Brief abstract of the paper.

Let s_1, s_2 be any two substitutions which involve the same n letters and let G_1, G_2 be the groups which ave composed of all the substitutions in these n letters that are commutative with s_1, s_2 respectively. The necessary and sufficient condition that G_1, G_2 represent the same substitutions group is that s_1, s_2 are similar. All the substitutions of degree m that are commutative with s_1 form a group. When $m = n + b$ and this group involve all the letters of s_1, it is the direct product of the given G_1 and the symmetric group of degree b. When we use two dissimilar substitutions for s_1, the resulting groups will be distinct.

Z TEORYI ELIMINACYI.[1]

NAPISAŁ

FR. MERTENS.

Część pierwsza.

1. Tworzenie wypadkowej n form ogólnych o n zmiennych i dowód ich najważniejszych własności można, jak to wykazałem[2]), uzasadnić bez oparcia się na twierdzeniu zasadniczem Algebry. Twierdzenie to okazuje się koniecznem dopiero w zastosowaniach.

Powracam dziś do tego przedmiotu, ponieważ można przedstawić go prościej, i dodaję przytem najważniejsze zastosowania.

2. Przez f o r m ę o g ó l n ą z m i e n n y c h $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumieć będziemy funkcyę całkowitą jednorodną tych zmiennych ze spółczynnikami nieoznaczonemi.

Funkcyę całkowitą nieoznaczonych $u', u'', \ldots,$ mającą postać:

$$\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \ldots + \psi_\nu \psi_\nu ,$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$; $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ są funkcyami całkowitemi tychże nieoznaczonych, oznaczać będziemy krótko przez

$$[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu],$$

jeżeli nie chodzi nam o bliższe podanie postaci wyrażeń $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$.

---

[1]) Ze Sprawozdań Akademii Wiedeńskiej, 12 października i 30 listopada 1899

[2]) Sprawozdania Akademii Wiedeńskiej, II, 1886.

Niechaj $f_1, f_2, \ldots$ będą formy ogólne zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Stopień funkcyi f_i względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczamy przez m_i, spółczynnik przy $x_k^{m_i}$ w funkcyi f_i przez a_{ik}, a wyrażenie, na które przechodzi $f_i - a_{ik}x_k^{m_i}$, gdy uczynimy $x_k = 1$, przez $f_i^{(k)}$.

Jeżeli w pewnej funkcyi całkowitej F spółczynników funkcyj $f_1, f_2, \ldots$ i zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uczynimy $x_k = 1$, a nieoznaczone $a_{ik}, a_{2k}, \ldots$ zastąpimy odpowiednio przez $-f_1^{(k)}, -f_2^{(k)}, \ldots$, to otrzymamy wyrażenie F_0, nie zawierające wcale spółczynników $a_{1k}, a_{2k}, \ldots$; nazwiemy je *resztą funkcyi F względem form $f_1, f_2, \ldots$ i zmiennej x_k*.

3. Niechaj $f_1, f_2, \ldots, f_n$ będą formy ogólne n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$; o funkcyi całkowitej θ spółczynników tych form, nie zawierającej zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mówić będziemy, że *posiada własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$*, jeżeli iloczyn jej przez potęgę jednej ze zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ daje się przedstawić w postaci $[f_1, f_2, \ldots, f_n]$.

Jeżeli dla pewnej wartości i jest tożsamościowo

$$\theta x_i^r = [f_1, f_2, \ldots, f_n],$$

wtedy reszta θ_0 funkcyi θ względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i dowolnej zmiennej x_k znika tożsamościowo; albowiem dla $x_k = 1$ jest:

$$\theta = [a_{ik} + f_1^{(k)}, a_{2k} + f_2^{(k)}, \ldots, a_{nk} + f_n^{(k)}],$$

albo

$$\theta x_i^r = [a_{ik} + f_1^{(k)}, a_{2k} + f_2^{(k)}, \ldots, a_{nk} + f_n^{(k)}],$$

stosownie do tego, czy $k = i$, albo też nie. Po wstawieniu $-f_1^{(k)}, -f_2^{(k)}, \ldots$ odpowiednio za $a_{1k}, a_{2k}, \ldots$ otrzymujemy $\theta_0 = 0$, albo $\theta_0 x_1^r = 0$, a więc w obu przypadkach $\theta_0 = 0$.

Odwrotnie, jeżeli reszta funkcyi θ względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i x_k znika, połóżmy dla skrócenia:

$$a_{1k} + f_1^{(k)} = t_1,\ a_{2k} + f_2^{(k)} = t_2, \ldots, a_{nk} + f_n^{(k)} = t_n$$

i zastąpmy w funkcyi θ nieoznaczone $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ odpowiednio przez $a_{1k} - t_1, a_{2k} - t_2, \ldots, a_{nk} - t_n$; wtedy rezultat z jednej strony równa się zeru według założenia, z drugiej zaś, będąc rozwinięty względem $t_1, t_2, \ldots, t_n$ przybiera postać $\theta + [t_1, t_2, \ldots, t_n]$. Będzie tedy:

$$\theta + [t_1, t_2, \ldots, t_n] = 0$$

i otrzymamy tożsamość:

$$\theta = [t_1, t_2, \ldots, t_n] = [a_{1k} + f_1^{(k)}, a_{2k} + f_2^{(k)}, \ldots, a_{nk} + f_n^{(k)}].$$

Jeżeli przez wprowadzenie ponowne zmiennej x_k uczynimy to wyrażenie jednorodnem w zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, będzie:

$$\theta x_k^r = [f_1, f_2, \ldots, f_n].$$

A zatem funkcya θ posiada własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Jeżeli funkcye $\theta_1, \theta_2, \ldots$ posiadają własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, to i suma ich $\theta_1 + \theta_2$ posiada też własność zasadniczą.

Jeżeli funkcya θ posiada własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, M zaś jest funkcyą całkowitą spółczynników tych form, nie zawierającą zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to iloczyn $M\theta$ posiada własność zasadniczą.

Jeżeli iloczyn $M\theta$ posiada własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, M zaś jej nie posiada, wtedy posiadać ją musi funkcya θ.

4. Zajmijmy się rozwiązaniem *zagadnienia o wyznaczeniu postaci ogólnej wszystkich funkcyj całkowitych, posiadających własność zasadniczą względem n form ogólnych $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$*.

Niechaj stopnie funkcyi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą odpowiednio $m_1, m_2, \ldots, m_n$; iloczyn tych liczb oznaczmy przez p, ilorazy zaś $\frac{p}{m_1}, \frac{p}{m_2}, \ldots, \frac{p}{m_n}$ przez $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Iloczyn potęg:

$$P = a_{11}^{p_1} a_{22}^{p_2} \ldots a_{nn}^{p_n},$$

w którym a_{ii} oznacza spółczynnik przy $x_i^{m_i}$ w formie f_i, nazywać będziemy *iloczynem potęgowym głównym* form $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Rozwiązanie naszego zadania zawiera się w dwóch twierdzeniach następujących:

I. *Każda funkcya całkowita spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, posiadająca własność zasadniczą i nie zawierająca żadnego wyrazu podzielnego przez iloczyn potęgowy główny P, znika tożsamościowo.*

II. *Istnieją zawsze funkcye całkowite wymierno-liczbowe R spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, posiadające własność zasadniczą względem tych form, jednorodne i stopnia p_i względem spółczynników formy f_i i zawierające iloczyn potęgowy główny ze spółczynnikiem 1, lub — co na jedno wychodzi — przybierające wartość 1 dla $f_1 = x_1^{m_1}$, $f_2 = x_2^{m_2}$, ..., $f_n = x_n^{m_n}$.

Jeżeli twierdzenia te mają miejsce dla n form, wtedy każde wyrażenie całkowite θ spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, posiadające własność zasadniczą względem tych form, jest podzielne algebraicznie przez każdą funkcyę R.

Jeżeli θ nie zawiera żadnego wyrazu podzielnego przez iloczyn potęgowy główny P form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, wtedy jest tożsamościowo $\theta = 0$, a więc θ jest podzielne przez R.

Jeżeli zaś θ zawiera wyrazy podzielne przez P, wtedy wyszukajmy pomiędzy wszystkiemi temi wyrazami takich, które mają najwyższy wymiar h względem $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$; niechaj TP przedstawia ogół tych wyrazów. Jeżeli położymy:

$$\theta = PT + N_1\,, \quad R = P + N\,, \quad \theta = TR + \theta_1\,,$$

będzie:

$$\theta_1 = \theta - TR = N_1 - TN$$

i wyrażenie θ_1 posiada znowu własność zasadniczą względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Jeżeli θ_1 posiada jeszcze wyrazy przez P podzielne, wtedy są one względem $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ wymiaru niższego od h. Albowiem tak w N_1 jak i w TN, mogą być tylko takie wyrazy, zawierające P jako czynnik, które względem $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ nie dosięgają wymiaru h, gdyż wyrazy w T są wymiaru $h-(p_1+p_2+\ldots+p_n)$, wyrazy zaś w N nie dosięgają wymiaru $p_1+p_2+\ldots+p_n$. Jeżeli θ_1 zawiera wyrazy przez P podzielne, to można położyć $\theta_1 = T_1 R + \theta_2$, gdzie θ_2 posiada własność zasadniczą i albo wcale już nie zawiera wyrazów podzielnych przez P, albo tylko wyrazy takie wymiaru niższego względem $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ niż θ_1.

W ten sposób można postępować dalej, póki nie dojdziemy do wyrażenia θ_m, nie zawierającego już wcale wyrazów przez P podzielnych. Musi to nastąpić, gdyż części składowe wyrażeń $\theta_1, \theta_2, \ldots$ podzielne przez P mają wymiary malejące względem $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Będzie tedy tożsamościowo $\theta_m = 0$, a więc:

$$\theta = (T + T_1 + \ldots + T_{m-1})\,R\,.$$

Z tej własności funkcyj R wynikają ważne wnioski.

Może istnieć tylko jedna funkcya, posiadająca własności, przepisane dla funkcyj R. Jeżeli bowiem R jest funkcyą określoną, R' inną funkcyą tegoż gatunku, wtedy, na podstawie dowiedzionego twierdzenia musi być funkcya R' algebraicznie podzielna przez funkcyę R, t. j. być postaci GR, gdzie G jest funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Lecz z powodu zgodności stopni funkcyj R, R' względem spółczynników tych form, funkcya G nie może wcale spółczynników tych zawierać, a więc musi być tylko czynnikiem liczbowym. Ten czynnik liczbowy musi posiadać wartość 1, gdyż tak R' jak i R dla $f_1 = x_1^{m_1}$, $f_2 = x_2^{m_2}, \ldots, f_n = x_n^{m_n}$ przybiera wartość równą 1.

Funkcyę R nazywamy wypadkową form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i oznaczać ją będziemy symbolem:

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix}.$$

Iloczyn potęgowy P nazywać będziemy wyrazem głównym wypadkowej R.

Postać ogólna wszystkich funkcyj θ, posiadających własność zasadniczą względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jest $\theta = G.R$, gdzie R jest wypadkową tych form, G zaś jest funkcyą całkowitą ich spółczynników.

Funkcya całkowita F spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jest podzielna przez potęgę m-tą wypadkowej tych form, jeżeli funkcye:

$$F,\ \frac{\partial F}{\partial a_{nn}},\ \frac{\partial^2 F}{\partial a^2_{nn}},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1} F}{\partial a^{m-1}_{nn}}$$

posiadają własność zasadniczą.

W samej rzeczy, mamy najprzód $F = QR$, gdzie Q jest funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Wynika stąd:

$$Q\,\frac{\partial R}{\partial a_{nn}} = \frac{\partial F}{\partial a_{nn}} - R\,\frac{\partial Q}{\partial a_{nn}}\,.$$

Wyrażenie $Q\,\dfrac{\partial R}{\partial a_{nn}}$ posiada własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, gdy posiada ją $\dfrac{\partial F}{\partial a_{nn}}$. Ponieważ wszakże wyrażenie $\dfrac{\partial R}{\partial a_{nn}}$ tej własności nie posiada, bo nie zawiera żadnego wyrazu podzielnego przez P i nie znika tożsamościowo, jak to pokazuje wyraz $\dfrac{\partial P}{\partial a_{nn}}$, przeto musi Q posiadać własność zasadniczą. A wtedy jest:

$$Q = Q_1 R, \quad F = Q_1 R^2.$$

skąd wynika znów:

$$2\left(\frac{\partial R}{\partial a_{nn}}\right)^2 Q_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2_{nn}} + [R],$$

a przeto, gdy $m > 2$:

$$Q_1 = Q_2\, R, \qquad F = Q_2\, R^3$$

i t. d.

5. Dwa twierdzenia, udowodnione dla funkcyj posiadających własność zasadniczą, stosują się do formy $f_1 = a_{11}\, x_1^{m_1}$ zmiennej x_1. Albowiem każda funkcya całkowita θ spółczynnika a_{11}, posiadająca własność zasadniczą względem f_1, i nie osiągająca stopnia 1 względem a_{11}, albo nie zawierająca wyrazu podzielnego przez iloczyn potęgowy główny a_{11}, musi znikać tożsamościowo na podstawie tożsamości $\theta x_1^r = [f_1] = [a_{11}]$. Dalej posiada a_{11} własności, przepisane dla funkcyj R, gdyż $a_{11}\, x_1^{m_1} = f_1 = [f_1]$.

Okażemy, że twierdzenia te stosują się do jakiejkolwiek liczby n form, przyjąwszy, że stosują się już do $n-1$ form. Dowód twierdzeń będzie wtedy ogólnym, gdyż na tej drodze udowodniają się twierdzenia najprzód dla $n=2$, następnie dla $n = 3$ i t. d.

Przyjmijmy tedy, że każda funkcya całkowita spółczynników $n - 1$ form ogólnych, posiadających własność zasadniczą względem tych form i nie zawierająca żadnego wyrazu podzielnego przez iloczyn główny potęgowy, znikać musi tożsamościowo i że dla tych $n-1$ form możemy utworzyć wypadkową.

I. Należy okazać, że każde wyrażenie, posiadające własność zasadniczą względem n form ogólnych $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i nie zawierające żadnego wyrazu podzielnego przez iloczyn główny potęgowy P, znika tożsamościowo.

Niechaj θ będzie takiem wyrażeniem, $a^h_{kk} A$ niechaj oznacza zbiór jego wyrazów, zawierających najwyższą potęgę spółczynnika a_{kk}; θ i A, jako funkcye spółczynników $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ oznaczmy przez $\theta(a_{ki}, a_{\alpha i}, a_{\beta i}, \ldots, a_{\varepsilon i})$, $A(a_{ki}, a_{\alpha i}, a_{\beta i}, \ldots, a_{\varepsilon i})$, gdzie k, i są dwie jakiekolwiek liczby różne szeregu $1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ są liczbami $1, 2, \ldots, n$ po opuszczeniu liczby k.

