dp_2\ldots\ldots dp_r,$$

gdzie jedna z r-wymiarowych rozmaitości całkowania jest wybrana dowolnie, a druga jest rozmaitością, wynikającą z tamtej przez przekształcenie (25) i nawzajem: jeżeli przy każdym wyborze jednej z tych rozmaitości mamy powyższą równość całek, to układy równań Pfaffa (36) i (37) przechodzą jeden na drugi przez przekształcenie (25).

Twierdzenie to można wypowiedzieć jeszcze w innej formie. Uważajmy równanie:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \ldots & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots & \ldots, & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,1}, & \xi_{n-r,2}, & \ldots & \ldots, & \xi_{n-r,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Dla danego układu równań Pfaffa (36), spółczynniki $\xi_{\varkappa i}$ czynią zadość równaniom:

$$(38)\qquad \sum_{1}^{n}{}^{i}\ \xi_{\varkappa i}\,\alpha_{\lambda i} = 0 \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n-r;\ \lambda=1,2,\ldots,r)$$

i jeżeli przez $\xi_{\varkappa i}$ oznaczymy pewien szczególny układ $\xi_{\varkappa i}$, a przez $\bar\xi_{\varkappa i}$ układ ogólny, to mieć będziemy związki:

$$(39)\qquad \bar\xi_{li} = \sum_{1}^{n-r}{}^{\varkappa}\ \tau_{l\varkappa}\,\xi_{\varkappa i} \qquad (l=1,2,\ldots,n-r;\ i=1,2,\ldots,n)$$

gdzie $\tau_{l\varkappa}$ są dowolne funkcye, czyniące zadość tylko warunkowi, żeby wyznacznik U tych funkcyj był odmienny od zera. Na mocy twierdzenia o mnożeniu wyznaczników mamy:

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} \bar\xi_{1,\sigma_1}, & \bar\xi_{1,\sigma_2}, & \ldots, & \bar\xi_{1\sigma_{n-r}} \\ \bar\xi_{2,\sigma_1}, & \bar\xi_{2,\sigma_2}, & \ldots, & \bar\xi_{2\sigma_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar\xi_{n-r,\sigma_1}, & \bar\xi_{n-r,\sigma_2}, & \ldots & \bar\xi_{n-r,\sigma_{n-r}} \end{vmatrix} = U \begin{vmatrix} \xi_{1\sigma_1}, & \xi_{1\sigma_2}, & \ldots, & \xi_{1\sigma_{n-r}} \\ \xi_{2\sigma_1}, & \xi_{2\sigma_2}, & \ldots, & \xi_{2\sigma_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r,\sigma_1}, & \xi_{n-r,\sigma_2}, & \ldots, & \xi_{n-r,\sigma_{n-r}} \end{vmatrix},$$

Stąd wynika, że spółczynniki równania $\Delta = 0$ mają dla danego układu równań Pfaffa wartości zupełnie określone, t. j. że danemu układowi równań Pfaffa odpowiada jedno i tylko jedno równanie $\Delta = 0$. Ale nawzajem łatwo dostrzedz, że określonemu równaniu $\Delta = 0$ odpowiada jeden tylko układ równań Pfaffa. Istotnie, jeżeli przez $\bar\xi_{\varkappa i}$ rozumielibyśmy teraz wielkości odpowiadające innemu układowi, to musiałaby zachodzić proporcyonalność wskazana wzorami (40), a z niej rozumując zupełnie tak samo, jak poprzednio co do wielkości c wnieślibyśmy, że muszą zachodzić związki (39), które świadczą, że równania:

$$\sum_{1}^{n}{}^{i}\ \bar\xi_{li}\,\alpha_{\lambda i} = 0, \qquad (l=1,2,\ldots,n-r;\ \lambda=1.2\ldots,r)$$

są równoważne z równaniami (38), t. j. że układ Pfaffa, odpowiadający wielkościom $\bar\xi_{\varkappa i}$ jest równoważny z układem, odpowiadającym wielkościom $\xi_{\varkappa i}$. Na mocy tych uwag i poprzednich wywodów możemy wypowiedzieć twierdzenie:

Równanie $\Delta = 0$ jest z układem równań Pfaffa skojarzone niezmiennie, t. j. każdemu układowi Pfaffa odpowiada jedno równanie $\Delta = 0$, każdemu takiemu równaniu jeden układ Pfaffa i przez jakąkolwiek zamianę zmiennych x_i na y_i równanie $\Delta = 0$ i układ Pfaffa przechodzą w równanie $\nabla = 0$ i układ Pfaffa sobie odpowiadające.

Należy zauważyć, że nasze wywody można jeszcze uprościć. Pokazaliśmy, że jeżeli pewien układ Pfaffa przechodzi za pomocą pewnego punktowego przekształcenia w inny układ Pfaffa, to równanie $\Delta = 0$, odpowiadające pierwszemu układowi, przechodzi, za pomocą tego samego przekształcenia, w $\nabla=0$, odpowiadające drugiemu układowi i nawzajem, jeżeli równania te przechodzą jedno w drugie, to i odpowiadające im układy przechodzą jeden w drugi. Wystarczy jednak udowodnić jedno z tych twierdzeń, a drugie wyniknie bez żadnych dodatkowych rachunków. Istotnie przypuśćmy np. żeśmy z przekształcalności układów wyprowadzili, że $\Delta=0$ przechodzi w $\nabla=0$. Załóżmy następnie, że na mocy pewnego przekształcenia $\Delta=0$ przechodzi $\nabla=0$ i wykonajmy to przekształcenie na układzie Pfaffa, odpowiadającym równaniu $\Delta=0$. Przypuśćmy, że otrzymany układ Pfaffa nie odpowiada równaniu $\nabla=0$, tylko jakiemuś innemu równaniu $\nabla'=0$; wówczas, na mocy udowodnionej własności musielibyśmy wnieść, że Δ przechodzi nie w $\nabla=0$, a w $\nabla'=0$, co nie zgadza się z naszem założeniem. Więc, gdy $\Delta=0$ przechodzi w $\nabla=0$, to i odpowiadające im układy Pfaffa przechodzą jeden w drugi. Taksamo gdybyśmy naprzód udowodnili, że z przekształcalności $\Delta=0$ w $\nabla=0$ wynika przekształcalność odpowiednich układów Pfaffa, to stąd już możnaby wnosić o istnieniu odwrotnego twierdzenia.

Od tych rozważań można teraz przejść do rezultatów, uzyskanych w ustępie 2. W tym celu należy założyć, że przekształcenie (25) jest nieskończenie małem przekształceniem, t. j. ma formę:

(41) $$y_i = x_i + u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\delta t \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

i że funkcye $\eta_{\varkappa i}$ taksamo zależą od zmiennych y_i jak odpowiednie funkcye $\xi_{\varkappa i}$ od zmiennych x_i. Wtedy ze wzorów (28) możemy uzyskać warunki niezmienności szeregu nieskończenie małych przekształceń Xf przy nieskończenie małem przekształceniu Df, jeżeli dowolne funkcye $w_{\varkappa\tau}$ napiszemy w postaci:

(42) $$w_{\varkappa\tau} = \varepsilon_{\varkappa\tau} + \omega_{\varkappa\tau}\,\delta t \qquad (\varkappa,\tau=1,2,\ldots,n-r)$$

i następnie zwrócimy uwagę na to, że gdy $\delta t=0$, $\eta_{\varkappa i}$ musi być równe $\xi_{\varkappa i}$. Podstawiając naprzód we wzorach (28) wartości (41) i (42) i opuszczając wielkości rzędu drugiego względem δt otrzymujemy:

$$\xi_{\varkappa i} + D(\xi_{\varkappa i})\,\delta t = \sum_1^{n-r}{}_\tau\, \varepsilon_{\varkappa\tau}\,\xi_{\tau i} + \left\{ \sum_1^{n}{}_l \sum_1^{n-r}{}_\tau\, \varepsilon_{\varkappa\tau}\,\xi_{\tau l}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \sum_1^{n-r}{}_\tau\, \omega_{\varkappa\tau}\,\xi_{\tau i} \right\}\delta t,$$

a kładąc tu $\delta t=0$, dochodzimy do warunków dla $\varepsilon_{\varkappa\tau}$:

$$\xi_{\varkappa i} = \sum_1^{n-r}{}_\tau\, \varepsilon_{\varkappa\tau}\,\xi_{\tau i},$$

które możemy napisać w formie:

$$\varepsilon_{\varkappa 1}\,\xi_{1i} + \ldots + \varepsilon_{\varkappa,\varkappa-1}\,\xi_{\varkappa-1,i} + (\varepsilon_{\varkappa\varkappa}-1)\,\xi_{\varkappa i} + \varepsilon_{\varkappa,\varkappa+1}\,\xi_{\varkappa+1,i} + \ldots + \varepsilon_{\varkappa,n-r}\,\xi_{n-r,i} = 0.$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