Według założenia, znika tożsamościowo reszta funkcyi θ względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i zmiennej x_k; jest tedy:

$$\theta(-\overset{(i)}{f}_k, -\overset{(i)}{f}_\alpha, -\overset{(i)}{f}_\beta, \ldots, -\overset{(i)}{f}_\varepsilon = 0,$$

a stąd:

$$\theta(a_{ki}, -\overset{(i)}{f}_\alpha, -\overset{(i)}{f}_\beta, \ldots, -\overset{(i)}{f}_\varepsilon) = Q(a_{ki} + \overset{(i)}{f}_k).$$

Częścią składową wyrażenia $\theta(a_{ki}, -\overset{(i)}{f}_\alpha, -\overset{(i)}{f}_\beta, \ldots, -\overset{(i)}{f}_\varepsilon)$, zawierającą najwyższą potęgę spółczynnika a_{kk}, jest:

$$\overset{h}{a}_{kk}\, A(a_{ki}, -\overset{(i)}{f}_\alpha, -\overset{(i)}{f}_\beta, \ldots, -\overset{(i)}{f}_\varepsilon)$$

i jest jasnem, że Q albo nie przekracza stopnia $h - 1$ względem a_{kk}, gdy $h > 0$, albo znika tożsamościowo, gdy $h = 0$. W obu przypadkach porównanie spółczynników przy $\overset{h}{a}_{kk}$ po obu stronach powyższej tożsamości wykazuje, że wyrażenie:

$$A^0 = A(a_{ki}, -\overset{(i)}{f}_\alpha, -\overset{(i)}{f}_\beta, \ldots, -\overset{(i)}{f}_\varepsilon),$$

jest podzielne przez $\overset{m_k}{x}_k$.

Niechaj $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$ stają się dla $x_k = 0$ odpowiednio $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\varepsilon$ wyrażenia zaś:

$$g_\alpha - a_{\alpha i}\, \overset{m_\alpha}{x}_i, \quad g_\beta - a_{\beta i}\, \overset{m_\beta}{x}_i, \ldots$$

niechaj dla $x_i = 1$ przechodzą odpowiednio na następujące:

$$\overset{(i)}{g}_\alpha, \quad \overset{(i)}{g}_\beta, \ldots;$$

wtedy:

$$\overset{(i)}{f}_\alpha = \overset{(i)}{g}_\alpha + [x_k], \quad \overset{(i)}{f}_\beta = \overset{(i)}{g}_\beta + [x_k], \ldots.$$

a z wyrażenia na A^0 dla $x_k = 0$ otrzymujemy równanie:

$$A(a_{ki}, -\overset{(i)}{g}_\alpha, -\overset{(i)}{g}_\beta, \ldots, -\overset{(i)}{g}_\varepsilon) = 0.$$

Widzimy tedy, że reszta wyrażenia A względem form $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\varepsilon$ i zmiennej x_i znika, a stąd wyrażenie A posiada własność zasadniczą względem tych form, a ponieważ te formy są ogólnemi, przeto A musi być algebraicznie podzielne przez ich wypadkową:

$$R_k = \begin{bmatrix} g_\alpha, & g_\beta, & \ldots, & g_\varepsilon \\ x_\alpha, & x_\beta, & \ldots, & x_\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Niechaj będzie $A = R_k\, A_1$.

Reszta R^0_k wypadkowej R_k względem form $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$ i zmiennej x_i jest podzielna przez x_k, ponieważ dla $x_k = 0$ przechodzi na znikającą tożsamościowo resztę wypadkowej R_k względem $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\varepsilon$ i x_i. Lecz R^0_k nie może być podzielne przez x_k^2. Gdy bowiem b jest spółczynnikiem przy $x_k\, x_i^{m_i - 1}$ w formie f_i, to b w wypadkowej R_k nie zachodzi, a w reszcie R^0_k znajduje się tylko w wyrażeniu $f_i^{(i)}$. Jeżeli tedy resztę wyrażenia $\frac{\partial R_k}{\partial a_{ii}}$ względem $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$ i x_i oznaczymy przez R'_k, będzie:

$$\frac{d R^0_k}{db} = R'_k \frac{d(-f_i'^{(i)})}{db} = -x_k R'_k.$$

Wyrażenie $\frac{\partial R_k}{\partial a_{ii}}$ nie znika tożsamościowo, jak to pokazuje wyraz:

$$\frac{\partial}{\partial a_{ii}}\left(a_{\alpha\alpha}^{\frac{p_k}{m_\alpha}}\, a_{\beta\beta}^{\frac{p_k}{m_\beta}} \ldots a_{\varepsilon\varepsilon}^{\frac{p_k}{m_\varepsilon}}\right),$$

a więc nie może też posiadać własności zasadniczej względem $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\varepsilon$, gdyż nie posiada żadnego wyrazu podzielnego przez iloczyn główny potęgowy form $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\varepsilon$. Nie może tedy R'_k znikać dla $x_k = 0$, a więc i być podzielne przez x_k. A wtedy ani $\frac{dR_k^0}{db}$, ani R_k^0 nie jest podzielne przez x_k^2.

Jeżeli $m_k > 1$, A_1^0 zaś oznacza resztę wyrażenia A_1 względem $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$ i x_i, to $A^0 = A_1^0 R_k^0$ i A_1^0 musi być podzielne przez x_k, gdyż A^0 jest podzielne przez x_k^2, R_k^0 zaś jest podzielne tylko przez x_k. Reszta wyrażenia A_1 względem $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\varepsilon$ i x_i znika, przeto i A_1 jest podzielne przez R_k. Jeżeli napiszemy $A_1 = A_2 R_k$, będzie $A = A_2 R_k^2$.

Jeżeli $m_k > 2$, to można znów z wyrażenia A_2 wydzielić czynnik R_k i, prowadząc w dalszym ciągu powyższe rozumowania, dojść do związku:

$$A = T . R_k^{m_k}.$$

Jeżeli tedy θ zawiera wyrazy, w których zachodzą potęgi wyższe od $p_k - 1$ spółczynnika a_{kk}, to wszystkie te wyrazy muszą się znosić. Albowiem jest wtedy $h \geqslant p_k$, a podzielność algebraiczna wyrażenia A przez $R_k^{m_k}$ może zachodzić tylko w ten sposób, że A i T znikają tożsamościowo. Gdyż wypadkowa R_k zawiera wyraz:

$$a_{\alpha\alpha}^{\frac{p_k}{m_\alpha}}\, a_{\beta\beta}^{\frac{p_k}{m_\beta}} \ldots a_{\varepsilon\varepsilon}^{\frac{p_k}{m_\varepsilon}},$$

a więc $R_k^{m_k}$ zawiera wyraz:

$$a_{\alpha\alpha}^{p_\alpha}\, a_{\beta\beta}^{p_\beta} \ldots a_{\varepsilon\varepsilon}^{p_\varepsilon};$$

gdyby więc T nie znikało tożsamościowo, musiałaby część składowa $a^h{}_{kk} A$ wyrażenia θ zawierać nieznoszące się wzajemnie wyrazy podzielne przez iloczyn główny potęgowy P, co sprzeciwia się założeniu.

Ponieważ k można wybrać dowolnie, jest przeto jasnem, że w wyrażeniu θ albo wcale nie zachodzą wyrazy podzielne przez jednę z potęg $a_{11}^{p_1}, a_{22}^{p_2}, \ldots, a_{nn}^{p_n}$, albo znosić się muszą. Jeżeli weźmiemy tedy $k = n$, to okaże się, że wyraz A znikać musi tożsamościowo. Wyrażenie to bowiem nie osiąga stopnia p_1 względem spółczynnika a_{11}, z drugiej zaś strony jest podzielne algebraicznie przez wyrażenie $R_n^{m_n}$ stopnia p_1 względem a_{11}. A więc w wyrażeniu θ znosić się muszą wszystkie wyrazy, zawierające najwyższą potęgę spółczynnika a_{nn}, a zatem wogóle wszystkie wyrazy.

II. Utworzyć wypadkową n form ogólnych.

Dla dwóch form można wypadkową utworzyć odrazu znanym sposobem przy pomocy teoryi funkcyj symetrycznych.

Wprowadźmy dla prostoty oznaczenia:

$$m_1 = n, \quad m_2 = m,$$

$$f_1 = a_0\, x_1^n + a_1\, x_1^{n-1} x_2 + a_2\, x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n\, x_n^2,$$

$$f_2 = b_0\, x_1^m + b_1\, x_1^{m-1} x_2 + b_2\, x_1^{m-2} x_2^2 + \ldots + b_m\, x_2^m$$

$$f_2(x) = f_2(x, 1) = b_0\, x^m + b_1\, x^{m-1} + \ldots + b_m;$$

przyjmijmy, że n jest różne od zera, że m może przyjmować i wartość zero; niechaj dalej $z_1, z_2, \ldots, z_n$ będą wielkości nieoznaczone; $\sigma_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$; $\sigma_2 = z_1 z_2 + \ldots$; $\ldots \sigma_n = z_1 z_2 \ldots z_n$—ich funkcye symetryczne elementarne. Przedstawmy iloczyn:

$$E = f_2(z_1)\, f_2(z_2) \ldots f_2(z_n),$$

jako funkcyę całkowitą $F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ wyrażeń $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Funkcya ta jest stopnia m względem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, a więc jest $a_0^m F$ funkcyą całkowitą jednorodną:

$$G\,(a_0,\ a_0\,\sigma_1,\ a_0\,\sigma_2,\ \ldots,\ a_0\,\sigma_n)$$

stopnia m względem $a_0,\ a_0\,\sigma_1,\ a_0\,\sigma_2,\ \ldots$ Jeżeli napiszemy:

$$R = G\,(a_0,\ -a_1,\ a_2,\ \ldots,\ \pm\,a_n),$$

to R będzie szukaną wypadkową. Albowiem R jest funkcyą całkowitą spółczynników form f_1 i f_2, jednorodną i stopnia $m{=}p_1$ co do spółczynników pierwszej z nich, jednorodną i stopnia $n{=}p_2$ co do spółczynników drugiej. Potęga b_m^n ma w funkcyi E lub F spółczynnik 1, a zatem w funkcyi G spółczynnik a_0^m, tak że iloczyn potęgowy główny $a_0^m\,b_m^n$ form f_1, f_2 w wyrażeniu R ma spółczynnik 1.

Forma R posiada własność zasadniczą, Jeżeli bowiem w formie F zamiast b_m napiszemy $b_m - f_2\,(z_i)$, to rezultat zniknie tożsamościowo, gdyż $F{=}E$, a z drugiej strony, rozwinięty według $f_2\,(z_i)$ przyjmie postać:

$$F - F_1\,(z_i)\,f_2\,(z_i),$$

gdzie F_1 jest funkcyą całkowitą wielkości $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n,\ z_i$, stopnia m względem $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$. Jeżeli przeto wyrażenie $F{-}F_1\,(x)\,f_2\,(x)$, przez podzielenie go przez $x^n{-}\sigma_1\,x^{n-1} + \sigma_2\,x^{n-2}\ldots\pm\sigma_n$, sprowadzimy do postaci:

$$J\,(x^n - \sigma_1\,x^{n-1} + \ldots \pm \sigma_n) + J',$$

gdzie J' nie osiąga stopnia n względem zmiennej x, wtedy J' znika dla $x = z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$, a więc znika tożsamościowo. Będzie tedy tożsamościowo względem $x,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$:

$$F = F_1\,(x)\,f_2\,(x) + J\,(x^n - \sigma_1\,x^{n-1} + \ldots \pm \sigma_n).$$

Jeżeli $m{>}0$, to J nie może przekroczyć stopnia $m-1$ względem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$; $a_0^m\,F_1,\ a_0^{m-1}J$ są funkcyami całkowitemi jednorodnemi:

$$\psi\,(a_0,\ a_0\,\sigma_1,\ a_0\,\sigma_2,\ \ldots),\quad \varphi\,(a_0,\ a_0\,\sigma_1,\ a_0\,\sigma_2,\ \ldots),$$

wielkości $a_0, a_0\,\sigma_1, a_0\,\sigma_2, \ldots$ odpowiednio stopnia m i $m{-}1$. Po pomnożeniu poprzedzającej tożsamości przez a_0^m, będzie:

$$G{=}\varphi\,(a_0,\ a_0\,\sigma_1, \ldots)\,(a_0\,x^n{-}a_0\,\sigma_1\,x^{n-1} + \ldots \pm a_0\,\sigma_n) + \psi\,(a_0,\ a_0\,\sigma_1, \ldots)\,f_2\,(x),$$

a po zastąpieniu wyrażeń $a_0\,\sigma_1,\ a_0\,\sigma_2, \ldots$ przez $-a_1,\ a_2, \ldots$ znajdziemy:

$$R = \varphi\,(a_0,\ -a_1, \ldots)\,f_1\,(x,1) + \psi\,(a_0,\ -a_1, \ldots)\,f_2\,(x,1).$$

Gdy $m{=}0$ należy położyć $\varphi{=}0,\ \psi{=}b_0^{n-1}$.

W samej rzeczy tedy, jeżeli x zastąpimy przez x_1, a tożsamość uczynimy jednorodną przez wprowadzenie x_2, będzie:

$$R\,x_2^{\,r} = [f_1,\ f_2].$$

Wypadkowa R ma spółczynniki całkowito-liczbowe. Iloczyn potęgowy $\overset{p_1}{a_{12}}\ \overset{p_2}{a_{21}}$ ma w wypadkowej R spółczynnik $(-1)^p$, gdyż F i G dla $f_2{=}b_0\,x_1^m$ redukuje się do $b_0^n\,\sigma_n^m,\ b_0^n\,(a_0\,\sigma_n)^m$, a więc R do:

$$b_0^n\,((-1)^n\,a_n)^m = (-1)^p\,a_n^m\,b_0^n\,.$$

Różnica:

$$G\,(a_0,\ -a_1,\ a_2,\ \ldots) - G\,(a_0,\ a_0\,\sigma_1,\ a_0\,\sigma_2,\ \ldots),$$

daje się przedstawić jako funkcya całkowita wyrażeń:

$$a_1 + a_0\,\sigma_1,\quad a_2 - a_0\,\sigma_2,\ \ldots,\ a_n \pm a_0\,\sigma_n,$$

zawierająca je w wymiarze co najmniej pierwszym. Jeżeli funkcyę taką oznaczymy ogólnie przez:

$$\Gamma\,(a_1 + a_0\,\sigma_1,\quad a_2 - a_0\,\sigma_2,\ \ldots),$$

będzie tożsamościowo:

$$R = a_0^m\,f_2\,(z_1)\,f_2\,(z_2)\,\ldots\,f_2\,(z_n) + \Gamma\,(a_1{+}a_0\,\sigma_1,\ a_2{-}a_0\,\sigma_2,\ \ldots)$$

Wypadkową form:

$$a_0\,(x_1{-}z_1\,x_2)\,(x_1{-}z_2\,x_2)\ldots(x_1{-}z_n\,x_2)\quad \text{i}\quad f_2$$

jest:

$$a_0^m\,f_2\,(z_1)\,f_2\,(z_2)\,\ldots\,f_2\,(z_n).$$

Niechaj będzie teraz $n > 2$.

Można wypadkową n form ogólnych $f_1, f_2, \ldots, f_n$ utworzyć najprzod w przypadku, gdy ostatnia forma f_n jest liniową. Niechaj będzie:

$$f_n = u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + \ldots + u_n\,x_n = u_x$$

i dla skrócenia:

$$m_1\, m_2 \ldots m_{n-1} = p_{n-1} = \nu;$$

niechaj t będzie wielkością nieoznaczoną; połóżmy:

$$u_n + tu_{n-1} = U;\; u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_{n-2}\, x_{n-2} = u$$

$$f_i\,(Ux_1,\, Ux_2, \ldots,\, Ux_{n-2},\, -tu + u_n\, x_{n-1},\, -u - u_{n-1}\, x_{n-1}) = g_i\,.$$

Ponieważ, według przypuszczenia, znaną jest wypadkowa $n-1$ form ogólnych, można przeto utworzyć wypadkową L form $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ względem $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Wypadkowa L jest względem spółczynników formy f_i jednorodną i stopnia $\frac{\nu}{m_i}$, gdy $i < n$, względem zaś spółczynników formy f_n lub względem nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jednorodną, stopnia $\nu\,(n-1)$ i czyniącą zadość tożsamości:

$$L\, x_1^{\,r} = [g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}]\,.$$

Jeżeli x_{n-1} zastąpimy przez $x_{n-1} - tx_n$, to g_i przejdzie na:

$$f_i\,(Ux_1,\, Ux_2, \ldots,\, Ux_{n-2},\, Ux_{n-1} - tf_n,\, Ux_n - f_n) = U^{m_i} f_i + [f_n]$$

i będzie:

$$Lx_1^{\,r} = [U^{m_1} f_1 + [f_n],\; U^{m_2} f_2 + [f_n], \ldots] = [f_1, f_2, \ldots, f_n].$$

L posiada tedy własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Ponieważ L względem t nie jest stopnia wyższego nad $\nu\,(n-1)$, to za pomocą dzielenia algebraicznego iloczynu $u_{n-1}^{\nu\,(n-1)} L$ przez $U^{\nu\,(n-2)}$ można wyznaczyć funkcyę całkowitą B nieoznaczonej t i spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ taką, że wyrażenie:

$$\Delta = u_{n-1}^{\nu\,(n-1)} L - U^{\nu\,(n-2)} B\,,$$

będzie względem t stopnia niższego niż $\nu\,(n-2)$. Wyrażenie to musi znikać tożsamościowo, gdyż reszta jego względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i x_1 jest podzielna przez $U^{\nu\,(n-1)}$ i nie dosięga względem t stopnia $\nu\,(n-2)$; znika więc tożsamościowo, Δ posiada tedy własność zasadniczą względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Jeżeli Δ_0 oznacza zbiór wszystkich wyrazów w Δ, które zawierają jako czynnik iloczyn potęgowy $a_{11}^{p_1}\, a_{22}^{p_2} \ldots a_{n-1\, n-1}^{p_{n-1}}$, wtedy Δ redukuje się do tych wyrazów, jeżeli położymy:

$$f_1 = a_{11}\, x_1^{m_1},\; f_2 = a_{22}\, x_2^{m_2}, \ldots;\; f_{n-1} = a_{n-1\, n-1}\, x_{n-1}^{m_{n-1}}\,.$$

Przeto L staje się wypadkową form:

$$a_{11}\, U^{m_1} x_1^{m_1}, \ldots,\; a_{n-2\, n-2}\, U^{m_{n-2}} x^{m_{n-2}},\; a_{n-1\, n-1}\, (-tu + u_n\, x_{n-1})^{m_{n-1}}\,,$$

a więc i podzielną przez $U^{\nu\,(n-2)}$. Jest przeto i Δ_0 podzielne przez $U^{\nu\,(n-2)}$, a więc tożsamościowo zerem, ponieważ nie dosięga stopnia $\nu\,(n-2)$ względem t. A zatem Δ nie zawiera wyrazów podzielnych przez iloczyn potęgowy główny form $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Z tożsamości:

$$\Delta = u_{n-1}^{\nu\,(n-1)} L - U^{\nu\,(n-2)} B = 0,$$

wynika, że B jest podzielne przez $u_{n-1}^{\nu\,(n-1)}$. Jeżeli położymy tedy:

$$B = u_{n-1}^{\nu\,(n-1)}\, \theta\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

będzie:

$$L = U^{\nu\,(n-2)}\, \theta\,,$$

θ będzie szukaną wypadkową form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Albowiem θ jest funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i posiada własność zasadniczą, gdyż reszta wyrażenia L względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i x_1, a więc i reszta wyrażenia θ znika tożsamościowo; forma θ jest względem spółczynników formy f_i dla każdego i jednorodną i stopnia p_i. Dla $f_n = x_n$ staje się L, a więc i θ wypadkową R_n form:

$$f_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0),\;\; f_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0), \ldots,\; f_{n-1}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0);$$

θ zawiera tedy potęgę $u_n^{\,\nu}$ ze spółczynnikiem R_n, a więc iloczyn główny potęgowy $a_{11}^{p_1}\, a_{22}^{p_2} \ldots u_n^{\,\nu}$ ze spółczynnikiem 1, gdyż $a_{11}^{p_1}\, a_{22}^{p_2} \ldots a_{n-1\, n-1}^{p_{n-1}}$ jest wyrazem głównym wypadkowej R_n.

Niechaj f będzie formą ogólną zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stopnia dowolnego m; połóżmy dla skrócenia:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_i} = \theta_i\,;\; v_1\, x_1 + v_2\, x_2 + \ldots + v_n\, x_n = v_x\,;$$

$$w_1\, x_1 + w_2\, x_2 + \ldots + w_n\, x_n = w_x\,,$$

gdzie $v_1, v_2, \ldots, w_1, w_2, \ldots$ są wielkościami nieoznaczonemi. Jeżeli tożsamości:

$$\theta\, x_n^r = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_x],$$

nadamy postać:

$$\theta\, x_n^r = Q\, u_x + [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}],$$

gdzie Q jest funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to przez różniczkowanie względem u_i znajdziemy:

$$\theta_i\, x_n^r = Q\, x_i + [f_1, f_2, \ldots, f_n],$$

a wprowadzenie wyrażeń $\theta_1 x_n^r, \theta_2 x_n^r, \ldots, \theta_n x_n^r$ prowadzi do tożsamości:

$$f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)\, x_n^{m_r} = Q^m f + [f_1, f_2, \ldots, f_n] = [f, f_1, f_2, \ldots, f_n].$$

Jeżeli przeto g i g' oznaczają formy dwójkowe zmiennych X, Y stopnia ν i $m(\nu-1)$, powstające z form θ i $f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ po zastąpieniu wielkości $u_1, u_2, \ldots, u_n$ przez $Xv_1 + Yw_1, Xv_2 + Yw_2, \ldots, Xv_n + Yw_n$: i jeżeli:

$$H = \begin{bmatrix} g, & g' \\ X, & Y \end{bmatrix},$$

jest wypadkową tych form względem X, Y, to zachodzą tożsamości:

$$x_n^r\, g = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, Xv_x + Yw_x],$$

$$x_n^{m_r}\, g' = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, Xv_x + Yw_x],$$

$$H Y^\varrho = [g, g'].$$

Z tożsamości tych wynika:

$$H Y^\varrho x_n^{mr} = [x_n^{mr} g, x_n^{mr} g'] = [f, f_1, \ldots, f_{n-1}, Xv_x + Yw_x],$$

a zastępując X, Y przez $-w_x, v_x$ otrzymujemy:

$$H v_x^\varrho x_n^{mr} = [f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}].$$

Na podstawie tej tożsamości znika reszta wyrażenia H względem $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ i x_n; H przeto posiada własność zasadniczą względem form $f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$

Jeżeli za f przyjmiemy formę liniową ogólną:

$$s_x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n,$$

to H musi być algebraicznie podzielne przez wypadkową $\theta(s_1, s_2, \ldots)$ form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, s_x$; niechaj będzie:

$$H = M\theta(s_1, s_2, \ldots).$$

Ponieważ H zawiera nieoznaczone $s_1, s_2, \ldots$ jednorodnie i w stopniu ν, to nieoznaczone te w wyrażeniu M już nie zachodzą. Wyrażenie M nie znika tożsamościowo, albowiem już dla pewnych form szczególnych i dla $v_1 = v_2 = \ldots = v_{n-1} = 0$, $v_n = 1$, $w_n = 0$ przybiera wartość M_0, różną od zera; można np. obrać formy:

$$f_1 = (x_1 + \xi_1 x_n)(x_1 + \xi_2 x_n) \ldots,$$

$$f_2 = (x_2 + \eta_1 x_n)(x_2 + \eta_2 x_n) \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n-1} = (x_{n-1} + \vartheta_1 x_n)(x_{n-1} + \vartheta_2 x_n) \ldots,$$

w których $\xi_1, \xi_2, \ldots$ są nieoznaczonemi w liczbie m_1; $\eta_1, \eta_2, \ldots$ innemi nieoznaczonemi w liczbie m_2 i t. d. Dla form tych z tożsamości:

$$\theta\, x_n^r = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_x],$$

skoro położymy:

$$x_1 = -\xi_\alpha,\ x_2 = -\eta_\beta, \ldots, x_{n-1} = -\vartheta_\varepsilon,\ x_n = 1,$$

wypływa, że θ jest algebraicznie podzielne przez $u_n - \xi_\alpha u_1 - \eta_\beta - \ldots - \vartheta_\varepsilon u_{n-1}$. Jeżeli przeto $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$ są wartości w liczbie ν, które przybiera wyrażenie $\xi_\alpha u_1 + \eta_\beta u_2 + \ldots + \vartheta_\varepsilon u_{n-1}$, gdy α przebiega wartości $1, 2, \ldots, m_1$, β—wartości $1, 2, \ldots, m_2, \ldots$, ε—wartości $1, 2, \ldots, m_{n-1}$, to θ będzie podzielne przez każdą z różnic $u_n - U_1, u_n - U_2, \ldots, u_n - U_\nu$, a więc i przez ich iloczyn. Ale θ jest stopnia ν względem u_n, u_n^ν zaś, jako iloczyn potęgowy główny form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_x$, ma w wyrażeniu θ spółczynnik 1, a zatem:

$$\theta = (u_n - U_1)(u_n - U_2) \ldots (u_n - U_\nu).$$

Jeżeli położymy tedy:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-1} = 0,\ s_n = 1,$$

będzie:

$$\theta(s_1, s_2, \ldots) = 1, \quad H = M_0,$$

M_0 będzie wypadkową form:

$$g = (X - W_1 Y)(X - W_2 Y) \ldots (X - W_n Y), \quad g' = \frac{\partial g}{\partial X},$$

gdzie W_i powstaje z U_i przez zamianę nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ na nieoznaczone $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. Będzie przeto:

$$M_0 = g'(W_1, 1)\, g'(W_2, 1) \ldots g'(W_\nu, 1).$$

Stosownie do tego czy $\nu > 1$, albo $\nu = 1$, znajdziemy:

$$M_0 = (-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)} \Pi (W_\lambda - W_\mu)^2 \quad \text{albo} \quad M_0 = 1,$$

gdzie znak iloczynu rozciąga się na wszystkie kombinacye λ, μ klasy drugiej liczb $1, 2, \ldots, \nu$.

Niechaj teraz f_n będzie stopnia dowolnego m_n.

Jeżeli przyjmiemy $f = f_n$, to H będzie funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, mającą własność zasadniczą; H przeto musi zawierać, jako czynnik szukaną wypadkową, i trzeba tylko uwolnić H od czynników zbytecznych.

Niechaj

$$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}; \quad y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}; \ldots y_{\nu 1}, y_{\nu 2}, \ldots, y_{\nu n},$$

$$s_1, s_2, \ldots, s_n; \; t_1, t_2, \ldots, t_n,$$

będą nieoznaczone; połóżmy dla skrócenia:

$$s_1 y_{i1} + s_2 y_{i2} + \ldots + s_n y_{in} = S_i,$$

$$t_1 y_{i1} + t_2 y_{i2} + \ldots + t_n y_{in} = T_i,$$

$$f_n(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}) = f_{ni},$$

$$S_1 S_2 \ldots S_\nu = S = S_1 Q_1 = S_2 Q_2 = \ldots = S_\nu Q_\nu.$$

Iloczyn

$$K = S^{p - m_n} f_{n1} f_{n2} \ldots f_{n\nu},$$

daje się przedstawić jako funkcya całkowita jednorodna stopnia p-tego $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots)$ spółczynników $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ przy rozmaitych iloczynach potęg nieoznaczonych $s_1, s_2, \ldots, s_n$ w wyrażeniu S i przy pomocy tego przedstawienia potrafimy wydzielić szukaną wypadkową z wyrażenia H.

Iloczyn K jako iloczyn ν wyrażeń:

$$Q_1^{m_n} f_{n1}, \; Q_2^{m_n} f_{n2}, \ldots, Q_\nu^{m_n} f_{n\nu},$$

można najprzód za pomocą wzorów N e w t o n a przedstawić przez ν pierwszych sum potęgowych:

$$M_1 = Q_1^{m_n} f_{n1} + Q_2^{m_n} f_{n2} + \ldots + Q_\nu^{m_n} f_{n\nu},$$

$$M_2 = Q_1^{2m_n} f_{n1}^2 + Q_2^{2m_n} f_{n2}^2 + \ldots + Q_\nu^{2m_n} f_{n\nu}^2,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$M_\nu = Q_1^{\nu m_n} f_{n1}^\nu + Q_2^{\nu m_n} f_{n2}^\nu + \ldots + Q_\nu^{\nu m_n} f_{n\nu}^\nu,$$

a mianowicie jako agregat wyrazów:

$$\mathfrak{G} = c M_1^{\mathfrak{a}} M_2^{\mathfrak{b}} \ldots M_\nu^{\mathfrak{n}},$$

gdzie c jest czynnikiem liczbowym; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{n}$ są liczbami całkowitemi nieujemnemi, czyniącemi zadość równaniu:

$$\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} + \ldots \nu\mathfrak{n} = \nu.$$

Aby wyrazić $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ przez $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ połóżmy:

$$Q_1^k T_1^k + Q_2^k T_2^k + \ldots + Q_\nu^k T_\nu^k = L_k,$$

i niechaj rozwinięcie funkcyi f_n^k według $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie postaci:

$$f_n^k = \Sigma C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}\, x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\varepsilon,$$

gdzie $C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ jest funkcyą całkowitą całkowito-liczbową jednorodną stopnia k spółczynników formy f_n, suma zaś rozciąga się na wszystkie liczby całkowite nieujemne $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, czyniące zadość równaniu:

$$\alpha + \beta + \ldots + \varepsilon = k m_n.$$

Ponieważ

$$x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\varepsilon = \frac{1}{(k m_n)!} \frac{\partial^{k m_n} (t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n)^{k m_n}}{\partial t_1^\alpha \partial t_2^\beta \ldots \partial t_n^\varepsilon},$$

przeto:

$$f_n{}^k = \frac{1}{(km_n)!} \Sigma C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \frac{\partial^{km_n} (t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots)^{km_n}}{\partial t_1{}^\alpha \partial t_2{}^\beta \ldots \partial t_n{}^\varepsilon},$$

a stąd:

$$Q_i{}^{km_n} f_{ni}{}^k = \frac{1}{(km_n)!} \Sigma C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \frac{\partial^{km_n} Q_i{}^{km_n} T_i{}^{km_n}}{\partial t_1{}^\alpha \partial t_2{}^\beta \ldots \partial t_n{}^\varepsilon}.$$

Sumowanie według i od $i=1$ do $i=\nu$ daje:

$$M_k = \frac{1}{(km_n)!} \Sigma C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \frac{\partial^{km_n} L_{km_n}}{\partial t_1{}^\alpha \partial t_2{}^\beta \ldots \partial t_n{}^\nu}.$$

L_{km_n} jako suma potęg wyrażeń $Q_1 T_1, Q_2 T_2, \ldots, Q_\nu T_\nu$ daje się przedstawić przez funkcye symetryczne $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$, a mianowicie jako agregat wyrazów $c V_1{}^\varrho V_2{}^\sigma \ldots V_\nu{}^\tau$, w których c jest spółczynnikiem liczbowym, a wykładniki czynią zadość równaniu $\beta+2\sigma+\ldots+\nu\tau=km_n$. Jeżeli przeto $\left(t \frac{\partial}{\partial s}\right)$ oznacza działanie:

$$t_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \ldots + t_n \frac{\partial}{\partial s_n},$$

będzie:

$$V_i = \frac{1}{i!} S^{(i-1)} \left(t \frac{\partial}{\partial s}\right)^i S,$$

V_i jest funkcyą całkowitą jednorodną stopnia i względem spółczynników $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$, przeto L_{km_n} jest funkcyą całkowitą jednorodną stopnia km_n tychże spółczynników, zawierającą nieoznaczone $t_1, t_2, \ldots$ jednorodnie w stopniu km_n, nieoznaczone zaś $s_1, s_2, \ldots$ jednorodnie w stopniu $k(p-m_n)$.