Mamy zatem n równań dla $n-r$ niewiadomych:

$$\varepsilon_{\varkappa 1}, \quad \ldots, \varepsilon_{\varkappa,\varkappa-1}, \ \varepsilon_{\varkappa\varkappa}-1, \ \varepsilon_{\varkappa,\varkappa+1}, \ \ldots, \ \varepsilon_{\varkappa,n-r},$$

a ponieważ według założenia nie wszystkie wyznaczniki stopnia $n-r$ macierzy tych równań są równe zeru, więc wszystkie te niewiadome są równe zeru. Zatem we wzorach (42) $\varepsilon_{\varkappa\tau}$ jest równe zeru, gdy skaźniki $\varkappa$ i τ są od siebie odmienne, jest zaś równe jedności gdy $\varkappa$ i τ są sobie równe, a stąd wynika, że wzory (28) dają w naszym przypadku warunki:

$$D(\xi_{\varkappa i}) = \sum_1^{n}{}_l\, \xi_{\varkappa l}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \sum_1^{n-r}{}_\tau\, \omega_{\varkappa\tau}\,\xi_{\tau i},$$
$$(\varkappa=1,2,\ldots,n-r;\ i=1,2,\ldots,n)$$

t. j. otrzymane w poprzednim ustępie warunki (8). Dalej łatwo dostrzedz, że opuszczając wielkości wyższych rzędów po nad pierwszy nieskończenie małej δt, mamy:

$$F = 1 + \sum_1^{n}{}_i\, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\delta t = 1 + \theta\,\delta t,$$

$$\Omega = 1 + \sum_1^{n-r}{}_\lambda\, \omega_{\lambda\lambda}\,\delta t = 1 + \bar{\omega}\,\delta t,$$

t. j. że ze wzoru (33) otrzymujemy:

$$\nabla = (1+\theta\,\delta t)(1+\bar{\omega}\,\delta t)\,\Delta,$$

skąd wynika wzór (15) poprzedniego ustępu:

$$D(\Delta) = (\theta+\bar{\omega})\,\Delta.$$

4. W ustępie poprzedzającym z faktu, że układy równań Pfaffa (36) i (37) przechodzą jeden w drugi przez przekształcenie (25) wyprowadziliśmy wzór:

(43) $$\nabla = F\,\Omega\,\Delta$$

i nawzajem z zachodzenia tego związku wnosiliśmy o powyższej przekształcalności dwóch układów równań Pfaffa. Równość (43) jest równoważną równości pewnych całek r-krotnych i zapytamy teraz, jakim warunkom powinny czynić zadość funkcya μ zmiennych x_i i funkcya ν zmiennych y_i, ażeby zachodziła równość całek:

$$\int\int\dots\int \nu\nabla\, dp_1\, dp_2 \dots dp_r = \int\int\dots\int \mu\Delta\, dp_1\, dp_2\dots dp_r. \tag{44}$$

Lewą i prawą stronę równości (43) można pomnożyć odpowiednio tylko przez takie funkcye: b zmiennych y_i i a zmiennych x_i, które są równe sobie na mocy przekształcenia (25). Zakładając, że te czynniki mają tę własność, wnosimy, że μ i ν muszą czynić zadość warunkowi:

$$b\mu = aF\Omega\nu.$$

Stąd widzimy, że warunkiem, aby w równości (44) czynniki μ i ν były sobie równe na mocy przekształcenia (25) jest związek:

$$F\Omega = 1. \tag{45}$$

Można powiedzieć, że wtedy całka r-krotna ma wobec przekształcenia (25) charakter niezmienny i widoczna, że przy zachowaniu tego warunku wszystkie równości postaci (44) będą wykazywały ten charakter niezmienny. Jednakowoż warunek (45) jest koniecznym dla takiej niezmienności tylko wtedy, gdy wielkości ξ_{xi} i η_{xi} wchodzące w wyznaczniki Δ i ∇ uważamy jako wielkości zupełnie określone. Wiemy wszakże, że mając dane układy równań Pfaffa w wyborze tych wielkości istnieje pewna dowolność. Jeżeli zamiast ξ_{xi} i η_{xi} wprowadzimy inne, które oznaczymy przez $\bar\xi_{xi}$ i $\bar\eta_{xi}$, a wytworzone za ich pomocą wyznaczniki $\bar\Delta$ i $\bar\nabla$, to na mocy związków (40) poprzedniego ustępu wniesiemy, że:

$$\bar\Delta = U\Delta\,, \quad \bar\nabla = V\nabla\,,$$

gdzie U jest funkcyą zmiennych x_i, a V funkcyą zmiennych y_i, przytem rzecz jasna, że można zawsze tak wybrać $\bar\xi_{xi}$ i $\bar\eta_{xi}$, aby U i V były funkcyami obranemi dowolnie. Stąd wynika, że za pomocą tego wyboru można osiągnąć, że w równości całek:

$$\int\int\dots\int \bar\nu\bar\nabla\, dp_1\, dp_2\dots dp_r = \int\dots\int \bar\mu\bar\Delta\, dp_1\, dp_2\dots dp_r$$

$\bar\mu$ i $\bar\nu$ są funkcye obrane dowolnie. W szczególności można te funkcye zawsze

obrać tak, że jedna będzie przekształceniem drugiej, albo jeszcze prościej, biorąc te funkcye obie równe jedności. Zatem powyższa równość całek przez odpowiedni wybór wielkości $\bar\xi_{xi}$ i $\bar\eta_{xi}$ może być sprowadzona do prostej formy niezmiennej:

$$\int\int\dots\int \bar\nabla\, dp_1\, dp_2\dots dp_r = \int\int\dots\int \bar\Delta\, dp_1\, dp_2\dots dp_r.$$

Widoczna, że jakąkolwiek byłaby forma tej równości, zawsze wynika z niej powyższa przekształcalność układów Pfaffa.

Zwrócimy uwagę na przypadek szczególny $n=3$, $p=2$, t. j. na przypadek, w którym układy (36) i (37) określają dwie kongruencye w przestrzeni o trzech wymiarach. Układy te można napisać w postaci:

$$\frac{dx_1}{\xi_{11}} = \frac{dx_2}{\xi_{12}} = \frac{dx_3}{\xi_{13}} \quad \text{i} \quad \frac{dy_1}{\eta_{11}} = \frac{dy_2}{\eta_{12}} = \frac{dy_3}{\eta_{13}}$$

i przyjąć:

$$X_1 f = \xi_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{12}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_{13}\frac{\partial f}{\partial x_3} \quad \text{i} \quad Y_1 f = \eta_{11}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{12}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{13}\frac{\partial f}{\partial y_3},$$

więc szeregi Xf i Yf nieskończenie małych przekształceń będą:

$$Xf = \varrho_1 X_1 f\,, \quad Yf = \sigma_1 Y_1 f,$$

gdzie ϱ_1 i σ_1 są dowolne funkcye odpowiednio zmiennych x_i i y_i. W tym wypadku warunki (35) przekształcalności jednego układu równań zwyczajnych na drugi są:

$$\eta_{11} = w_{11}\left(\xi_{11}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \xi_{12}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \xi_{13}\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\right),$$

$$\eta_{12} = w_{11}\left(\xi_{11}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \xi_{12}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \xi_{13}\frac{\partial y_2}{\partial x_3}\right),$$

$$\eta_{13} = w_{11}\left(\xi_{11}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} + \xi_{12}\frac{\partial y_3}{\partial x_2} + \xi_{13}\frac{\partial y_3}{\partial x_3}\right),$$

i dochodzimy do równoważnej tej przekształcalności i tym warunkom równości całek:

$$\int\int(\eta_{11}\, dy_2\, dy_3 + \eta_{12}\, dy_3\, dy_1 + \eta_{13}\, dy_1\, dy_2)$$
$$= \int\int F w_{11}(\xi_{11}\, dx_2\, dx_3 + \xi_{12}\, dx_3\, dx_1 + \xi_{13}\, dx_1\, dx_2)\,,$$

która wogóle nie wykazuje charakteru niezmienności całki podwójnej. Można jednak elementy pod całkami pomnożyć przez odpowiednie czynniki i wprowadzając $\xi_{1\varkappa}$ i $\overline{\eta}_{1\varkappa}$, otrzymać równość:

$$(46)\qquad \iint (\overline{\eta}_{11}\, dy_2\, dy_3 + \overline{\eta}_{12}\, dy_3\, dy_1 + \overline{\eta}_{13}\, dy_1\, dy_2)$$
$$= \iint (\xi_{11}\, dx_2\, dx_3 + \xi_{12}\, dx_3\, dx_1 + \xi_{13}\, dx_1\, dx_2),$$

a całka tu figurująca będzie już miała, w naszem rozumieniu rzeczy, charakter niezmienny.