Po wykonaniu różniczkowań względem $t_1, t_2, \ldots, t_n$, będzie M_k wyrażeniem całkowitem jednorodnem stopnia km_n spółczynników $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$, stopnia $k(p-m_n)$ względem $s_1, s_2, \ldots, s_n$ i stopnia k względem spółczynników formy f_n.

Po podstawieniu do wyrazów $\mathfrak{G}$ formy K zamiast $M_1, M_2, \ldots$, otrzymanych wyrażeń, znajdziemy żądane przedstawienie:

$$K = N(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots),$$

gdzie N jest funkcyą całkowitą jednorodną stopnia p spółczynników $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$

zawierającą w swych spółczynnikach nieoznaczone $s_1, s_2, \ldots$ jednorodnie w stopniu $p(\nu-1)$, spółczynniki zaś formy f_n jednorodnie i w stopniu ν.

Dajmy, że po rozwinięciu wyrażenia $\theta(v_1 X+w_1, v_2 X+w_2, \ldots)$ według potęg zmiennej X jest:

$$\theta(v_1 X+w_1, v_2 X+w_2, \ldots) = C_0 X^\nu + C_1 X^{\nu-1} + \ldots + C_\nu;$$

oznaczmy przez $A, A', \ldots$ spółczynniki w wyrażeniu $\theta(s_1, s_2, \ldots)$ przy tych samych potęgach ilości $s_1, s_2, \ldots$ jakie mają ilości $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ w wyrażeniu S. Jeżeli poprzedzającą tożsamość dla K pomnożymy przez $C_0{}^{p(\nu-1)}$, będzie:

$$(C_0{}^{\nu-1} S)^{p-m_n} C_0{}^{p-m_n} f_{n1} f_{n2} \ldots f_{n\nu} = N(C_0{}^{\nu-1}\mathfrak{A}, C_0{}^{\nu-1}\mathfrak{A}', \ldots).$$

Połóżmy teraz:

$$y_{ik} = \theta_k (v_1 z_i + w_1, v_2 z_i + w_2, \ldots),$$

gdzie $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ są nieoznaczone. Jeżeli $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$ są funkcye symetryczne elementarne tych nieoznaczonych, $\Gamma(C_1+C_0\sigma_1, C_2-C_0\sigma_2, \ldots)$ jest ogólnie funkcyą całkowitą wyrażeń $C_1+C_0\sigma_1, C_2-C_0\sigma_2, \ldots, C_\nu \pm C_0\sigma_\nu$, której wyrazy są przynajmniej stopnia pierwszego względem tych wyrażeń, będzie:

$$C_0{}^{p-m_n} f_{n1} f_{n2} \ldots f_{n\nu} = H + \Gamma(C_1+C_0\sigma_1, \ldots),$$

$$C_0{}^{\nu-1} S = M\theta(s_1, s_2, \ldots) + \Gamma(C_1+C_0\sigma_1, \ldots),$$

a więc także:

$$C_0{}^{\nu-1}\mathfrak{A} = MA + \Gamma(C_1+C_0\sigma_1, \ldots),$$

$$C_0{}^{\nu-1}\mathfrak{A}' = MA' + \Gamma(C_1+C_0\sigma_1, \ldots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

a rezultat przybiera postać:

$$M^{p-m_n} \theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots) H = N(MA, MA', \ldots) + \Gamma(C_1+C_0\sigma_1, \ldots),$$

lub

$$M^{p-m_n} (\theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots) H - M^{m_n} N(A, A', \ldots)) = \Gamma(C_1+C_0\sigma_1, C_2-C_0\sigma_2, \ldots).$$

Ponieważ to równanie musi być tożsamościowe względem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, a także względem $C_0\sigma_1, C_0\sigma_2, \ldots$, więc po zastąpieniu tych ostatnich wyrażeń przez $-C_1, C_2, \ldots$, otrzymamy:

$$M^{p-m_n}\left(\theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots)\, H - M^{m_n} N(A, A', \ldots)\right) = 0,$$

lub

$$\theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots)\, H = M^{m_n} N(A, A', \ldots).$$

Na podstawie tej tożsamości, wyrażenia:

$$M^{m_n} N,\ M^{m_n} \frac{\partial N}{\partial s_n},\ \ldots,\ M^{m_n} \frac{\partial^{p-m_n-1} N}{\partial s_n^{p-m_n-1}},$$

są wszystkie podzielne przez $\theta(s_1, s_2, \ldots)$ i posiadają własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, s_x$. Ponieważ wszakże wyrażenie M^{m_n} nie może posiadać własności zasadniczej, gdyż nie zawiera $s_1, s_2, \ldots$ i nie znika tożsamościowo, przeto wyrażenia:

$$N,\ \frac{\partial N}{\partial s_n},\ \ldots,\ \frac{\partial^{p-m_n-1} N}{\partial s_n^{p-m_n-1}},$$

posiadać muszą tę własność i N jest algebraicznie podzielne przez $\theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots)$. Kładąc:

$$N(A, A', \ldots) = \theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots)\, R,$$

otrzymujemy:

$$H = M^{m_n} R,$$

gdzie R jest szukaną wypadkową form $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Albowiem R jest funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, posiadającą własność zasadniczą względem tych form, gdyż własność tę posiada H, nie posiada jej zaś M^{m_n}. Względem spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $N(A, A', \ldots)$ $\theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots)$ są wyrażeniami jednorodnemi i odpowiednio stopni:

$$\nu p_1, \nu p_2, \ldots, \nu p_{n-1}, \nu;\ (p-m_n)\frac{\nu}{m_1},\ (p-m_\nu)\frac{\nu}{m_2},\ \ldots (p-m_\nu)\frac{\nu}{m_{n-1}},\ 0,$$

a więc R jest także ze względu na spółczynniki form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funkcyą jednorodną, o stopniach względem tych spółczynników równych odpowiednio: $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$. Spółczynnik C przy $\overset{\nu}{a_{nn}} = \overset{p_n}{a_{nn}}$ w wyrażeniu H, ze względu na tożsamość:

$$H = C_0^{p-m_n} \prod_i f_n(\theta_1(v_1 z_i + w_1, \ldots) \ldots) + \Gamma(C_1 + C_0\sigma_1, \ldots),$$

jest postaci:

$$C_0^{p-m_n} \prod_i \theta_n^{m_n}(v_1 z_i + w_1, v_2 z_i + w_2, \ldots) + \Gamma(C_1 + C_0\sigma_1, \ldots);$$

ponieważ wszakże:

$$C_0^{\nu-1} \Pi\, \theta_n (v_1 z_i + w_1, v_2 z_i + w_2, \ldots) = M\theta(0, 0, \ldots 1) + \Gamma(C_1 + C_0\sigma_1, \ldots)$$
$$= MR_n + \Gamma(C_1 + C_0\sigma_1, \ldots),$$

to wynika stąd:

$$C = M^{m_n} R_n^{m_n} + \Gamma(C_1 + C_0\sigma_1, \ldots).$$

a po zastąpieniu wyrażeń $C_0\sigma_1, C_0\sigma_2, \ldots$ przez $-C_1, C_2, \ldots$:

$$C = M^{m_n} R_n^{m_n}.$$

R przeto ma spółczynnik $R_n^{m_n}$ przy $\overset{p_n}{a_{nn}}$ i wartość 1, gdy położymy $f_1 = x_1^{m_1}$, $f_2 = x_2^{m_2}, \ldots, f_n = x_n^{m_n}$.

Tym sposobem udowodniliśmy dwa twierdzenia główne dla jakiejkolwiek liczby form, posiadających własność zasadniczą.

Wypadkowa R n form ogólnych ma spółczynniki całkowito-liczbowe. Jeżeli bowiem zachodzi to dla wypadkowej $n-1$ form, to θ jest formą całkowito-liczbową i nadto pierwotną, jak to pokazuje spółczynnik 1 wyrazu głównego; w takim zaś razie H i M muszą być całkowito-liczbowemi. Forma M jest także pierwotna, jak to wskazuje rozebrany wyżej przypadek szczególny, musi być przeto $\frac{H}{M^{m_n}} = R$ być formą całkowito-liczbową. A że wypadkowa dwóch form jest całkowito-liczbową, więc twierdzenie jest prawdziwem dla jakiejkolwiek liczby form.

Wypadkową n form liniowych:

$$f_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n,$$
$$f_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n,$$

jest ich wyznacznik:

$$D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Jest bowiem

$$Dx_n = \frac{\partial D}{\partial a_{1n}} f_1 + \frac{\partial D}{\partial a_{2n}} f_2 + \ldots + \frac{\partial D}{\partial a_{nn}} f_n ,$$

wyznacznik D zaś jest względem spółczynników każdej pojedyńczej formy liniowo-jednorodnym i zawiera iloczyn potęgowy główny $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ ze spółczynnikiem 1.

Jeżeli formy $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ są liniowe i przyjmiemy, że od $i=1$ do $i=n$ jest:

$$f_i = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11}, & a_{n-12}, & \ldots, & a_{n-1n} \\ u_1, & u_2, & \ldots, & u_n \end{vmatrix} = a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \ldots + a_n\, u_n ,$$

będzie:

$$\begin{bmatrix} f_1, & f_2, & \ldots, & f_{n-1}, & f_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix} = f_n\, (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

6. W określeniu wypadkowej n form zakłada się z góry oznaczony porządek tych form i zmiennych; powstaje tedy pytanie, w jaki sposób zmienia się wypadkowa, jeżeli zmienimy porządek form lub zmiennych, albo jedno i drugie?

Niechaj $\alpha, \beta, \ldots \sigma$; $\alpha', \beta', \ldots, \sigma'$ będą dwie jakiekolwiek przemiany liczb $1, 2, \ldots, n$, i niechaj

$$R' = \begin{bmatrix} f_\alpha, & f_\beta, & \ldots, & f_\sigma \\ x_{\alpha'}, & x_{\beta'}, & \ldots, & x_{\sigma'} \end{bmatrix} .$$

Wyrażenie R' posiada własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i te same stopnie względem spółczynników, co forma R, może tedy różnić się tylko czynnikiem liczbowym od R, i będzie:

$$R' = c\, R .$$

Czynnik c jest spółczynnikiem iloczynu potęgowego głównego form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ w wyrażeniu R'. Jeżeli w szczególności:

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \; \ldots, \; \sigma' = \sigma,$$

wtedy wyrazy główne wyrazu R' i R są jednakowe, $c=1$ i $R'=R$.

Równanie to pozwala na wyznaczenie zbioru wszystkich wyrazów wypadkowej R, zawierających dany iloczyn potęgowy $a_{\lambda\lambda}^{p_\lambda}\, a_{\mu\mu}^{p_\mu} \ldots a_{\sigma\sigma}^{p_\sigma}$, jako czynnik. Jeżeli mianowicie $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ są liczbami szeregu $1, 2, \ldots, n$, różnemi od $\lambda, \mu, \ldots, \sigma$; $f_\alpha^0, f_\beta^0, \ldots, f_\varepsilon^0$ — formami, powstającemi z form $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$ przez uczynienie $x_\lambda, x_\mu, \ldots, x_\sigma$ równemi zeru, $R_{\lambda, \mu, \ldots, \sigma}$ — wypadkową:

$$R_{\lambda, \mu, \ldots, \sigma} = \begin{bmatrix} f_\alpha^0, & f_\beta^0, & \ldots, & f_\varepsilon^0 \\ x_\alpha, & x_\beta, & \ldots, & x_\varepsilon \end{bmatrix} ,$$

to szukanym zbiorem jest:

$$a_{\lambda\lambda}^{p_\lambda}\, a_{\mu\mu}^{p_\mu} \ldots a_{\sigma\sigma}^{p_\sigma}\, R_{\lambda\mu\ldots\sigma}^{m_\lambda m_\mu \ldots m_\sigma} .$$

Albowiem spółczynnik przy $a_{\sigma\sigma}^{p_\sigma}$ w R', a więc i w R, jest—i dla $n=2$—równy $R_\sigma^{m_\sigma}$, spółczynnik przy $a_{\varrho\varrho}^{p_\varrho}\, a_{\sigma\sigma}^{p_\sigma}$, zlewający się ze spółczynnikiem przy $a_{\varrho\varrho}^{p_\varrho}$ w $R_\sigma^{m_\sigma}$ lub z m_σ-tą potęgą spółczynnika $a_{\varrho\varrho}^{\frac{p_\varrho}{m_\varrho}}$ w R_σ, jest $R_{\varrho\sigma}^{m_\varrho m_\sigma}$ i t. d.

Jeżeli R' powstaje z R przez przemianę f_i na f_k i jeżeli $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ są liczby szeregu $1, 2, \ldots, n$, różne od i i k, o ile $n>2$, jest:

$$a_{\alpha\alpha}^{p_\alpha} \ldots a_{\varepsilon\varepsilon}^{p_\varepsilon} \begin{bmatrix} f_k^0, & f_i^0 \\ x_i, & x_k \end{bmatrix}^{m_\alpha m_\beta \ldots m_\varepsilon}$$

zbiorem wszystkich wyrazów wyrażenia R, zawierających iloczyn $a_{\alpha\alpha}^{p_\varepsilon} \ldots a_{\varepsilon\varepsilon}^{p_\varepsilon}$, a więc c w tym przypadku jest spółczynnikiem przy $a_{ii}^{p_i}\, a_{kk}^{p_k}$ w wyrażeniu:

$$\begin{bmatrix} f_k^0, & f_i^0 \\ x_i, & x_k \end{bmatrix}^{\frac{p}{m_i m_k}} ,$$

a stosuje się to także i do przypadku $n=2$, jeżeli przez f_i^0, f_k^0 rozumiemy same formy f_i, f_k. Jest przeto:

$$c = (-1)^{m_i m_k \cdot \frac{p}{m_i m_k}} = (-1)^p , \quad R' = (-1)^p\, R.$$

Stąd, jeżeli $C_{\alpha\beta\ldots\sigma}$ oznacza jedność dodatnią albo ujemną, stosownie do tego, czy przemiana $\alpha\beta\ldots\sigma$ jest parzysta albo nieparzysta, jest:

$$\begin{bmatrix} f_\alpha, & f_\beta, & \ldots, & f_\sigma \\ x_{\alpha'}, & x_{\beta'}, & \ldots, & x_{\sigma'} \end{bmatrix} = C^p_{\alpha\beta\ldots\sigma}\, C^p_{\alpha'\beta'\ldots\sigma'}\, R\,.$$

Jeżeli przynajmniej jedna z liczb $m_1, m_2, \ldots, m_n$ jest parzysta, to R pozostaje niezmiennem przy wszystkich przestawieniach form albo zmiennych. Jeżeli przeciwnie, wszystkie te liczby są parzyste, to R zmienia znak przy przestawieniach dwóch form albo zmiennych.