Ten przypadek szczególny był przedmiotem jednej z prac P. A p p e l l a [1], który między innemi wykazuje, przy warunkach przekształcalności rzeczonych kongruencyj, taką niezmienność powyższych całek podwójnych. Należy jednak zauważyć, że P. A p p e l dochodzi tylko do równości (46) takich całek podwójnych, których funkcye $\xi_{1\varkappa}$ i $\overline{\eta}_{1\varkappa}$ spełniają warunki:

$$\frac{\partial\overline{\eta}_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial\overline{\eta}_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial\overline{\eta}_{13}}{\partial y_3} = 0, \qquad \frac{\partial\xi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_{13}}{\partial x_3} = 0,$$

(z których jeden jest wynikiem drugiego), gdy tymczasem równość ta, jak widzimy, jest tylko zawarunkowana przekształcalnością kongruencyj. P. A p p e l l w wywodzie swoim udowadnia naprzód równość pewnych całek pojedyńczych, które potem dopiero przekształca na całki podwójne, do których można stosować twierdzenie S t o k e s a. P. A p p e l l zatem nie wypowiada twierdzenia o równoważności rowności (46) i warunków przekształcalności rzeczonych kongruencyj.

Zwróćmy się teraz do przekształceń nieskończenie małych. Gdy mamy jeden układ P f a f f a i nieskończenie małe przekształcenie Df, to warunek konieczny i dostateczny niezmienności tego układu P f a f f a przy nieskończenie małem przekształceniu można, jak widzieliśmy, napisać w postaci:

$$(47)\qquad D(\Delta) = (\theta + \overline{\omega})\,\Delta,$$

lub oznaczając:

$$N = \iint \ldots \int \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r,$$

w postaci:

$$D(N) = \iint \ldots \int (\theta + \overline{\omega})\,\Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r,$$

[1] Journal de mathématiques, V série, tome 5, 1899.

niezależnie od r wymiarowej rozmaitości, na którą rozpościerają się te całki r-krotne. Zapytujemy teraz, w jakich warunkach niezależnie od wyboru tej rozmaitości mamy dla

$$(48)\qquad \begin{aligned} N' &= \iint \ldots \int \mu\,\Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r, \\ D(N') &= \iint \ldots \int \varrho\,\Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r, \end{aligned}$$

gdzie μ i ϱ oznaczają funkcye zmiennych x_i. To pociąga za sobą równość:

$$D(\mu\Delta) = \varrho\,\Delta,$$

skąd wynika:

$$\mu\, D(\Delta) = (\varrho - D(\mu))\,\Delta.$$

Widzimy zatem, że dla istnienia związku, wyrażającego się równościami (48) musi układ P f a f f a być układem niezmiennym. Nadto na mocy związku (47) mamy warunek:

$$\varrho = (\theta + \overline{\omega})\,\mu + D(\mu).$$

Zatem, jeżeli całka N' ma być całką niezmienną nieskończenie małego przekształcenia Df, albo jeżeli $\mu\Delta$ ma być jego niezmiennikiem różniczkowym, to musi być:

$$(49)\qquad D(\mu) + (\theta + \overline{\omega})\,\mu = 0.$$

Należy przytem niezmienność tę odróżniać od niezmienności, o której na początku tego ustępu była mowa przy omawianiu przekształceń skończonych. Tam przekształcenie każdej całki uważanej kongruencyi można było wyrazić w niezmiennej formie, zaś przy obecnem pojmowaniu niezmienności nie można jej uzyskać zmianą formy.

Widoczna, że najogólniejsza całka niezmienna ma postać:

$$\iint \ldots \int \overline{\mu}\, \Phi(I_1, I_2, \ldots, I_{n-1})\,\Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r$$

gdzie $\overline{\mu}$ jest jakiekolwiek rozwiązanie równania (49), Φ funkcya dowolna, a $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ niezależne od siebie niezmienniki przekształcenia Df.

Zwrócimy wreszcie uwagę na to, że każdą całkę, o jakich tu była mowa, można przez odpowiedni wybór przekształceń $X_\varkappa f$ doprowadzić do formy:

$$\iint \ldots \int \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r,$$

która, jak zobaczymy później, ma proste znaczenie geometryczne.

Illustracyą tych wywodów dla przekształceń nieskończenie małych, a więc grup jednoczęściowych, mogą być rozważania, przeprowadzone w cytowanym wyżej artykule: „O zachowaniu ruchu wirowego". Rachunki tam wykonane są szczególnym przypadkiem obecnych dla $n=3$, $r=2$.

5. We wspomnianym artykule zastanawialiśmy się nad tem, jakie całki podwójne są całkami niezmiennemi przy wszystkich przemieszczeniach wzdłuż krzywych kongruencyi. Uogólniając to zapytanie do układu równań Pfaffa, trzeba będzie zapytać się, jakie całki r-krotne:

$$\int\int\ldots\int \overline{S}\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r \tag{50}$$

są całkami niezmiennemi wszystkich przemieszczeń wzdłuż liniowych elementów, spełniających równania Pfaffa, t. j. wszystkich nieskończenie małych przekształceń szeregu Xf. $\overline{S}$ ma tu postać wskazaną wzorem (2), t. j. mamy:

$$\overline{S}=\sum_1^n{}_{s_r}\sum_1^{s_r-1}{}_{s_{r-1}}\ldots\sum_1^{s_2-1}{}_{s_1}\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\frac{d(x_{s_1},x_{s_2},\ldots,x_{s_r})}{d(p_1,p_2,\ldots p_r)},$$

gdzie przez $\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}$ oznaczymy niewiadome spółczynniki. Wygodnie umówić się, że wyrażenia te przez nieparzystą liczbę przemieszczeń liter $s_1, s_2, \ldots, s_r$ przechodzą w wielkości o tej samej wartości absolutnej, a odmiennym znaku, a przez parzystą zupełnie się nie zmieniają, oraz że takie wyrażenia są zerami, gdy którekolwiek z liczb $s_1, s_2, \ldots, s_r$ są sobie równe. Widoczna, że to w niczem nie ogranicza naszego zadania, bo w sumie $\overline{S}$ każda kombinacya z liczb $1, 2, \ldots, n$ po r występuje tylko raz jeden. Warunki niezmienności całki (50) można odczytać wprost ze wzorów (4). Jeżeli mianowicie przekształcenie Xf napiszemy w formie:

$$Xf=\sum_1^{n-r}{}_{\varkappa}\,\varrho_\varkappa X_\varkappa f=\sum_1^n{}_i\left(\sum_1^{n-r}{}_\varkappa\,\varrho_\varkappa\,\xi_{\varkappa i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{51}$$

i symbolem $\overline{W}^{(i)}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}f$ oznaczać będziemy nieskończenie małe przekształcenie postaci (1), gdzie zamiast spółczynników A wstawione są $\overline{A}$, to warunki nasze będą:

$$\sum_{1'}^{n-r}{}_\varkappa\,\varrho_\varkappa X_\varkappa(\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r})+\sum_1^n{}_i\,\overline{W}^{(i)}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\left(\sum_1^{n-r}{}_\varkappa\,\varrho_\varkappa\,\xi_{\varkappa i}\right)=0. \tag{51}$$

Te równania warunkowe należy brać dla $s_1, s_2, \ldots, s_r$ równych wszystkim

możliwym kombinacyom z n liczb: $1, 2, \ldots, n$ po r. Stosownie do umowy co do własności spółczynników $\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}$, nie odegrywa tu żadnej roli porządek liczb, należących do jednej i tej samej kombinacyi r liczb, bo zmiana porządku tych liczb pozostawia bez zmiany równanie (51). Warunki (51) można cokolwiek inaczej napisać w postaci:

$$\sum_1^{n-r}{}_\varkappa\left[\left\{X_\varkappa\left(\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\right)+\sum_1^n{}_i\,\overline{W}^{(i)}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}(\xi_{\varkappa i})\right\}\varrho_\varkappa+\sum_1^n{}_i\,\xi_{\varkappa i}\,\overline{W}^{(i)}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}(\varrho_\varkappa)\right]=0. \tag{52}$$

Muszą one być spełnione, jakiemikolwiek byłyby funkcye $\varrho_\varkappa$, t.j. spółczynniki przy $\varrho_\varkappa$ i ich pochodnych muszą wszystkie być równe zeru.

Zwróćmy się najprzód do spółczynników pochodnych tych funkcyj. Przypominając znaczenie symbolu $\overline{W}^{(i)}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}f$, otrzymamy r układów równań następujących:

$$\sum_1^n{}_i\,\overline{A}_{i,s_2,\ldots,s_r}\,\xi_{\varkappa i}=0, \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n-r),$$

$$\sum_1^n{}_i\,\overline{A}_{s_1,i,s_3,\ldots,s_r}\,\xi_{\varkappa i}=0, \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n-r),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_1^n{}_i\,\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_{r-1},i}\,\xi_{\varkappa i}=0, \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n-r),$$

które na mocy własności niewiadomych spółczynników $\overline{A}$ można napisać w formie:

$$\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\xi_{\varkappa s_1}+\overline{A}_{t_1,s_2,\ldots,s_r}\xi_{\varkappa t_1}+\ldots+\overline{A}_{t_{n-r},s_2,\ldots,s_r}\,\xi_{\varkappa t_{n-r}}=0, \qquad (s_1)$$

$$\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\xi_{\varkappa s_2}+\overline{A}_{s_1,t_1,s_3,\ldots,s_r}\xi_{\varkappa t_1}+\ldots+\overline{A}_{s_1,t_{n-r},s_3,\ldots,s_r}\,\xi_{\varkappa t_{n-r}}=0, \qquad (s_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\xi_{\varkappa s_r}+\overline{A}_{s_1,\ldots,s_{r-1},t_1}\xi_{\varkappa t_1}+\ldots+\overline{A}_{s_1,\ldots,s_{r-1},t_{n-r}}\,\xi_{\varkappa t_{n-r}}=0, \qquad (s_r)$$

gdzie $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$ są liczby wszystkie od siebie różne i odmienne od $s_1, s_2, \ldots, s_r$. Załóżmy, że liczby $s_1, s_2, \ldots, s_r$ napisaliśmy w porządku wzrastającym i że liczby $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$ także są napisane w porządku wzrastającym, oraz że wybraliśmy taką kombinacyę $s_1, s_2, \ldots s_r$, iż wyznacznik $B_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-r}}$ jest odmienny od zera. Przy tem założeniu widoczna, że układ $n-r$ równań (s_1) daje na niewiadome $\overline{A}$ wartości z jednym czynnikiem dowolnym. Uważając zaś równy zeru wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \xi_{\varkappa s_1} & , \xi_{\varkappa t_1} & , \ldots , & \xi_{\varkappa t_{n-r}} \\ \xi_{1 s_1} & , \xi_{1 t_1} & , \ldots , & \xi_{1 t_{n-r}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-r, s_1} & , \xi_{n-r, t_1} & , \ldots , & \xi_{n-r, t_{n-r}} \end{vmatrix}$$

i rozwijając ten wyznacznik według elementów pierwszego wiersza otrzymujemy:

$$\xi_{\varkappa s_1} B_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}} - \xi_{\varkappa t_1} B_{s_1, t_2, \ldots, t_{n-r}} + \xi_{\varkappa t_2} B_{s_1, t_1, t_3, \ldots, t_{n-r}} - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-r} \xi_{\varkappa t_{n-r}} B_{s_1, t_1, \ldots, t_{n-r-1}} = 0,$$

skąd przez odpowiednie przestawienie znaczków wynika:

$$\xi_{\varkappa s_1} B_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}} - \xi_{\varkappa t_1} B_{s_1, t_2, \ldots, t_{n-r}} - \xi_{\varkappa t_2} B_{t_1, s_1, t_3, \ldots, t_{n-r}}$$
$$- \xi_{\varkappa t_{n-r}} B_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-r-1}, s_1} = 0,$$

a przypominając uwagi o znakach tych wyznaczników B i ilości dołączonych A, dochodzimy do równości:

$$\xi_{\varkappa s_1} A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} + \xi_{\varkappa t_1} A_{t_1, s_2, \ldots, s_r} + \ldots + \xi_{\varkappa t_{n-r}} A_{t_{n-r}, s_2, \ldots, s_r} = 0,$$

z których wynikają wzory:

$$\overline{A}_{s_1, s_2, \ldots, s_r} = \lambda^{(1)} A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}$$
$$\overline{A}_{t_1, s_2, \ldots, s_r} = \lambda^{(1)} A_{t_1, s_2, \ldots, s_r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{A}_{t_{n-r}, s_2, \ldots, s_r} = \lambda^{(1)} A_{t_{n-r}, s_2, \ldots, s_r}$$

gdzie $\lambda^{(1)}$ oznacza dowolny czynnik proporcyonalności. Widoczna, że takiem samem rozumowaniem z układu (s_2) otrzymujemy wartości:

$$\overline{A}_{s_1, s_2, \ldots, s_r} = \lambda^{(2)} A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}$$
$$\overline{A}_{s_1, t_1, s_3, \ldots, s_r} = \lambda^{(2)} A_{s_1, t_1, s_3, \ldots, s_r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{A}_{s_1, t_{n-r}, s_3, \ldots, s_r} = \lambda^{(2)} A_{s_1, t_{n-r}, s_3, \ldots, s_r}$$

gdzie $\lambda^{(2)}$ oznacza znów dowolny czynnik proporcyonalności i t. d., wreszcie z układu (s_r) otrzymujemy:

$$\overline{A}_{s_1, s_2, \ldots, s_r} = \lambda^{(r)} A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}$$
$$\overline{A}_{s_1, \ldots, s_{r-1}, t_1} = \lambda^{(r)} A_{s_1, \ldots, s_{r-1}, t_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{A}_{s_1, \ldots, s_{r-1}, t_{n-r}} = \lambda^{(r)} A_{s_1, \ldots, s_{r-1}, t_{n-r}}$$

gdzie $\lambda^{(r)}$ jest także dowolnym czynnikiem proporcyonalności. Ale porównywając ze sobą pierwsze równości w tych r szeregach wyrazów, przychodzimy do wniosku, że:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \ldots = \lambda^{(r)},$$

t. j. że wszystkie te czynniki proporcyonalności są sobie równe. Oznaczymy ich wspólną wartość przez λ i pokażemy, że najogólniejszy układ spółczynników $\overline{A}$, który doprowadza do zera wszystkie spółczynniki pochodnych funkcyj $\varrho_\varkappa$, można przedstawić za pomocą wzoru:

$$\overline{A}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r} = \lambda A_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r} \tag{53}$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ oznaczają każdą kombinacyę r liczb z szeregu: $1, 2, \ldots, n$.

W tym celu pokażemy naprzód, że wartości (53) istotnie czynią zadość naszym warunkom. Łatwo dostrzedz, że jakąkolwiek byłaby kombinacya $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-1}$ z liczb $1, 2, \ldots, n$, każdej odpowiada układ równań:

$$\sum_1^n{}_i \overline{A}_{i, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-1}} \xi_{\varkappa i} = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-r) \tag{54}$$

któremu muszą czynić zadość spółczynniki $\overline{A}$ i że wypisując wszystkie takie układy, mamy wszystkie warunki dla spółczynników $\overline{A}$ wynikające z przyrównania do zera wszystkich spółczynników przy pochodnych, funkcyj $\varrho_\varkappa$. Podstawiając w układzie (54) wartości (53) mamy:

$$\sum_1^n{}_i A_{i, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-1}} \xi_{\varkappa i} = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-r)$$

a oznaczając przez $t'_1, t'_2, \ldots, t'_{n-r+1}$ liczby szeregu $1, 2, \ldots, n$ od siebie różne i różne od liczb $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-1}$, możemy równości te napisać w postaci:

$$\xi_{\varkappa t_1'} A_{t_1', s_1', \ldots, s'_{r-1}} + \xi_{\varkappa t'_2} A_{t'_2, s'_1, \ldots, s'_{r-1}} + \ldots, + \xi_{\varkappa t'_{n-r+1}} A_{t'_{n-r+1}, s'_1 \ldots, s'_{r-1}} = 0,$$

których strony lewe są rozwinięciami według elementów pierwszego wiersza równych zeru wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} \xi_{\varkappa t_1'}, & \xi_{\varkappa t_2'}, & \ldots, & \xi_{\varkappa t'_{n-r+1}} \\ \xi_{1 t_1'}, & \xi_{1 t_2'}, & \ldots, & \xi_{1 t'_{n-r+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-r, t_1'}, & \xi_{n-r, t_1'}, & \ldots, & \xi_{n-r, t'_{n-r+1}} \end{vmatrix},$$

Zatem wartości (53) istotnie czynią zadość naszym warunkom.