7. Jeżeli w szeregu form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jednę z form, naprzykład f_i, zastąpimy raz przez φ, drugi raz przez ψ, a następnie przez $\varphi\psi$, gdzie φ, ψ są ogólnemi formami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i jeżeli wypadkowe otrzymanych trzech szeregów form oznaczymy przez R', R'', R, będzie:

$$R = R'R''.$$

Albowiem R czyni zadość tożsamości:

$$Rx_n^r = [\varphi\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon],$$

gdzie liczby $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ oznaczają liczby szeregu $1, 2, \ldots, n$, po opuszczeniu liczby i, przeto R posiada własność zasadniczą tak względem na formy $\varphi, f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$ jak i względem form $\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$. Wypływa stąd najprzód podzielność wypadkowej R przez wypadkową R'. Jeżeli przyjmiemy więc $R = QR'$ i zważymy, że reszta wypadkowej R względem $\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$ i x_n znika, reszta zaś wypadkowej R' względem tychże form i tejże zmiennej nie znika, gdyż R' nie zawiera spółczynników formy ψ i nie znika tożsamościowo, to wyniknie stąd, że reszta formy Q względem $\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$ i x_n musi znikać tożsamościowo. Forma Q posiada tedy własność zasadniczą względem $\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon$, i musi być podzielna przez R''. Jeżeli przyjmiemy $Q = NR''$, będzie:

$$R = NR'R'',$$

gdzie N jest czynnikiem liczbowym, co stwierdza porównanie stopni. Dla $f_\alpha = x_\alpha^{m_\alpha}$, $f_\beta = x_\beta^{m_\beta}, \ldots, f_\varepsilon = x_\varepsilon^{m_\varepsilon}$, $\varphi = x_i^\mu$, $\psi = x_i^\nu$, gdzie μ i ν są stopnie funkcyj φ, ψ, jest $R = R' = R'' = 1$, a zatem $N = 1$.

Ogólniej, jeżeli niektóre z form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lub wszystkie zastąpimy iloczynami form, to wypadkowa tak otrzymanego szeregu form będzie iloczynem wszystkich wypadkowych, odpowiadających możliwym zestawieniom n form, z których pierwsza jest czynnikiem iloczynu postawionego zamiast f_1, druga czynnikiem iloczynu postawionego zamiast f_2 i t. d.

Naprzykład:

$$\begin{bmatrix} \varphi\psi, & \chi\vartheta, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi, & \chi, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi, & \vartheta, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi, & \chi, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi, & \vartheta, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} f_1^{\nu_1}, & f_2^{\nu_2}, & \ldots, & f_n^{\nu_n} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & \ldots, & f_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{bmatrix}^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}.$$

8. Wypadkowa R n form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ pozostaje niezmienioną, jeżeli jednę z tych form np. f_i zastąpimy przez $f_i + \varphi f_k$, gdzie przyjmujemy, że dla stopni m_i, m_k dwóch form f_i, f_k jest $m_i \geqslant m_k$ i gdzie φ jest formą ogólną zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stopnia $m_i - m_k$.

Albowiem wypadkowa R' nowego układu form ma własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$; różnica $R' - R$ posiada tęż samą własność i musi znikać tożsamościowo, gdyż względem spółczynnika a_{ii} przy $x_i^{m_i}$ w formie f_i nie osiąga stopnia $\frac{p}{m_i}$, gdzie p oznacza iloczyn stopni form $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Jeżeli w szeregu form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ formę f_i zastąpimy przez $f_i + [f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varepsilon]$, gdzie $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ są liczbami szeregu $1, 2, \ldots, n$ różnemi od i oraz nadto $m_i \geqslant m_\alpha, m_\beta, \ldots, m_\varepsilon$, to wypadkowa R pozostaje niezmienioną.

Jeżeli $f_k = cg^m$, gdzie c jest stałą, g ogólną funkcyą zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i jeżeli stopień μ funkcyi g nie jest większy niż stopień m_i funkcyi f_i, φ zaś jest formą ogólną zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stopnia $m_i - \mu$, to wypadkowa R form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ pozostaje niezmienioną, jeżeli f_i zastąpimy przez $f_i + \varphi g$.

Niechaj R' będzie wypadkową nowego szeregu form; R_1, R_2 niechaj będą wypadkowe szeregów form, powstających z form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ przez zastąpienie raz formy f_k przez formę g, drugi raz formy f_k przez g, formy f_i przez $f_i + \varphi g$. Będzie wtedy:

$$R = c^{\frac{p}{m_k}} R_1^m; \quad R' = c^{\frac{p}{m_k}} R_2^m,$$

$$R_1 = R_2,$$

a stąd:

$$R' = R.$$

Przykład. Niechaj $\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ będzie wypadkową $n-1$ form ogólnych $f_1, f_2, \ldots f_n$ i formy liniowej $u_x = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n$.

Połóżmy dla skrócenia:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_i} = \theta_i;\ s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2 + \ldots + s_n \theta_n = \theta'(u_1, u_2, \ldots).$$

$$\Re = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, & \theta'(v_1 w_x - w_1 v_x,\ v_2 w_x - w_2 v_x, \ldots \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy, o ile formy $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ nie są wszystkie liniowemi, jest:

$$\Re = \begin{bmatrix} \theta(v_1 X + w_1 Y, \ldots), & \theta'(v_1 X + w_1 Y, \ldots) \\ X & Y \end{bmatrix}$$

$$= M \theta(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

gdzie M ma znaczenie, wskazane w ust. 5. Jeżeli napiszemy:

$$\theta(v_1 X + w_1 Y,\ v_2 X + w_2 Y, \ldots) = F,$$

będzie:

$$v_1 \theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + v_2 \theta_2(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + \ldots = \frac{\partial F}{\partial X},$$

$$w_1 \theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + w_2 \theta_2(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + \ldots = \frac{\partial F}{\partial Y},$$

a forma $\theta'(v_1 w_x - w_1 v_x, \ldots)$, po zastąpieniu w niej zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ odpowiednio przez $\theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots)$, $\theta_2(v_1 X + w_1 Y, \ldots)$, przechodzi na następującą:

$$\theta'\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right).$$

Jeżeli przeto przez ν oznaczymy iloczyn stopni funkcyj $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ lub stopień formy $\theta(u_1, u_2, \ldots)$ względem $u_1, u_2, \ldots$, będzie według ust. 5:

$$M^{\nu-1} \Re = \begin{bmatrix} F, & \theta'\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right) \\ X, & Y \end{bmatrix}.$$

Lecz jest:

$$X^{\nu-1} \theta'\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right) = \theta'\left(v_1 X \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 X \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right)$$

$$= \theta'\left((v_1 X + w_1 Y) \frac{\partial F}{\partial y} - \nu w_1 F, \ldots\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{\nu-1} \theta'(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + [F],$$

skąd wynika:

$$\begin{bmatrix} F, & X^{\nu-1}\theta'\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right) \\ X, & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F, & \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{\nu-1} \theta'(v_1 X + w_1 Y, \ldots) \\ X, & Y \end{bmatrix},$$

lub

$$\begin{bmatrix} F, & X \\ X, & Y \end{bmatrix}^{\nu-1} \Re M^{\nu-1} = \begin{bmatrix} F, & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ X, & Y \end{bmatrix}^{\nu-1} \begin{bmatrix} F, & \theta'(v_1 X + w_1 Y, \ldots) \\ X, & Y \end{bmatrix}.$$

Według ust. 5 go jest:

$$\begin{bmatrix} F, & X \\ X, & Y \end{bmatrix} = (-1)^\nu \theta(w_1, w_2, \ldots),$$

$$\begin{bmatrix} F, & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ X, & Y \end{bmatrix} = M \theta(w_1, w_2, \ldots),$$

$$\begin{bmatrix} F, & \theta'(v_1 X + w_1 Y, \ldots) \\ X, & Y \end{bmatrix} = M \theta(s_1, s_2, \ldots).$$

Po usunięciu czynnika $M^{\nu-1} \theta^{\nu-1}(w_1, w_2, \ldots)$, otrzymujemy tedy:

$$\Re = M \theta(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

9. Zagadnienie. Formy ogólne $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przekształcają się przy pomocy podstawień:

$$x_i = c_{i1} X_1 + c_{i2} X_2 + \ldots + c_{in} X_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

ze spółczynnikami nieoznaczonemi $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn}$ na formy $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n$; wyznaczyć wypadkową:

$$R' = \begin{bmatrix} f_1', f_2', \ldots, f_n' \\ X_1, X_2, \ldots, X_n \end{bmatrix}.$$

Niechaj będzie:

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix},$$

i wyznacznik:

$$C = \Sigma \pm c_{11}, c_{22}, \ldots c_{nn}.$$

Mamy tożsamość:

$$R' \; X_n^{r} = [f_1', f_2', \ldots, f_n'];$$

jeżeli w tej tożsamości zamiast $X_1, \ldots, X_n$ napiszemy wyrażenia:

$$x_1 \frac{\partial C}{\partial c_{11}} + x_2 \frac{\partial C}{\partial c_{21}} + \ldots + x_n \frac{\partial C}{\partial c_{n1}}, \;\ldots\;, x_1 \frac{\partial C}{\partial c_{1n}} + x_2 \frac{\partial C}{\partial c_{2n}} + \ldots + x_n \frac{\partial C}{\partial c_{nn}}.$$

to formy $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ przejdą na następujące:

$$C^{m_1} f_1, C^{m_2} f_2, \ldots, C^{m_n} f_n$$

i otrzymamy:

$$R'\left(x_1 \frac{\partial C}{\partial c_{1n}} + x_2 \frac{\partial C}{\partial c_{2n}} + \ldots\right)^r = [f_1, f_2, \ldots, f_n].$$

Z tego powodu znika reszta funkcyi całkowitej R' względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i x_n, i funkcya ta musi być podzielna przez R. Jeżeli więc napiszemy $R' = QR$, to funkcya Q nie będzie zawierała form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i da się wyznaczyć przy pomocy form szczególnych $f_1 = x_1^{m_1}, f_2 = x_2^{m_2}, \ldots, f_n = x_n^{m_n}$.

Dla tych form jest:

$$R = 1,$$

$$f_i' = (c_{i1} X_1 + c_{i2} X_2 + \ldots + c_{in} X_n)^{m_i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

a więc:

$$R' = C^p = Q,$$

gdzie $p = m_1 m_2 \ldots m_n$.

Będzie zatem:

$$R' = C^p R,$$

i R przeto jest niezmiennikiem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Wnioski. Jeżeli zastąpimy x_i przez tx_i, to $t^p R$ będzie wypadkową form nowych.

Jeżeli uskutecznimy podstawienie:

$$x_1 = X_1 + z_1 X_n, \; x_2 = X_2 + z_2 X_n, \ldots, x_{n-1} = X_{n-1} + z_{n-1} X_n,$$

$$x_n = -s_1 X_1 - s_2 X_2 - \ldots - s_{n-1} X_{n-1} + z_n X_n$$

i położymy:

$$s_1 z_1 + s_2 z_2 + \ldots + z_n = s,$$

to Rs^p będzie wypadkową nowych form, a spółczynniki tych ostatnich przy $X_n^{m_1}, X_n^{m_2}, \ldots, X_n^{m_n}$ będą odpowiednio:

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \; f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots, f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Z tożsamości:

$$Rx_n^r = [f_1, f_2, \ldots, f_n],$$

wynika, że gdy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0, \; x_n = 1,$$

to

$$R = [a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}],$$

gdzie a_{in} jest spółczynnikiem przy $x_n^{m_i}$ w formie f_i. Stosując tę tożsamość do wypadkowej Rs^p, otrzymamy tożsamość:

$$Rs^p = [f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots].$$

Jeżeli wprowadziwszy nową nieoznaczoną s_n, uczynimy to wyrażenie jednorodnem względem $s_1, s_2, \ldots, s_n$ i zastąpimy $z_1, z_2, \ldots, z_n$ przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$, będzie:

$$R(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots s_n x_n)^p = [f_1, f_2, \ldots, f_n].$$

10. Niechaj $f_1, f_2, \ldots, f_k$ będą formy ogólne zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stopni $m_1, m_2, \ldots, m_k$, gdzie $1 < k < n$ i niechaj:

$$m_1\, m_2 \ldots m_k = p.$$

Niech przez podstawienie:

$$x_i = \xi_{1i}\, X_1 + \xi_{2i}\, X_2 + \ldots + \xi_{ki}\, X_k \qquad (i=1,2,\ldots,k),$$

formy $f_1, f_2, \ldots, f_k$ przechodzą na formy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_k$; wypadkowa R tych form będzie funkcyą stopnia p-tego wyznaczników rzędu k układu elementów:

$$\begin{array}{l} \xi_{11},\ \xi_{21},\ \ldots,\ \xi_{k1}, \\ \xi_{12},\ \xi_{22},\ \ldots,\ \xi_{k2}, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \xi_{1n},\ \xi_{2n},\ \ldots,\ \xi_{kn}, \end{array}$$

zawierającą zatem nieoznaczone $\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots, \xi_{2n}$ tylko wewnątrz tych wyznaczników.