Ponieważ warunki nasze dopuszczają ten układ rozwiązań, więc one nie są ze sobą sprzeczne i aby wykazać, że te wartości (53) stanowią układ najogólniejszy, wystarczy pokazać, że w szeregu tych warunków można znaleść takie równania, z których wynika, że wszystkie spółczynniki $\overline{A}$ muszą być równe wielkościom zupełnie określonym, pomnożonym przez czynnik λ. Udowodniliśmy to już poprzednio dla wszystkich spółczynników $\overline{A}$, mających conajwyżej jeden tylko skaźnik t. Uważajmy jakikolwiek układ (54), którego niektóre spółczynniki $\overline{A}$ mają dwa skaźniki t, ale który nie zawiera spółczynników, mających więcej skaźników t. Każdy taki układ otrzymuje się z (54), kładąc jednę z liczb s' równą jednej z liczb t, a resztę z liczb s' równemi pewnym z liczb s. Takim układem będzie np. układ:

$$(55) \qquad \sum_1^n {}^i \overline{A}_{i, t_1, s_3, s_4, \ldots, s_r} \xi_{\varkappa i} = 0. \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-r)$$

Wypisując układ ten wyraźniej, mamy:

$$\overline{A}_{s_1 t_1 s_3, \ldots, s_r} \xi_{\varkappa s_1} + \overline{A}_{s_2, t_1, s_3, \ldots, s_r} \xi_{\varkappa s_2} + \overline{A}_{t_2, t_1, s_3, \ldots, s_r} \xi_{\varkappa t_2} + \ldots$$
$$\ldots + \overline{A}_{t_{n-r}, t_1, s_3, \ldots, s_r} \xi_{\varkappa t_{n-r}} = 0.$$

W tym układzie najogólniejsze wartości dwóch pierwszych spółczynników są już znane, pozostaje do określenia $n-r-1$ ostatnich spółczynników. Ponieważ wyznacznik $B_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}}$ jest odmienny od zera, więc z pewnością pomiędzy wyznacznikami:

$$\begin{vmatrix} \xi_{\varkappa_1, t_2}, & \xi_{\varkappa_1, t_3}, & \ldots, & \xi_{\varkappa_1, t_{n-r}} \\ \xi_{\varkappa_2, t_2}, & \xi_{\varkappa_2, t_3}, & \ldots, & \xi_{\varkappa_2, t_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{\varkappa_{n-r-1}, t_2}, & \xi_{\varkappa_{n-r-1}, t_3}, & \ldots, & \xi_{\varkappa_{n-r-1}, t_{n-r}} \end{vmatrix},$$

gdzie $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-r-1}$ są $n-r-1$ różnemi od siebie liczbami z szeregu $1, 2, \ldots, n-r$ znajduje się przynajmniej jeden odmienny od zera. Więc ostatnie $n-r-1$ spółczynniki są zupełnie określonemi wielkościami, pomnożonemi przez czynnik λ. Rzecz jasna, że taksamo, jak udowodniliśmy tę własność dla spółczynników $\overline{A}$ z dwoma skaźnikami t figurujących w układzie (55), możemy ją udowodnić dla wszystkich spółczynników $\overline{A}$ z dwoma skaźnikami t.

Załóżmy teraz, że własność powyższą udowodniliśmy dla spółczynników $\overline{A}$ mających $m<r$ skaźników t. Pokażemy, że wówczas własność ta zachodzi i dla spółczynników A z $m+1$ skaźnikami t, przez co oczywiście będzie ona udowodniona zupełnie ogólnie. Jednym z układów, określających spółczynniki A z $m+1$ skaźnikami t przez spółczynniki z m skaźnikami t jest układ:

$$\sum_1^n {}^i \overline{A}_{i, t_1, \ldots, t_m, s_{m+2}, \ldots, s_r} \xi_{\varkappa i} = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-r)$$

lub inaczej:

$$\sum_1^{m+1} {}^u \overline{A}_{s_u, t_1, \ldots, t_m, s_{m+2}, \ldots, s_r} \xi_{\varkappa s_u} + \sum_{m+1}^{n-r} {}^v \overline{A}_{t_v, t_1, \ldots, t_m, s_{m+2}, \ldots, s_r} \xi_{\varkappa t_v} = 0.$$

Ponieważ nie wszystkie wyznaczniki postaci:

$$\begin{vmatrix} \xi_{\varkappa_1, t_{m+1}}, & \xi_{\varkappa_1, t_{m+2}}, & \ldots, & \xi_{\varkappa_1, t_{n-r}} \\ \xi_{\varkappa_2, t_{m+1}}, & \xi_{\varkappa_2, t_{m+2}}, & \ldots, & \xi_{\varkappa_2, t_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{\varkappa_{n-r-m}, t_{m+1}}, & \xi_{\varkappa_{n-r-m}, t_{m+2}}, & \ldots, & \xi_{\varkappa_{n-r-m}, t_{n-r}} \end{vmatrix},$$

gdzie $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-r-m}$ oznaczają jakiekolwiek $n-r-m$ od siebie różne z liczb: $1, 2, \ldots, n-r$, są równe zeru, bo wyznacznik $B_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}}$ jest odmienny od zera, więc $n-r-m$ ostatnich spółczynników układu wyrażają się jako liniowe, jednorodne i zupełnie określone funkcye $m+1$ pierwszych. Ale według założenia $m+1$ pierwszych spółczynników są zupełnie określonemi wielkościami przez czynnik λ. To samo więc stosuje się i do $n-r-m$ ostatnich spółczynników, t. j. że figurujące w tym układzie spółczynniki $\overline{A}$ z $m+1$ skaźnikami t istotnie mają własność, o którą chodzi. Zatem własność ta jest udowodniona zupełnie ogólnie, t. j. najogólniejszym układem spółczynników $\overline{A}$, czyniących zadość naszym warunkom jest (53).

Formułując rezultat ten inaczej możemy powiedzieć, że funkcya $\overline{S}$ całki, niezmiennej przy wszystkich przemieszczeniach wzdłuż elementów liniowych układu Pfaffa, musi mieć postać:

$$\overline{S} = \lambda \Delta .$$

Ale pokazaliśmy w ustępie **4.** że jeżeli całka ta jest całką niezmienną jakiegokolwiek nieskończenie małego przekształcenia, przekształcenie to nie zmienia układu Pfaffa. W danym wypadku chodzi o wszystkie nieskończenie małe przekształcenia szeregu Xf; więc wszystkie one muszą nie zmieniać układu równań Pfaffa, lub, co na jedno wychodzi, nieskończenie małych przekształceń szeregu Xf. To znaczy, że układ równań:

$$X_\varkappa f = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-r) \tag{56}$$

musi być układem zupełnym, a zatem układ równań Pfaffa musi być układem nieograniczenie całkowalnym. Zatem całki rzeczonej kategoryi mogą być całkami niezmiennemi przy wszystkich przemieszczeniach wzdłuż elementów liniowych układu równań Pfaffa tylko wówczas, gdy układ równań Pfaffa jest nieograniczenie całkowalny.

Załóżmy więc, że tak jest istotnie, t. j. że mamy:

$$(X_\varkappa, X_l) = \sum_1^{n-r} {}_\tau\, \Pi_{\varkappa\tau}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ X_\tau f. \tag{57}$$
$$(\varkappa, l = 1, \ldots, n-r)$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

$$\theta_\varkappa = \sum_1^n {}_i \frac{\partial \xi_{\varkappa i}}{\partial x_i} \quad , \quad \overline{\Pi} = \sum_1^{n-r} {}_\nu\, \Pi_{\varkappa\nu\nu} \, ,$$

to na mocy rachunku, który w ustępie **2** doprowadził nas do wzoru (14) możemy napisać wzór następujący:

$$X_\varkappa (A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}) = (\theta_\varkappa + \overline{\Pi}_\varkappa)\ A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} - \sum_1^n {}_i\, W^{(i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}\ (\xi_{\varkappa i}). \tag{58}$$

Na podstawie tego wzoru łatwo teraz będzie w prostej postaci przedstawić warunki niezmienności całki wynikające z przyrównania do zera spółczynników, stojących przy funkcyach $\varrho_\varkappa$ we wzorze (52). Warunki te, na mocy rozwiązań (53), można naprzód napisać w formie:

$$A_{s_1, s_2, \ldots, s_r} X_\varkappa(\lambda) + \lambda \Big[X_\varkappa(A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}) + \sum_1^n {}_i\, W^{(i)}_{s_1, s_2, \ldots, s_r}\ (\xi_{\varkappa i}) \Big] = 0,$$

a następnie korzystając ze wzoru (58) i pamiętając, że przynajmniej jedna z wielkości $A_{s_1, s_2, \ldots, s_r}$ jest odmienną od zera, otrzymujemy układ równań różniczkowych dla λ:

$$X_\varkappa(\lambda) + (\theta_\varkappa + \overline{\Pi}_\varkappa)\, \lambda = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-r) \tag{59}$$

który jest układem warunków koniecznych i dostatecznych niezmienności uważanej całki.

Jeżelibyśmy w całce:

$$\iint \ldots \int \lambda\, \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r ,$$

wielkości $\xi_{\varkappa i}$ zastąpili przez wielkości:

$$\xi'_{li} = \sum_1^{n-r} {}_\varkappa\, a_{l\varkappa}\, \xi_{\varkappa i} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-r;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie wyznacznik U spółczynników $a_{l\varkappa}$ jest odmienny od zera, to otrzymalibyśmy całkę:

$$\iint \ldots \int \lambda'\, \Delta'\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r ,$$

gdzie wyznacznik Δ' taksamo zależy od wielkości $\xi'_{\varkappa i}$ jak wyznacznik Δ od wielkości $\xi_{\varkappa i}$, a czynnik λ' ma postać:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{U} .$$

Ponieważ całka pozostała przytem bez zmiany, więc warunki niezmienności tej całki muszą być tylko bezpośrednim wynikiem poprzednich warunków (59). Jeżeli oznaczymy:

$$X'_l f = \sum_1^n {}_i\, \xi'_{li} \frac{\partial f}{\partial x_i} , \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-r)$$

t. j. weźmiemy:

$$X'_l f = \sum_1^{n-r} {}_\varkappa\, a_{l\varkappa}\, X_\varkappa f \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-r) \tag{60}$$

i przyjmiemy:

$$(61) \qquad (X'_\mu, X'_\nu) = \sum_1^{n-r} {}^\sigma\, \Pi'_{\mu\nu\sigma} X'_\sigma f\,,$$

to oznaczając jeszcze:

$$\theta'_l = \sum_1^{n} {}^i\, \frac{\partial \xi'_{li}}{\partial x_i}\,, \qquad \overline{\Pi}' = \sum_1^{n-r} {}^\nu\, \Pi'_{l\nu\nu}\,,$$

można będzie warunki te napisać w postaci:

$$(62) \qquad X'_l(\lambda') + (\theta'_l + \overline{\Pi}'_l)\,\lambda' = 0. \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-r)$$

Że warunki te otrzymują się przez przekształcenie warunków (59) łatwo także sprawdzić bezpośrednio. Mamy:

$$(X'_\mu, X'_\nu) = \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \left[X'_\mu(a_{\nu\varkappa}) - X'_\nu(a_{\mu\varkappa})\right] X_\varkappa f + \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \sum_1^{n-r} {}^l\, a_{\mu\varkappa}\, a_{\nu l}\, (X_\varkappa, X_l).$$

Stąd na mocy równości (57) i (61) otrzymujemy:

$$(63) \qquad \sum_1^{n-r} {}^\sigma\, \Pi'_{\mu\nu\sigma} X' f = \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \left[X'_\mu(a_{\nu\varkappa}) - X'_\nu(a_{\mu\varkappa})\right] X_\varkappa f$$

$$+ \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \sum_1^{n-r} {}^l\, a_{\mu\varkappa}\, a_{\nu l} \sum_1^{n-r} {}^\tau\, \Pi_{\varkappa l\tau}\, X_\tau f.$$

Jeżeli równania (60) rozwiążemy względem $X_\varkappa f$, to otrzymamy:

$$U\,.\,X_\varkappa f = \sum_1^{n-r} {}^l\, b_{l\varkappa}\, X'_l f,$$

gdzie $b_{l\varkappa}$ oznacza ilość dołączoną do elementu $a_{l\varkappa}$ w wyznaczniku U. Podstawiając te wartości w (63) i przyrównywając ze sobą spółczynniki po obu stronach przy $X'_\sigma f$ otrzymujemy:

$$U\,\Pi'_{\mu\nu\sigma} = \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \left[X'_\mu(a_{\nu\varkappa}) - X'_\nu(a_{\mu\varkappa})\right] b_{\sigma\varkappa}$$

$$+ \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \sum_1^{n-r} {}^l\, a_{\mu\varkappa}\, a_{\nu l} \sum_1^{n-r} {}^\tau\, \Pi_{\varkappa l\tau}\, b_{\sigma\tau}.$$

Stąd wynika wzór następujący:

$$U \sum_1^{n-r} {}^\nu\, \Pi'_{\mu\nu\nu} = \sum_1^{n-r} {}^\nu \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \left[X'_\mu(a_{\nu\varkappa}) \quad \sum_1^{n-r} {}^l\, a_{\nu l}\, X_l(a_{\mu l})\right] b_{\nu\varkappa}$$

$$+ \sum_1^{n-r} {}^\nu \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \sum_1^{n-r} {}^l\, a_{\mu\varkappa} a_{\nu l} \sum_1^{n-r} {}^\tau\, \Pi_{\varkappa l\tau}\, b_{\nu\tau}\,;$$

a jeżeli uwzględnimy tożsamości, które łączą ze sobą elementy wyznacznika U i ich ilości dołączone, to otrzymamy:

$$U \sum_1^{n-r} {}^\nu\, \Pi'_{\mu\nu\nu} = \sum_1^{n-r} {}^\varkappa \sum_1^{n-r} {}^l\, b_{\varkappa l}\, X'_\mu(a_{\varkappa l}) - U \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, X_\varkappa(a_{\mu\varkappa})$$

$$+ \; U \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, a_{\mu\varkappa} \sum_1^{n-r} {}^\tau\, \Pi_{\varkappa\tau\tau}\,,$$

zwracając zaś uwagę na to, że pierwszy wyraz drugiej strony jest $X'_\mu(U)$, będziemy mieli:

$$U\,\overline{\Pi}'_\mu = U \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, a_{\mu\varkappa}\, \overline{\Pi}_\varkappa + X'_\mu(U) - U \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, X_\varkappa(a_{\mu\varkappa}).$$

Z innej strony widoczna, że:

$$\theta'_\mu = \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, a_{\mu\varkappa}\, \theta_\varkappa + \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, X_\varkappa(a_{\mu\varkappa})\,.$$

Z tych równości i przez zamianę znaczku μ na l będzie:

$$(64) \qquad X'_l\left(\frac{1}{U}\right) + \left(\theta'_l + \overline{\Pi}'_l\right) = \frac{1}{U} \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, a_{l\varkappa}\, (\theta_\varkappa + \overline{\Pi}_\varkappa)\,,$$

a więc przypominając związek pomiędzy λ i λ', otrzymujemy;

$$U\left[X'_l(\lambda') + (\theta'_l + \overline{\Pi}'_l)\,\lambda'\right] = \sum_1^{n-r} {}^\varkappa\, a_{l\varkappa} \left[X_\varkappa(\lambda) + (\theta_\varkappa + \Pi_\varkappa)\,\lambda\right],$$

co istotnie sprawdza, że warunki (62) są wynikiem warunków (59) i nawzajem.

Warunki (59) określają λ i można je zastąpić przez układ równań:

$$(65)\qquad Y_\varkappa f = X_\varkappa f - (\theta_\varkappa + \overline{\Pi}_\varkappa)\,\lambda\frac{\partial f}{\partial\lambda} = 0, \qquad (\varkappa=1,2,..,n-r)$$

i taksamo warunki (62) można zastąpić przez układ:

$$(66)\qquad Y'_l f = X'_l f - (\theta'_l + \overline{\Pi}'_l)\,\lambda'\frac{\partial f}{\partial\lambda'} = 0. \qquad (l=1,2,\ldots,n-r)$$

Zważywszy zaś, że na mocy związku (64):

$$Y'_l\lambda = \lambda' X'_l U - U\lambda'(\theta'_l + \overline{\Pi}'_l) = -\lambda\sum_{1}^{n-r}{}^{\varkappa} a_{l\varkappa}(\theta_\varkappa + \overline{\Pi}_\varkappa);$$

mamy:

$$Y'_l f = \sum_{1}^{n-r}{}^{\varkappa} a_{l\varkappa}\, Y_\varkappa f.$$

Stąd wynika, że jeżeli jeden z układów (65) i (66) jest $(n-r)$-częściowym układem zupełnym, to i drugi jest takim układem. Na mocy tej uwagi łatwo udowodnić, że układ (65) jest istotnie $(n-r)$-częściowym układem zupełnym. Istotnie, wiadomo, że spółczynniki $a_{l\varkappa}$ można zawsze tak wybrać, że układ zupełny:

$$(67)\qquad X'_l f = 0, \qquad (l=1,2,\ldots,n-r)$$

będzie układem Jacobi'ego, t. j. że wszystkie spółczynniki $\Pi'_{\mu\nu\sigma}$ są zerami. Wówczas układ (66) mieć będzie kształt prostszy:

$$(68)\qquad Y'_l f = X'_l f - \theta'_l\lambda'\frac{\partial f}{\partial\lambda'} = 0, \qquad (l=1,2,\ldots,n-r)$$

i łatwo będzie wykazać, że ten układ jest układem Jacobi'ego. Przedewszystkiem, ponieważ układ (67) jest układem Jacobi'ego, więc mamy tożsamości następujące:

$$(69)\qquad X'_\mu(\xi'_{\nu i}) - X'_\nu(\xi'_{\mu i}) = 0. \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n-r)$$