Jeżeli formy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ przez podstawienie:

$$X_i = y_{i1}\, Y_1 + y_{i2}\, Y_2 + \ldots + y_{ik}\, Y_k. \qquad (i=1,2,\ldots,k),$$

przechodzą na formy $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ i jeżeli położymy:

$$\Sigma \pm y_{11}\, y_{22} \ldots y_{kk} = \omega,$$

będzie:

$$\begin{bmatrix} \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k \\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_k \end{bmatrix} = \omega^p R.$$

Otrzymamy także formy ψ_i jeżeli do form f_i zastosujemy bezpośrednio podstawienie:

$$x_i = \eta_{1i}\, Y_1 + \eta_{2i}\, Y_2 + \ldots + \eta_{ki}\, Y_k. \qquad (i=1,2,\ldots,k),$$

gdzie

$$\eta_{\lambda i} = y_{1\lambda}\, \xi_{1i} + y_{2\lambda}\, \xi_{2i} + \ldots + y_{k\lambda}\, \xi_{ki},$$

a wypadkową form $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ będzie wyrażenie R_1, na które przechodzi R, jeżeli $\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots, \xi_{kn}$ zastąpimy odpowiednio przez $\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{kn}$. Jest przeto:

$$R_1 = \omega^p R.$$

Niechaj będzie:

$$\Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \begin{vmatrix} \xi_{1\alpha}, & \xi_{2\alpha}, & \ldots, & \xi_{k\alpha} \\ \xi_{1\beta}, & \xi_{2\beta}, & \ldots, & \xi_{k\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1\varepsilon}, & \xi_{2\varepsilon}, & \ldots, & \xi_{k\varepsilon} \end{vmatrix};$$

oznaczmy utworzone na sposób wyznacznika działania:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\eta_{1\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial\eta_{2\alpha}}, & \ldots, & \frac{\partial\eta}{\partial\eta_{k\alpha}} \\ \frac{\partial}{\partial\eta_{1\beta}}, & \frac{\partial}{\partial\eta_{2\beta}}, & \ldots, & \frac{\partial\eta}{\partial\eta_{k\beta}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial\eta_{1\varepsilon}}, & \frac{\partial}{\partial\eta_{2\varepsilon}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial\eta_{k\varepsilon}} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{11}}, & \frac{\partial}{\partial y_{12}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial y_{1k}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{21}}, & \frac{\partial}{\partial y_{22}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial y_{2k}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y_{k1}}, & \frac{\partial}{\partial y_{k2}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial y_{kk}} \end{vmatrix},$$

przez $\Omega_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ i ∇, działanie zaś $\Sigma\Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}\, \Omega_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$, w którem znak sumy rozciąga się na wszystkie kombinacye $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ klasy k-tej liczb $1, 2, \ldots, n$, przez Ω. Jeżeli weźmiemy przedmiot działania, który zawiera nieoznaczone $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$ tylko wewnątrz połączeń $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{kn}$, będzie:

$$\nabla = \Omega,$$

a zatem:

$$\nabla^p\, \omega^p R = R\, \nabla^p\, \omega^p = \Omega^p R_1.$$

Jeżeli rozwiniemy ω^p według iloczynów potęgowych $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots$ nieoznaczonych $y_{11}, y_{12}, \ldots,$ napiszemy:

$$\omega^p = c\, \mathfrak{P} + c_1\, \mathfrak{P}_1 + \ldots$$

i oznaczymy przez $Q, Q_1, \ldots$ działania różniczkowe, powstające z wyrażeń $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots$ przez zastąpienie w nich nieoznaczonych $y_{\varrho\sigma}$ przez $\frac{\partial}{\partial y_{\varrho\sigma}}$, znajdziemy:

$$\nabla^p = c\, Q + c_1\, Q_1 + \ldots$$

a stąd:

$$\nabla^p\, \omega^p = c^2\, Q\, \mathfrak{P} + c_1^2\, Q_1\, \mathfrak{P}_1 + \ldots = h,$$

gdzie h jest liczbą całkowitą dodatnią. Mamy tedy:

$$R = \frac{1}{h}\,\Omega^p R_1$$

i jest jasnem, że $\frac{1}{h}\,\Omega^p R_1$ zawiera nieoznaczone $\xi_{11}, \xi_{12}, \dots$ tylko wewnątrz wyznaczników $\Delta_{\alpha\beta\dots\varepsilon}$. Ponieważ R czyni zadość tożsamości:

$$R\,X_k^r = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k],$$

więc jeżeli uczynimy:

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{k-1} = 0,\ X_k = 1,$$

$$\xi_{k1} = x_1,\ \xi_{k2} = x_2,\ \dots,\ \xi_{kn} = x_n,$$

przez co niechaj R przejdzie na R_0, będzie:

$$R_0 = P_1 f_1 + P_2 f_2 + \dots + P_k f_k.$$

Można przyjąć, że funkcye całkowite $P_1, P_2, \dots, P_k$ zawierają nieoznaczone $\xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{k-11}, \xi_{k-12}$ tylko wewnątrz wyznaczników układu:

$$\begin{matrix} \xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{k-11}, \\ \xi_{21}, \xi_{22}, \dots, \xi_{k-12}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{k-1n}. \end{matrix}$$

Niechaj bowiem będzie:

$$\zeta_{\lambda\mu} = y_{1\lambda}\,\xi_{1\mu} + y_{2\lambda}\,\xi_{2\mu} + \dots + y_{k-1\lambda}\,\xi_{k-1\mu},$$

$$\nabla_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{11}}, & \frac{\partial}{\partial y_{12}}, & \dots, & \frac{\partial}{\partial y_{1k-1}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{21}}, & \frac{\partial}{\partial y_{22}}, & \dots, & \frac{\partial}{\partial y_{2k-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y_{k-11}}, & \frac{\partial}{\partial y_{k-12}}, & \dots, & \frac{\partial}{\partial y_{k-1k-1}} \end{vmatrix}, \quad \Delta'_{\alpha\beta\dots\varepsilon} = \begin{vmatrix} \xi_{1\alpha}, & \xi_{2\alpha}, & \dots, & \xi_{k-1\alpha} \\ \xi_{1\beta}, & \xi_{2\beta}, & \dots, & \xi_{k-1\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1\delta}, & \xi_{2\delta}, & \dots, & \xi_{k-1\delta} \end{vmatrix},$$

$$\Omega'_{\alpha\beta\dots\varepsilon} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_{1\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial \zeta_{2\alpha}}, & \dots, & \frac{\partial}{\partial \zeta_{k-1\alpha}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_{1\delta}}, & \frac{\partial}{\partial \zeta_{2\delta}}, & \dots, & \frac{\partial}{\partial \zeta_{k-1\delta}} \end{vmatrix}, \quad \Omega_1 = \Sigma\Delta'_{\alpha\beta\dots\delta}\,\Omega'_{\alpha\beta\dots\delta}.$$

$$\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}, & \dots, & y_{1k-1} \\ y_{21}, & y_{22}, & \dots, & y_{2k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{k-11}, & y_{k-12}, & \dots, & y_{k-1k-1} \end{vmatrix} = \omega_1,$$

gdzie suma w wyrażeniu Ω_1 rozciąga się na wszystkie kombinacye klasy $k-1$ skaźników $\alpha\beta\dots\delta$, będących liczbami szeregu $1, 2, \dots, n$. Po zastąpieniu nieoznaczonych $\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{k-11}, \dots, \xi_{k-1,n}$ przez $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \dots, \zeta_{k-11}, \zeta_{k-1,n}$ poprzednia tożsamość przechodzi na następującą:

$$\omega_1^p R_0 = P_1' f_1 + P_2' f_2 + \dots + P_k' f_k,$$

gdzie $P_1', P_2', \dots$ są funkcyami całkowitemi spółczynników form $f_1, f_2, \dots$ oraz nieoznaczonych $\xi_{11}, \dots, y_{11}, \dots$, zawierającemi nieoznaczone $y_{11}, y_{12}, \dots$ tylko w połączeniach $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \dots$ Jeżeli po obu stronach wykonamy p razy działanie ∇_1, które zlewa się tu z działaniem Ω_1, znajdziemy:

$$R_0\,\nabla_1^p\,\omega_1^p = f_1\,\Omega_1^p\,P_1' + f_2\,\Omega_1^p\,P_2' + \dots$$

Ponieważ wszakże na $\nabla_1^p\,\omega^p$ otrzymujemy, jak poprzednio, liczbę całkowitą dodatnią, na $\Omega_1^p P_1', \Omega_1^p P_2', \dots$ zaś funkcye samych wyznaczników $\Delta'_{\alpha\beta\dots\delta}$, przeto powyższe twierdzenie jest udowodnione.

Niechaj:

$$u_x = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n;\ v_x = v_1 x_1 + \dots + v_n x_n,\ \dots,\ w_x = w_1 x_1 + \dots + w_n x_n,$$

będą $n-k$ funkcyami ogólnemi liniowemi zmiennych $x_1 x_2, \dots, x_n$; $(u_\lambda v_\mu \dots w_\varrho)$ niechaj oznacza wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} u_\lambda, & u_\mu, & \dots, & u_\varrho \\ v_\lambda, & v_\mu, & \dots, & v_\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_\lambda, & w_\mu, & \dots, & w_\varrho \end{vmatrix}.$$

Po zastąpieniu każdego wyznacznika $\Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ przez wyznacznik $(u_\lambda v_\mu \ldots w_\varrho)$, gdzie $\alpha\beta\ldots\varepsilon\,\lambda\mu\ldots\varrho$ jest przemianą parzystą liczb $1, 2, \ldots, n$, wypadkowa R przechodzi na funkcyę całkowitą wyznaczników rzędu $n-k$ układu:

$$\begin{array}{l} u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n \\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n, \end{array}$$

którą dla skrócenia oznaczmy przez $R'((u_1 v_2 \ldots w_{n-k})\ldots)$.

Jeżeli do $n-k$ form $u_x, v_x, \ldots, w_x$ dołączymy jeszcze k form liniowych $q_x, r_x, s_x, \ldots, t_x$ i położymy:

$$\begin{vmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ u_1, & u_2, & \ldots, & u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1, & w_2, & \ldots, & w_n \end{vmatrix} = D,$$

to po zastąpieniu nieoznaczonych $\xi_{1\iota}, \xi_{2\iota}, \ldots, \xi_{k-1\,\iota}$ odpowiednio przez $\frac{\partial D}{\partial q_\iota}, \frac{\partial D}{\partial r_\iota}, \ldots, \frac{\partial D}{\partial s_\iota}$, znajdziemy:

$$\Delta'_{\alpha\beta\ldots\delta} = D^{k-2}\frac{\partial^{k-1} D}{\partial q_\alpha\, \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta}$$

$$= D^{k-2}\left(t_\varepsilon \frac{\partial^k D}{\partial q_\alpha\, \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta\, \partial t_\varepsilon} + u_\varepsilon \frac{\partial^k D}{\partial q_\alpha \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta\, \partial u_\varepsilon} + \ldots\right).$$

Stąd, jeżeli liczby $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$ uzupełniają liczby $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ do przemiany parzystej $\alpha\beta\ldots\varepsilon\,\lambda\mu\ldots\varrho$, wynika:

$$\begin{vmatrix} \xi_{1\alpha}, & \xi_{2\alpha}, & \ldots, & \xi_{k-1\alpha}, & x_\alpha \\ \xi_{2\alpha}, & \xi_{2\beta}, & \ldots, & \xi_{k-1\beta}, & x_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1\varepsilon}, & \xi_{2\varepsilon}, & \ldots, & \xi_{k-1\varepsilon}, & x_\varepsilon \end{vmatrix}$$

$$= D^{k-2}\left(t_x \frac{\partial^k D}{\partial q_\alpha\, \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta\, \partial t_\varepsilon} + u_x \frac{\partial^k D}{\partial q_\alpha\, \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta\, \partial t_\varepsilon} + \ldots\right.$$

$$= D^{k-2}\,(t_x\,(u_\lambda v_\mu \ldots w_\varrho) - u_x\,(t_\lambda v_\mu \ldots w_\varrho) + \ldots \pm w_x\,(t_\lambda u_\mu \ldots)),$$

a tożsamość:

$$R_0 = P_1 f_1 + P_2 f_2 + \ldots + P_k f_k,$$

wskutek tego podstawienia przybierze postać:

$$D^{(k-2)p} R'\,(t_x\,(u_1 v_2 \ldots w_{n-k}) - u_x\,(t_1 v_2 \ldots w_{n-k}) + \ldots \pm w_x\,(t_1 u_2 \ldots)\ldots)$$
$$= D^{(k-2)p}\,[f_1, f_2, \ldots, f_k].$$

Otrzymujemy tym sposobem tożsamość:

$$R'\,(t_x\,(u_1 v_2 \ldots w_{n-k}) - u_x\,(t_1 u_2 \ldots w_{n-k}) + \ldots \pm w_x\,(t_1 u_2 \ldots)\ldots) = [f_1, f_2, \ldots, f_k].$$

Wyrażenie $R'((u_1 v_2 \ldots w_{n-k})\ldots)$ jest wypadkową form $f_1, f_2, \ldots, f_k, u_x, v_x, \ldots, w_x$; albowiem posiada ono własność zasadniczą względem tych form, gdyż poprzedzająca tożsamość daje:

$$t_x^p\, R'\,((u_1 v_2 \ldots w_{n-k})\ldots) = [f_1, f_2, \ldots, f_k, u_x, \ldots, w_x].$$

Dalej, wyrażenie to jest względem spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_k, u_x, v_x, \ldots, w_x$ odpowiednio stopnia $\frac{p}{m_1}, \frac{p}{m_2}, \ldots, \frac{p}{m_k}, p, p, \ldots, p$. Dla $f_1 = x_1^{m_1}, f_2 = x_2^{m_2}, \ldots, f_k = x_k^{m_k}$ jest $R = \Delta^p_{1,2,\ldots,k}$, a więc:

$$R' = (u_{k+1}\, v_{k+2} \ldots w_n)^p$$

i jeżeli uczynimy jeszcze:

$$u_x = x_{k+1},\ v_x = x_{k+2},\ \ldots,\ w_x = x_n,$$

będzie:

$$R' = 1.$$

11. Jeżeli $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ są formami ogólnemi równego stopnia zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $m \geqq n$, jeżeli utworzymy formy:

$$g_i = c_{i1}\varphi_1 + c_{i2}\varphi_2 + \ldots + c_{im}\varphi_m, \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn}$ są nieoznaczonemi, to wypadkowa:

$$R = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix},$$

będzie funkcyą wyznaczników rzędu n-tego, dających się utworzyć z układu nieoznaczonych:

$$\begin{matrix} c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1m} \\ c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nm}\,. \end{matrix}$$

Niechaj $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{nn}$ będą nieoznaczone; połóżmy:

$$y_{1i}\, c_{1k} + y_{i2}\, c_{2k} + \ldots + y_{ni}\, c_{nk} = c'_{ik}$$

$$g'_i = c'_{i1}\varphi_1 + c'_{i2}\varphi_2 + \ldots + c'_{im}\varphi_m = y_{1i}\, g_1 + y_{2i}\, g_2 + \ldots + y_{ni}\, g_n$$

$$\Sigma \pm y_{11}\, y_{22} \ldots y_{nn} = Y.$$

Jeżeli R, po zastąpieniu nieoznaczonych $c_{11}, c_{12}, \ldots$ przez nieoznaczone $c'_{11}, c'_{11}, \ldots$, przechodzi na R', będzie:

$$R' = \begin{bmatrix} g_1', g_2', \ldots, g'_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix} = Y^q R,$$

gdzie $q = \mu^n$ i μ jest stopniem funkcyi φ_1.

Niechaj będzie w dalszym ciągu:

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{11}}, & \frac{\partial}{\partial y_{12}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial y_{1n}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{21}}, & \frac{\partial}{\partial y_{22}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial y_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y_{n1}}, & \frac{\partial}{\partial y_{n2}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial y_{nn}} \end{vmatrix}, \quad \Omega_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial c'_{1\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial c'_{1\beta}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial c'_{1\varepsilon}} \\ \frac{\partial}{\partial c'_{2\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial c'_{2\beta}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial c'_{2\varepsilon}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial c'_{n\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial c'_{n\beta}}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial c'_{n\varepsilon}} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \begin{vmatrix} c_{1\alpha}, & c_{1\beta}, & \ldots, & c_{1\varepsilon} \\ c_{2\alpha}, & c_{2\beta}, & \ldots, & c_{2\varepsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n\alpha}, & c_{n\beta}, & \ldots, & c_{n\varepsilon} \end{vmatrix}, \quad \Omega = \Sigma\, \Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}\, \Omega_{\alpha\beta\ldots\varepsilon},$$

gdzie suma rozciąga się wszystkie kombinacye klasy n-ej $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ liczb $1, 2, \ldots, m$. Jeżeli po obu stronach poprzedzającej tożsamości wykonamy q razy działanie ∇ i zważymy, że zastosowane do strony lewej zlewa się ono z działaniem Ω, znajdziemy:

$$\Omega^q R' = R\, \nabla^q\, Y^q$$

$\Delta^q Y^q$, jak podano w ust. **10**, jest liczbą całkowitą dodatnią h, $\Omega^q R'$ zaś jest funkcyą całkowitą jednorodną stopnia q wyznaczników $\Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$, nie zawierającą w swych spółczynnikach nieoznaczonych $c_{11}, c_{12}, \ldots$ Jest przeto, jak twierdzono wyżej:

$$R = \frac{1}{h}\, \Omega^q R'.$$

Jeżeli $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ są formami stopnia μ-tego nieoznaczonych $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$$\begin{matrix} c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{km} \end{matrix}$$

nieoznaczonemi i $k < n \leqslant m$, to wypadkowa k form:

$$g_i = c_{i1}\varphi_1 + c_{i2}\varphi_2 + \ldots + c_{im}\varphi_m, \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

i $n-k$ form liniowo-jednorodnych jest funkcyą samych wyznaczników k-rzędu układu nieoznaczonych $c_{11}, \ldots, c_{1m}, \ldots, c_{km}$.