Dalej, obliczając symbole Poissona układu (68), otrzymujemy:

$$(Y'_\mu, Y'_\nu) = [X'_\nu(\theta'_\mu) - X'_\mu(\theta'_\nu)]\,\lambda'\frac{\partial f}{\partial\lambda'}.$$

Zwróćmy teraz uwagę na to, że

$$\frac{\partial X'_\nu(\xi'_{\mu s})}{\partial x_s} = X'_\nu\left(\frac{\partial\xi'_{\mu s}}{\partial x_s}\right) + \sum_{1}^{n}{}^{i}\frac{\partial\xi'_{\nu i}}{\partial x_s}\,\frac{\partial\xi'_{\mu s}}{\partial x_i},$$

skąd przez sumowanie względem s wynika:

$$X'_\nu(\theta'_\mu) = \sum_{1}^{n}{}^{i}\frac{\partial X'_\nu(\xi'_{\mu i})}{\partial x_i} - \sum_{1}^{n}{}^{s}\sum_{1}^{n}{}^{i}\frac{\partial\xi'_{\nu i}}{\partial x_s}\,\frac{\partial\xi'_{\mu s}}{\partial x_i},$$

a przestawiając tu znaczki μ i ν, otrzymujemy:

$$X_\mu(\theta'_\nu) = \sum_{n}^{n}{}^{i}\frac{\partial X'_\mu(\xi'_{\nu i})}{\partial x_i} - \sum_{1}^{n}{}^{s}\sum_{1}^{n}{}^{i}\frac{\partial\xi'_{\mu i}}{\partial x_s}\,\frac{\partial\xi'_{\nu s}}{\partial x_i}.$$

Ale na mocy związków (69) pierwsze wyrazy prawych stron w tych wzorach są sobie równe; drugie zaś są sobie równe dla tego, że drugi wyraz drugiego wzoru otrzymuje się z drugiego wyrazu pierwszego wzoru przez przestawienie znaczków i i s. Mamy zatem:

$$X'_\nu(\theta'_\mu) - X'_\mu(\theta'_\nu) = 0,$$

t. j. układ (68) jest układem Jacobi'ego. Zatem układ (65) jest $(n-r)$-częściowym układem zupełnym, ma przeto $r+1$ rozwiązań niezależnych, z których jedno napewno zawiera wielkość λ. To jest dowodem, że w przypadku uważanym zawsze mamy całki niezmienne postaci:

$$\iint\ldots\int\lambda\,\Delta\,dp_1\,dp_2\ldots dp_r.$$

Najogólniejsza całka niezmienna ma postać:

$$\iint\ldots\int\overline{\lambda}\,\Phi(I_1, I_2, \ldots, I_r)\,\Delta\,dp\,dp_2\ldots dp_r,$$

gdzie $\overline{\lambda}$ oznacza jakiekolwiek rozwiązanie układu (59), Φ oznacza funkcyę dowolną, a $I_1, I_2, \ldots, I_r$ r niezależnych od siebie całek układu równań Pfaffa.

Rezultat, który uzyskaliśmy w tym ustępie, można streścić w twierdzeniu następującem:

Ażeby całka postaci:

$$\iint\ldots\int\sum_{1}^{n}{}^{s_r}\sum_{1}^{s_r-1}{}^{s_{r-1}}\ldots\sum_{1}^{s_2-1}{}^{s_1}\overline{A}_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\,dx_{s_1}\,dx_{s_2}\ldots dx_{s_r},$$

mogła być całką niezmienną przy wszystkich przemieszczeniach wzdłuż elementów liniowych układu równań Pfaffa, musi ona mieć kształt:

$$\int\int \ldots \int \Delta \, dp_1 \, dp_2 \ldots dp_r, \tag{70}$$

a układ równań Pfaffa musi być nieograniczenie całkowalny. W przypadku układu nieograniczenie całkowalnego istnieje zawsze nieskończenie wiele całek niezmiennych kształtu (70).

Widoczna, że każdą całkę kształtu (70) można sprowadzić do postaci:

$$\int\int \ldots \int \Delta \, dp_1 \, dp_2 \ldots dp_r,$$

obierając wyznacznik U równy czynnikowi λ.

W artykule „O zachowaniu ruchu wirowego" istnienie całek niezmiennych przy przemieszczeniach wzdłuż liniowych elementów układu dwóch równań Pfaffa w przestrzeni o trzech wymiarach nie było zawarowane żadnemi warunkami, bo taki układ jest zawsze układem nieograniczenie całkowalnym.

Wreszcie zauważymy, że łatwo tu odpowiedzieć na jeszcze jedno zapytanie. Do każdego układu nieograniczenie całkowalnego należą całki niezmienne przy przemieszczeniach wzdłuż elementów liniowych układu i mające kształt:

$$\int\int \ldots \int \lambda \, \Delta \, dp_1 \, dp_2 \ldots dp_r.$$

Całki takiej samej postaci pozostają bez zmiany przy nieskończenie małem przekształceniu Df, które nie zmienia nieograniczenie całkowalnego układu Pfaffa. Czy istnieją całki tej postaci, które pozostają bez zmiany zarówno przy Df jak i przy wszystkich przemieszczeniach wzdłuż elementów liniowych nieograniczenie całkowalnego układu Pfaffa?

Należy tu odróżnić dwa przypadki. Może się zdarzyć, że Df wyraża się liniowo i jednorodnie przez przekształcenia $X_\varkappa f$ i wówczas widoczna, że wszystkie całki niezmienne przy rzeczonych przemieszczeniach są także całkami niezmiennemi przy przekształceniu Df. Gdy zaś Df nie wyraża się liniowo i jednorodnie przez $X_\varkappa f$, to oprócz warunków:

$$X_\varkappa(\lambda) + (\theta_\varkappa + \overline{\Pi}_\varkappa)\,\lambda = 0, \qquad {\scriptstyle (\varkappa=1,2,\ldots,n-r)} \tag{71}$$

mamy jeszcze na mocy równań (49) warunek:

$$D(\lambda) + (\theta + \bar{\omega})\,\lambda = 0. \tag{72}$$

Wszystkie te warunki można zastąpić przez równania:

$$Y_\varkappa f = X_\varkappa f - (\theta_\varkappa + \overline{\Pi}_\varkappa)\,\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \qquad {\scriptstyle (\varkappa=1,2,\ldots,n-r)} \tag{73}$$

$$Ef = Df - (\theta + \bar{\omega})\,\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0. \tag{74}$$

Poprzednio z faktu, że równania $X_\varkappa f = 0$ tworzą $(n\text{-}r)$-częściowy układ zupełny, wyprowadziliśmy wniosek, że równania (65) tworzą także $(n\text{-}r)$-częściowy układ zupełny. Ponieważ zaś niezależne od siebie równania:

$$Df = 0, \quad X_\varkappa = 0, \qquad {\scriptstyle (\varkappa=1,2,\ldots,a-r)} \tag{75}$$

na mocy założenia o nieograniczonej całkowalności i na mocy założenia, że Df nie zmienia układu Pfaffa, i nie wyraża się liniowo przez wyrażenie $X_\varkappa f$, tworzą $(n-r+1)$-częściowy układ zupełny, przeto to samo stosuje się do układu równań (73) i (74). Stąd zaś wyprowadzamy wniosek, że wszystkie całki niezmienne, o które chodzi w tym drugim przypadku, zawarte są we wzorze:

$$\int\int \ldots \int \bar{\lambda}\, \Phi(I_1, I_2, \ldots, I_{r-1})\, \Delta \, dp_1 \, dp_2 \ldots dp_r,$$

gdzie $\bar{\lambda}$ oznacza jakiekolwiek rozwiązanie wspólne równań (73) i (74), Φ oznacza funkcyę dowolną, a $I_1, I_2, \ldots, I_{r-1}$ $r-1$ niezależnych od siebie rozwiązań układu (75).