12. Zagadnienie. Niechaj $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ będą dane liczby całkowicie dodatnie, nie przekraczające odpowiednio stopni $m_1, m_2, \ldots, m_n$ form $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Spółczynnikom iloczynu potęgowego $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ w formie f_i nadajmy wagę $\mu_i - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_{n-1}$ albo zero, zależnie od tego, czy liczba $\mu_i - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_{n-1}$ jest dodatnia albo nie; iloczynowi spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nadajmy jako wagę sumę wag jego czynników. Wyznaczyć najmniejszą z pomiędzy wag pojedyńczych wyrazów wypadkowej:

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix}.$$

Niechaj N będzie zbiorem wszystkich wyrazów wypadkowej R, mających wagę najmniejszą ν, H- zbiorem pozostałych wyrazów, g_i—zbiorem wyrazów formy f_i, zawierających potęgę $x_n^{m_i-\mu_i}$ zmiennej x_n, i niechaj $f_i = x_n^{m_i-\mu_i} g_i + h_i$. Jeżeli $g_i - a_{in} x_n^{\mu_i}$, h_i dla $x_n = 1$ przechodzą odpowiednio na $g^{(n)}$, h_i^0, to tożsamość:

$$R = [a_{in} + f_1^{(n)},\ a_{2n} + f_2^{(n)}, \ldots]$$

przybiera postać:

$$N + H = [a_{1n} + g_1^{(n)} + h_1^0,\ a_{2n} + g_2^{(n)} + h_2^0, \ldots].$$

Jeżeli zastąpimy w niej każdy spółczynnik form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ iloczynem jego przez t^γ; $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zastąpimy iloczynami $tx_1, tx_2, \ldots, tx_{n-1}$, gdzie t jest nieoznaczoną, γ—wagą odpowiedniego spółczynnika, otrzymamy:

$$Nt^\nu + [t^{\nu+1}] = [t^{\mu_1}(a_{1n} + g_1^{(n)} + th'_1) \ldots],$$

gdzie $h'_1, h'_2, \ldots$ są funkcyami całkowitemi spółczynników form $f_1, f_2, \ldots$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ i nieoznaczonej t. Jeżeli więc wyrażenie N, jako funkcyę spółczynników $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}$ oznaczymy przez $N(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$ i zastąpimy w niej $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}$ odpowiednio przez $-g_1^{(n)} - th_1'$, $-g_2^{(n)} - th_2', \ldots, -g_n^{(n)} - th_n'$, będzie:

$$t^\nu N(-g_1^{(n)} - th_1', -g_2^{(n)} - th_2', \ldots) + [t^{\nu+1}] = 0.$$

W tej tożsamości muszą wzajemnie znosić się wyrazy, zawierające potęgę t^ν, i będzie:

$$O = N(-g_1^{(n)}, -g_2^{(n)}, \ldots, -g_n^{(n)}).$$

N ma więc własność zasadniczą względem form $g_1, g_2, \ldots, g_n$, a wskutek tego musi być podzielne przez wypadkową:

$$\Re = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix}.$$

Niechaj będzie $N = QR$ i niechaj Q, R przechodzą odpowiednio na Q', R', gdy każdy ze spółczynników C form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zastąpimy przez Ct^γ, gdzie γ oznacza wagę spółczynnika C. Ponieważ zastąpienie to jest równoważne zastąpieniem zmiennej x_n w formach $g_1, g_2, \ldots, g_n$ przez tx_n i pozostawieniem bez zmiany pozostałych spółczynników form $f_1, f_2, \ldots$, będzie zatem $\Re' = t^\pi \Re$, a stąd:

$$Nt^\nu = Q' \Re t^\pi,$$

gdzie $\pi = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$. Musi być przeto $\nu \geqslant \pi$. Ale ν nie może być $> \pi$, jak to pokazują formy szczególne:

$$f_1 = x_1^{\mu_1} x_n^{m_1-\mu_1},\ f_2 = x_1^{m_2} + x_2^{\mu_2} x_n^{m_2-\mu_2},\ f_3 = x_2^{m_3} + x_3^{\mu_3} x_n^{m_3-\mu_3}, \ldots,\ f_n = x_{n-1}^{m_n} + x_n^{m_n}.$$

Formy te, gdy w nich każdy ze spółczynników o wadze γ zastąpimy iloczynem jego przez t^γ, przechodzą odpowiednio na:

$$f_1' = x_1^{\mu_1} x_n^{m_1-\mu_1},\ f_2' = x_1^{m_2} + x_2^{\mu_2} x_n^{m_2-\mu_2}, \ldots,\ f'_{n-1} = x_{n-2}^{m_{n-1}} + x_{n-1}^{\mu_{n-1}} x_n^{m_{n-1}-\mu_{n-1}},$$

$$f_n' = x_{n-1}^{m_n} + t^{\mu_n} x_n^{m_n};$$

trzeba tedy obliczyć wypadkową:

$$R' = \begin{bmatrix} f_1', f_2', \ldots, f_n' \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix}.$$

W tym celu zauważmy, że wypadkowa postaci:

$$B = \begin{bmatrix} x_1^{\nu_1} + x_2 w_1, & x_2^{\nu_1} + x_3 w_2, \ldots, & x_{n-1}^{\nu_{n-1}} + x_n w_{n-1}, & x_n \\ x_1, & x_2, & x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix},$$

gdzie $w_1, w_2, \ldots$ oznaczają formy stopnia $\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \ldots$ ma wartość 1. W samej rzeczy, nie zmieniając B, możemy w formie $(n-1)$-ej pominąć część składową $x_n w_{n-1}$, następnie w $(n-2)$-ej formie pominąć część składową $x_{n-1} w_{n-2}$ i t. d., wreszcie w pierwszej formie pominąć $x_2 w_1$. Będzie tedy:

$$B = \begin{bmatrix} x_1^{\nu_1}, x_2^{\nu_2}, \ldots, x_{n-1}^{\nu_{n-1}}, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{bmatrix} = 1.$$

Wypadkowa R' rozpada się przedewszystkiem—nawet dla $m_1 - \mu_1 = 0$— na dwa czynniki:

$$\begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, f_2', \ldots, f_n' \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x_n, f_2', \ldots, f_n' \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix}^{m_1-\mu_1} = \pm \begin{bmatrix} f_2', f_3', \ldots, f_n', x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{bmatrix}^{m_1-\mu_1},$$

z których drugi, aż do znaku, jest potęgą wyrażenia postaci B; będzie tedy:

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & f_2', & \ldots, & f_n' \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $n>2$, to będzie dalej:

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & x_2^{\mu_2} x_n^{m_2-\mu_2}, & f_3', \ldots, & f_n' \\ x_1, & x_2, & x_3, \ldots, & x_n \end{bmatrix}$$

$$= \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & x_2^{\mu_2} & f_3', & \ldots \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & x_n, & f_3', & \ldots \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots \end{bmatrix}^{m_2-\mu_2}$$

$$= \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & x_2^{\mu_2}, & f_3', & \ldots \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & f_3', & \ldots, & f_n', & x_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & & x_n \end{bmatrix}^{m_2-\mu_2};$$

czynnik drugi jest tu znów potęgą wypadkowej postaci B, i będzie:

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & x_2^{\mu_2}, & f_3', & \ldots, & f_n' \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_n \end{bmatrix}.$$

W podobny sposób rozumując w dalszym ciągu, znajdziemy rezultat:

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & x_2^{\mu_2}, & \ldots, & x_{n-1}^{\mu_{n-1}}, & f_n' \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix},$$

który utrzymuje się i dla $n=2$. A zatem:

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & x_2^{\mu_2}, & \ldots, & x_{n-1}^{\mu_{n-1}}, & t^{\mu_n} x_n^{m_n} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix} = \pm t^{\pi} \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, & x_2^{\mu_2}, & \ldots, & x_n^{\mu_n} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{bmatrix} = \pm t^{\pi}.$$

Jest tedy R' podzielne przez t^{π}, a stąd $\nu=\pi$.

Jeżeli $n=2$, to można, jak wiadomo, wyznaczyć Q prostym sposobem. Niechaj $x_1^{\mu_1}\varphi_1$, $x_1^{\mu_2}\varphi_2$ będą wyrazami form f_1, f_2, podzielnemi odpowiednio przez $x_1^{\mu_1}$, $x_1^{\mu_2}$, b — spółczynnikiem przy $x_1^{\mu_2} x_2^{m_2-\mu_1}$ w formie f_1, to $a_{22}^{\mu_1} b^{\mu_2} Q$ będzie tą częścią składową wypadkowej:

$$\begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}\varphi_1, & x_1^{\mu_2}\varphi_2 + a_{21} x_2^{m_2} \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix},$$

której wyrazy mają wagę $\mu_1 \mu_2$. Wypadkowa ta równa się:

$$a_{22}^{\mu_1} \begin{bmatrix} \varphi_1, & x_1^{\mu_2}\varphi_2 + a_{22} x_2^{m_2} \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix},$$

a ponieważ $a_{22}^{\mu_1}$ ma wagę $\mu_1 \mu_2$, przeto $b^{\mu_2} Q$ jest tą częścią składową wypadkowej

$$\begin{bmatrix} \varphi_1, & x_1^{\mu_2}\varphi_2 + a_{22} x_2^{m_2} \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix},$$

której wyrazy mają wagę zero. Aby otrzymać te wszystkie wyrazy, dość tedy przyjąć $a_{22}=0$ i będzie:

$$b^{\mu_2} Q = \begin{bmatrix} \varphi_1, & x_1^{\mu_2}\varphi_2 \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix},$$

a więc:

$$Q = (-1)^{\mu_2(m_1-\mu_1)} \begin{bmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix}; \quad N = (-1)^{\mu_2(m_1-\mu_1)} \begin{bmatrix} g_1, & g_2 \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix}.$$

Wnioski. Jeżeli w szczególności przyjmiemy $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 1$ i część liniową formy f_i względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ oznaczymy przez

$$(b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \ldots + b_{in} x_n) x_n^{m_i - 1},$$

będzie R postaci:

$$R = Q \Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{nn} + H,$$

gdzie H jest wymiaru wyższego niż pierwszy względem $b_{1n}=a_{1n}$, $b_{2n}=a_{2n}$, $\ldots$, $b_{nn}=a_{nn}$.

Jeżeli spółczynniki form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są funkcyami całkowitemi nieoznaczonej t i jeżeli formy:

$$f_i(tx_1, tx_2, \ldots, tx_{n-1}, x_n), \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

są podzielne odpowiednio przez $t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, \ldots, t^{\mu_n}$, to wypadkowa R form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jest podzielna przez $t^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}$, albowiem każdy spółczynnik wagi γ jest w tym przypadku podzielny przez t^{γ}.

13. Niechaj $g_1, g_2, \ldots, g_n$ będą formy ogólne zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funkcye całkowite jednorodne form $g_1, g_2, \ldots, g_n$ stopni $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, których spółczynniki są według stosunków stopni formami ogólnemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tak że $f_1, f_2, \ldots$ okazują się funkcyami jednorodnemi względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wypadkowa R form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest podzielna przez potęgę π-tą wypadkowej S form $g_1, g_2, \ldots, g_n$, gdzie $\pi=\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$.

Niechaj $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, t$ będą nieoznaczone, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu$ stopnie form $g_1, g_2, \ldots, g_n$ i niech będzie:

$$g_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 1) = g_i^0.$$

Niechaj, po zastąpieniu spółczynnika b_{nn} przy $x_n^{\nu_n}$ w formie g_n przez $b_{nn}+t$, formy $f_1, f_2, \ldots, f_n$, R przechodzą na $f_1', f_2', \ldots, f_n'$, $R(b_{nn}+t)$; mamy wtedy:

$$g_i - g_i^0 x_n^{\nu_i} = [y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]$$

$$g_n + tx_n^{\nu_n} - g_n^0 x_n^{\nu_n} = [y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, t],$$

gdzie:

$$y_1 = x_1 - z_1 x_n,\ y_2 = x_2 - z_2 x_n, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1} - z_{n-1} x_n.$$

Wynika stąd:

$$f_i' = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, t) + [g_1^0, g_2^0, \ldots, g_n^0],$$

gdzie φ_i jest formą zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mającą wymiary μ_i względem $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, t$.

Ponieważ formy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ są odpowiednio podzielne przez $t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, \ldots, t^{\mu_n}$, gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zastąpimy przez $tx_1 + z_1 x_n$, $tx_2 + z_2 x_n, \ldots, tx_{n-1} + z_{n-1} x_n$, to (patrz **9** i **12**) wypadkowa ich jest podzielna przez t^π. Z drugiej strony wypadkowa ta różni się od wypadkowej form $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ tylko o wyrażenie $[g_1^0, g_2^0, \ldots, g_n^0]$ i ukazuje się w postaci:

$$R(b_{nn}+t) + [g_1^0, g_2^0, \ldots, g_n^0].$$

Mamy zatem:

$$R(b_{nn}+t) = [g_1^0, g_2^0, \ldots, g_n^0, t^\pi].$$

Jeżeli rozwiniemy tedy $R(b_{nn}+t)$ według potęg nieoznaczonej t, to spółczynniki przy $t^0, t, \ldots, t^{\pi-1}$ będą wszystkie postaci $[g_1^0, g_2^0, \ldots, g_n^0]$, a więc wyrażenia:

$$R, \frac{\partial R}{\partial b_{nn}}, \ldots, \frac{\partial^{\pi-1} R}{\partial b_{nn}^{\pi-1}},$$

posiadają własność zasadniczą względem $g_1, g_2, \ldots, g_n$, stąd R jest podzielne przez S^π.

Wniosek 1. Niechaj $f_1, f_2, \ldots, f_n$; $g_1, g_2, \ldots, g_n$ będą formy ogólne zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, R—wypadkowa form $f_1, f_2, \ldots, f_n$, Δ—wypad-

kowe form $g_1, g_2, \ldots, g_n$; niechaj stopnie form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ będą $m_1, m_2, \ldots, m_n$; formy zaś $g_1, g_2, \ldots, g_n$ niechaj będą jednego stopnia m. Wypadkową Q form:

$$f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n),\ f_2(g_1, g_2, \ldots, g_n), \ldots, f_n(g_1, g_2, \ldots, g_n),$$

względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest wtedy:

$$R^{m^{n-1}} \Delta^p,$$

gdzie $p = m_1 m_2 \ldots m_n$.