6. Rachunkom, przeprowadzonym w poprzednich ustępach, łatwo nadać znaczenie geometryczne.

Jeżeli $r-1$ ze spółrzędnych krzywoliniowych $p_1, p_2, \ldots, p_r$ rozmaitości r-wymiarowej:

$$x_1 = x_i(p_1, p_2, \ldots, p_r) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)} \tag{76}$$

nadamy wartości stałe, a tylko jednę np. $p_\varkappa$ pozostawimy zmienną, to otrzymamy na naszej rozmaitości linię krzywą. Odłóżmy na stycznej do tej krzywej w punkcie $p_1, p_2, \ldots, p_r$ długość:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_\varkappa}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial p_\varkappa}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial p_\varkappa}\right)^2}\, dp_\varkappa,$$

i wyobraźmy sobie, że konstrukcya ta jest wykonana dla wszystkich wartości $\varkappa = 1, 2, \ldots, r$. Podobnież odłóżmy na stycznych do torów nieskończenie małych przekształceń $X_l f$ $(l = 1, 2, \ldots, n-r)$ w punkcie $p_1, p_2, \ldots, p_r$ długości:

$$\sqrt{\xi_{l1}^2 + \xi_{l2}^2 + \ldots + \xi_{ln}^2}\ \delta t,$$

to na tych wszystkich długościach będzie można zbudować nieskończenie mały równoległościan w ogóle o n wymiarach. Objętość tego równoległościanu wyraża się wzorem:

$$dR = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} dp_1, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1} dp_1, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} dp_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_r} dp_r, & \frac{\partial x_2}{\partial p_r} dp_r, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} dp_r \\ \xi_{11}\,\delta t, & \xi_{12}\,\delta t, & \ldots, & \xi_{1n}\,\delta t \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-r,1}\,\delta t, & \xi_{n-r,2}\,\delta t, & \ldots, & \xi_{n-r,n}\,\delta t \end{vmatrix} = (\delta t)^{n-r} \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r.$$

Ponieważ całki, o których była mowa w poprzednich ustępach, można przez odpowiedni wybór przekształceń $X_l f$ pisać w formie:

$$\iint \ldots \int \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r,$$

widzimy zatem, że to, co udowodniliśmy o tych całkach, wyraża pewne proste własności naszego nieskończenie małego równoległościanu.

Zwracając się tedy naprzód do przekształceń skończonych i oznaczając przez dQ objętość nieskończenie małego równoległościanu, taksamo zbudowanego w przestrzeni $y_1, y_2, \ldots, y_n$, jak równoległościan o objętości dR był zbudowany w przestrzeni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i zakładając nadto, że wybraliśmy tak wielkości $\xi_{\varkappa i}$ i $\eta_{\varkappa i}$, iż mamy:

$$\iint \ldots \int \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r = \iint \ldots \int \nabla\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r,$$

otrzymujemy, że

$$dR = dQ,$$

t. j. że objętości tych równoległościanów są sobie równe.

Zwracając się teraz do przekształceń nieskończenie małych, mieliśmy wzór:

$$D(\Delta) = (\theta + \bar\omega)\,\Delta,$$

skąd wynika:

$$D(dR) = (\theta + \bar\omega)\, dR,$$

t. j. spółczynnik $\theta + \bar\omega$ odgrywa rolę dylatacyi przy tem nieskończenie małem przekształceniu względem naszego równoległościanu. Przytem wzór ten streszcza w sobie zachowanie się wszystkich całek postaci:

$$\iint \ldots \int \mu\, \Delta\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r$$

przy Df, bo przez odpowiedni wybór wielkości $\xi_{\varkappa i}$ zawsze można znaleść dR różniące się od $\mu\Delta$ tylko czynnikiem $(\delta t)^{n-r}\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_r$.

Wreszcie w przypadku nieograniczenie całkowalnego układu Pfaffa istnieją niezmienne całki uważanej postaci przy wszelkich przemieszczeniach wzdłuż elementów liniowych układu Pfaffa. Niezmienność każdej takiej całki może być widocznie wyrażona niezmiennością objętości odpowiedniego nieskończenie małego równoległościanu.

Zwróćmy jeszcze uwagę na geometryczne znaczenie równania $\Delta = 0$. Ponieważ w tym wypadku $dR = 0$, więc wnosimy, że wówczas elementy liniowe układu Pfaffa i elementy liniowe r-wymiarowej rozmaitości, przechodzące przez jeden i tensam punkt przestrzeni, leżą wszystkie na jednej i tejsamej nieskończenie małej rozmaitości płaskiej o $n-1$ wymiarach. Można to sprawdzić bezpośrednio przez wyznaczenie tej rozmaitości. Jeżeli taką rozmaitością jest rozmaitość:

$$\alpha_1\, dx_1 + \alpha_2\, dx_2 + \ldots + \alpha_n\, dx_n = 0,$$

to dla wyznaczenia spółczynników α otrzymujemy warunki:

$$\begin{gathered} \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \alpha_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial x_n}{\partial p_1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_r} + \alpha_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_r} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial x_n}{\partial p_r} = 0, \\ \alpha_1\, \xi_{11} + \alpha_2\, \xi_{12} + \ldots + \alpha_n\, \xi_{1n} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1\, \xi_{n-r,1} + \alpha_2\, \xi_{n-r,2} + \ldots + \alpha_n\, \xi_{n-r,n} = 0, \end{gathered}$$

z których wynika, że rozmaitość taka istnieje w tedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$.

Ale znaczenie tego równania $\Delta = 0$ można wypowiedzieć jeszcze inaczej. Zapytajmy mianowicie o warunek, którym muszą czynić zadość rozmaitość r-wymiarowa (76) i nasz układ równań Pfaffa, ażeby z pośród ∞^{n-r-1} liniowych elementów, które w każdym punkcie wyznacza układ Pfaffa, w punktach, należących do tej rozmaitości, przynajmniej jeden element liniowy był położony na tej rozmaitości. Równania, które spełniają liniowe elementy leżące na rozmaitości, można napisać tak:

$$(77) \qquad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial x_i}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial p_r} dp_r, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

równania zaś, które spełniają elementy liniowe układu Pfaffa można napisać w formie:

$$(78) \qquad dx_i = \xi_{1i}\, dq_1 + \xi_{2i}\, dq_2 + \ldots + \xi_{n-r,\, i}\, dq_{n-r}, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

gdzie $dq_\varkappa$ oznaczają dowolne nieskończenie małe parametry. Ta ostatnia forma układu równań Pfaffa wynika bezpośrednio stąd, że układ równań Pfaffa można określić jako układ, który otrzymuje się przez przyrównanie do zera wszystkich wyznaczników stopnia $n-r+1$ macierzy:

$$\left| \begin{array}{cccc} dx_1, & dx_2, & \ldots, & dx_n \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n-r,\,1}, & \xi_{n-r,\,2}, & \ldots, & \xi_{n-r,\,n} \end{array} \right|.$$

Ażeby przynajmniej jeden element układu równań Pfaffa w punktach rozmaitości był położony na tej rozmaitości potrzeba i wystarcza, aby można było tak określić wielkości nieskończenie małe dp_i i $dq_\varkappa$, któreby nie wszystkie były zerami, żeby wartości, otrzymujące się na dx_i z równań (77) i (78) były sobie równe. Zatem warunkiem tego faktu jest także:

$$\Delta = 0,$$

skąd w szczególności wynika, że istnienie uważanej poprzednio $n-1$ wymiarowej rozmaitości płaskiej i istnienie elementów liniowych wspólnych dwóch uważanych utworów geometrycznych są faktami ze sobą równoważnemi.

W pracy tej zakładaliśmy, że

$$Df = \sum_1^n {}_i\, u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

t. j. interpretując to nieskończenie małe przekształcenie jako ruch cieczy w przestrzeni o n wymiarach, zakładaliśmy, że ruch ten jest ruchem trwałym. Widoczna jednak, że wszystkie nasze wywody z bardzo drobnemi zmianami stosują się i do przypadku:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n {}_i\, u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

gdzie t oznacza czas, t. j. do nietrwałego ruchu cieczy, i że spółczynniki układu równań Pfaffa także mogą zależeć od t. W artykule „O zachowaniu ruchu wirowego“ nie wprowadziliśmy założenia, że ruch cieczy jest trwały, które w tych wywodach nie jest istotne. W artykule tym przeprowadziliśmy także te wywody dla skończonych przekształceń grup jednoczęściowych. Ogólna postać tych rachunków dla układu równań Pfaffa byłaby tylko bardzo drobną modyfikacyą ustępów 3 i 4 pracy niniejszej.