Najprzód widoczną jest podzielność wypadkowej Q przez Δ^p. Niechaj dalej będzie:

$$f_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 1) = f_i^0,\ g_i - z_i g_n = \omega_i,$$

a_{nn}—spółczynnikiem przy $x_n^{m_n}$ w formie f_n, $Q(a_{nn}+t)$ wyrażeniem, na które przechodzi Q, gdy a_{nn} zastąpimy przez $a_{nn}+t$. Wypadkowa form:

$$f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n) - g_n^{m_1} f_1^0,\ f_2(g_1, g_2, \ldots, g_n) - g_n^{m_2} f_2^0, \ldots,$$

$$f_{n-1}(g_1, g_2, \ldots, g_n) - g_n^{m_{n-1}} f_{n-1}^0,\ f_n(g_1, g_2, \ldots, g_n) + ty_n^{m_n} - g_n^{m_n} f_n^0,$$

względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z których pierwsze $n-1$ są wszystkie postaci $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}]$, ostatnia zaś postaci $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, tg_n^{m_n}]$, jest z jednej strony na zasadzie tej postaci podzielna przez wypadkową form $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, tg_n^{m_n}$, a więc przez $t^{m^{n-1}}$ i z drugiej strony różni się od wypadkowej $Q(a_{nn}+t)$ form:

$$f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n),\ f_2(g_1, g_2, \ldots, g_n), \ldots, f_{n-1}(g_1, g_2, \ldots, g_n),$$
$$f_n(g_1, g_2, \ldots, g_n) + tg_n^{m_n},$$

tylko o wyrażenie $[f_1^0, f_2^0, \ldots, f_n^0]$

Stąd:

$$Q(a_{nn}+t) = [f_1^0, f_2^0, \ldots, f_n^0, t^{m^{n-1}}]$$

i jest jasnem, że spółczynniki m^{n-1} pierwszych potęg nieoznaczonej t w rozwinięciu wypadkowej $Q(a_{nn}+t)$ są wszystkie postaci $[f_1^0, f_2^0, \ldots]$; a więc wyrażenie Q i jego pochodne od 1-ej do $(m^{n-1}-1)$-ej włącznie według a_{nn} mają własność zasadniczą względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Wtedy zaś być musi Q podzielne przez $R^{m^{n-1}}$.

A więc Q jest podzielne przez iloczyn $\Delta^p R^{m^{n-1}}$. Iloraz dzielenia może być tylko czynnikiem liczbowym i mianowicie 1, gdyż Q, Δ, R dla:

$$f_1 = x_1^{m_1},\ f_2 = x_2^{m_2}, \ldots, f_n = x_n^{m_n};\ g_1 = x_1^m,\ g_2 = x_2^m, \ldots, g_n = x_n^m$$

staje się równy jedności. Mamy zatem:

$$Q = \Delta^{p} R^{m^{n-1}}.$$

Jeżeli w szczególności formy $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są liniowemi, R zaś jest ich wyznacznikiem, wtedy:

$$Q = R^{m^{n-1}} \Delta.$$

Wniosek 2. Niechaj $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ będą formami ogólnemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$ stopni $m_1, m_2, \ldots, m_k$; $\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \ldots, \varphi_n$ formami ogólnemi tychże zmiennych stopni $m_{k+1}, m_{k+2}, \ldots, m_n$, przechodzą i na $\varphi^0{}_{k+1}, \varphi^0{}_{k+2}, \ldots, \varphi_n{}^0$ przy $x_1 = x_2 = \ldots = x = 0$; niechaj:

$$R = \left[\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{matrix}\right],$$

będzie wypadkową.

Wziąwszy:

$$g_1 = x_1,\ g_2 = x_2, \ldots, g_k = x_k,\ g_{k+1} = \varphi_{k+1}, \ldots, g_n = \varphi_n,$$

widzimy, że R jest podzielne przez wyrażenie:

$$\left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_k, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n \end{matrix}\right]^{m_1 m_2 \ldots m_k} = \left[\begin{matrix} \varphi^0{}_{k+1}, \varphi^0{}_{k+2}, \ldots, \varphi_n{}^0 \\ x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n \end{matrix}\right]^{m_1 m_2 \ldots m_k}.$$

Iloraz jest niezależny od spółczynników form $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$, a więc:

$$\left[\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, x_{k+1}^{m_{k+1}}, \ldots, x_n^{m_n} \\ x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\ldots\ldots, x_n \end{matrix}\right]$$

$$= \left[\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, x_{k+1}, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n \end{matrix}\right]^{m_{k+1} \ldots m_n} = \left[\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{matrix}\right]^{m_{k+1} \ldots m_n}.$$

Jest przeto:

$$R = \left[\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \\ x_1, x_2, \ldots, x \end{matrix}\right]^{m_{k+1} \ldots m_n} \left[\begin{matrix} \varphi^0{}_{k+1} \ldots \varphi_n{}^0 \\ x_{k+1} \ldots x_n \end{matrix}\right]^{m_1 m_2 \ldots m_k}.$$

Przykład. Niechaj φ, ψ, χ będą formy ogólne zmiennych x_1, x_2, x_3 stopni λ, μ, ν. Oznaczmy wyrażenia, na które przechodzą ψ i χ po zastą-

pieniu zmiennych x_1, x_2, x_3 wyrażeniami $x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1$ przez $\psi(x, y), \chi(x, y)$ i położmy:

$$R = \left[\begin{matrix} \varphi, \psi(x, y), \chi(x, y) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 \end{matrix}\right], \quad \theta = \left[\begin{matrix} \psi, \chi, y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \\ x_1, x_2, \quad x_3 \end{matrix}\right].$$

Będzie wtedy:

$$R = \theta^{\lambda} \varphi(y_1, y_2, y_3)^{\mu\nu}.$$

Jeżeli zastosujemy podstawienie:

$$x_1 = X + y_1 Z, \quad x_2 = Y + y_2 Z, \quad x_3 = y_3 Z,$$

będzie:

$$\psi(x, y) = \psi(y_3 Y, -y_3 X, y_2 X - y_1 Y)$$
$$\chi(x, y) = \chi(y_3 Y, -y_3 X, y_2 X - y_1 Y)$$
$$\varphi = \varphi(y_1, y_2, y_3) Z^{\lambda} + [X, Y].$$

Wypadkowa tych trzech form względem X, Y, Z z jednej strony równa się $y_3{}^{\lambda\mu\nu} R$, z drugiej zaś rozpada się na dwa czynniki:

$$\left[\begin{matrix} \varphi(y_1, y_2, y_3) Z^{\lambda} \\ Z \end{matrix}\right]^{\mu\nu} = \varphi(y_1, y_2, y_3)^{\mu\nu}$$

$$\text{i} \quad \left[\begin{matrix} \varphi(y_3 Y - y_3 X, y_2 X - y_1 Y), & \psi(y_3 Y - y_3 X, y_2 X - y_1 Y \\ X \quad , & Y \end{matrix}\right]^{\lambda}.$$

Drugi czynnik równa się:

$$\theta(y_1 y_3, y_2 y_3, y_3{}^2)^{\lambda} = y_3{}^{\lambda\mu\nu} \theta^{\lambda};$$

a zatem:

$$y_3{}^{\lambda\mu\nu} R = \varphi(y_1, y_2, x_3)^{\mu\nu} \theta^{\lambda} y_3{}^{\lambda\mu\nu},$$
$$R = \theta^{\lambda} \varphi(y_1, y_2, y_3)^{\mu\nu}.$$

Część druga.

14. Jeżeli formy $g_1, g_2, \ldots, g_n$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkie postaci $[f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}]$, gdzie $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ są formami ogólnemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to znika wypadkowa:

$$R = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix}.$$

Albowiem:

$$R t_x^r = [g_1, g_2, \ldots, g_n] = P_1 f_1 + P_2 f_2 + \ldots + P_{n-1} f_{n-1},$$

gdzie $P_1, P_2, \ldots$ są funkcyami całkowitemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Jeżeli więc utworzymy wypadkową form:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, R t_x^r - P_1 f_1 - P_2 f_2 - \ldots - P_{n-1} f_{n-1},$$

to wypadkowa ta będzie zerem, z drugiej zaś strony ukaże się w postaci $R^\nu \theta^r$, gdzie θ jest wypadkową form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, t_x$; ν zaś oznacza iloczyn stopni form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Musi być tedy $R=0$, gdyż θ nie znika tożsamościowo.

Wypadkowa R n form znika, gdy dwie formy mają czynnik wspólny stopnia wyższego niż 0.

W szeregu form $f_1, f_2, \ldots, f_k$ dwie formy f_i, f_k niechaj będą iloczynami $f\varphi_i, f\varphi_k$ formy ogólnej f przez formy ogólne φ_i, φ_k, pozostałe zaś niechaj będą formami ogólnemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wszystkie formy $f_1, f_2, \ldots, f_n$ występują wtedy stosownie do tego czy $n=2$, albo $n>2$ w postaci $[f]$, albo $[f, f_\alpha, f_\beta, \ldots]$, gdzie $\alpha, \beta, \ldots$ oznaczają liczby $1, 2, \ldots, n$, po usunięciu liczb i i k; jest zatem $R=0$.

Twierdzenie to wypływa i stąd, że w tym przypadku R zawiera jako czynnik wypadkową szeregu form, w której forma i-ta i k-ta są równe f; taka zaś wypadkowa nie zmienia się, gdy formę k-tą f zastąpimy różnicą $f-f$ formy k-tej i i-tej, a więc znika tożsamościowo.

15. Jeżeli dla form szczególnych $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ zależnych od n zmiennych wypadkowa:

$$\theta = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{bmatrix},$$

znika tożsamościowo względem $u_1, u_2, \ldots, u_n$, to znika i wypadkowa:

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{bmatrix}$$

dla formy ogólnej f_n.

Niechaj $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ będą formy liniowe ogólne zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$; połóżmy:

$$f_i + t\varphi_i^{m_i} = g_i; \quad \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{bmatrix} = \theta_1$$

$$\begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{bmatrix} = R_1; \quad m_1 m_2 \ldots m_n = p$$

$$m_1 m_2 \ldots m_{n-1} = m_1 \mu_1 = m_2 \mu_2 = \ldots = m_{n-1} \mu_{n-1},$$

gdzie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ są stopniami form $f_1, f_2, \ldots, f_n$; t zaś jest nieoznaczoną. Wyrażenie θ_1 jest podzielne przez t, ponieważ dla $t=0$ przechodzi na znikające wyrażenie θ i nie znika tożsamościowo, gdyż przy potędze $t^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}}$ ma spółczynnik równy $\frac{p\text{-tej}}{m_n}$ potędze wypadkowej form $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, u_x$. A więc θ_1 jest postaci $t^h L$, gdzie L nie jest już podzielne przez t, h zaś >0.

Według ust. 5, mamy:

$$\theta_1^{p-m_n} R_1 = N(A, A', \ldots),$$

gdzie N jest funkcyą całkowitą jednorodną stopnia p spółczynników $A, A', \ldots$ wyrażenia θ_1. Jeżeli więc $B, B', \ldots$ są spółczynnikami przy tych samych iloczynach potęgowych nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots, u_n$, jak $A, A', \ldots$ w wyrażeniu θ_1, będzie:

$$A = t^h B, \quad A' = t^h B', \ldots$$

a stąd:

$$t^{hp-hm_n} L^{p-m_n} R_1 = t^{hp} N(B, B', \ldots),$$

lub

$$L^{p-m_n} R_1 = t^{hm_n} N(B, B', \ldots).$$

Jest zatem R_1 podzielne przez t, z drugiej zaś strony $R_1 = R + [t]$, a więc $R = 0$.

16. Jeżeli dwie formy $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nie znikające obie tożsamościowo, mają czynnik wspólny stopnia wyższego niż zero względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, który musi być oczywiście jednorodnym, to znika wypadkowa R form:

$$\varphi(y_1 X + z_1 Y,\ y_2 X + z_2 Y, \ldots), \quad \psi(y_1 X + z_1 Y,\ y_2 X + z_2 Y, \ldots),$$

względem X, Y, gdzie $y_1, y_2, \ldots;\ z_1, z_2, \ldots, z_n$ są nieoznaczonemi.

Jeżeli mianowicie $\chi(x_1, x_2, \ldots)$ jest takim wspólnym czynnikiem, to $\varphi(y_1 X + z_1 Y, \ldots)$ i $\psi(y_1 X + z_1 Y, \ldots)$ mają czynnik wspólny $\chi(y_1 X + z_1 Y, \ldots)$.

Odwrotnie, jeżeli wypadkowa R jest tożsamościowo zerem, to formy φ, ψ mają czynnik wspólny stopnia wyższego niż zero.

Szukając mianowicie największego wspólnego dzielnika T funkcyj:

$$\varphi(Xy_1 + z_1,\ Xy_2 + z_2, \ldots), \quad \psi(Xy_1 + z_1,\ Xy_2 + z_2, \ldots)$$

względem X, możemy przyjąć, że jest on całkowity względem $y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ i mamy tożsamość:

$$MT = [\varphi(Xy_1 + z_1, \ldots),\ \psi(Xy_1 + z_1, \ldots)],$$

gdzie M jest funkcyą całkowitą nieoznaczonych $y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$, nie znikającą tożsamościowo. Jeżeli funkcyę T przez wprowadzenie zmiennej Y uczynimy jednorodną względem X, Y i oznaczymy rezultat przez T_1, gdzie T_1 nie jest podzielne przez Y, będzie:

$$MT_1 Y^\varrho = [\varphi(Xy_1 + Yz_1, \ldots),\ \psi(Xy_1 + Yz_1, \ldots)]$$

i jest jasnem, że wypadkowa form $\varphi(Xy_1 + Yz_1, \ldots)$ (lub $\psi(Xy_1 + Yz_1, \ldots)$) i MTY^ϱ jest algebraicznie podzielna przez R, że więc wypadkowa form $\varphi(Xy_1 + Yz_1, \ldots)$ i T_1 lub form $\psi(Xy_1 + Yz_1, \ldots)$ i T_1 znika. Nie może być tedy T_1 stopnia 0.

Jeżeli w formie T zastąpimy nieoznaczone $z_1, z_2, \ldots$ przez nieoznaczone $x_1 - Xy_1$, $x_2 - Yy_2, \ldots$, otrzymamy funkcyę całkowitą χ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, X$, która dzieli funkcye φ i ψ, a więc nie może zawierać nieoznaczonych X, $y_1, y_2, \ldots$, czyli jest funkcyą tylko zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta funkcya musi być jednorodną i nie może być stopnia 0, gdyż $\chi(Xy_1 + z_1, \ldots) = T$ zawiera zmienną X przynajmniej w stopniu 1.

17. Niechaj $f_1, f_2, \ldots, f_n$;

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n; \quad v_x = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_n x_n$$

$$w_x = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n$$

będą formami ogólnemi n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$; φ i ψ – wypadkowemi, mianowicie:

$$\varphi(u_1\, u_2 \ldots u_n) = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & \ldots, & f_{n-1}, & u_x \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix},$$

$$\psi(u_1, u_2, \ldots) = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & \ldots, & f_{n-2}, f_n, & u_x \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix}.$$

Jeżeli w wypadkowych φ, ψ zastąpimy nieoznaczone $u_1, u_2, \ldots$ przez $Xv_1 + Yw_1$, $Xv_2 + Yw_2, \ldots$ i utworzymy wypadkową:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \varphi(Xv_1 + Yw_1, \ldots), & \psi(Xv_1 + Yw_1, \ldots) \\ X \quad , & Y \end{bmatrix},$$

to będzie ona podzielną algebraicznie przez wypadkową:

$$R = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & \ldots, & f_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{bmatrix},$$

form $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Albowiem z tożsamości:

$$\Omega Y^\varrho = [\varphi(Xv_1 + Yw_1, \ldots),\ \psi(Xv_1 + Yw_1, \ldots)],$$

$$x_n^r \varphi = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_x],\ x_n^s \psi = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}, f_n\, u_x],$$

wynika najprzód:

$$x_n^r \varphi(Xv_1 + Yw_1, \ldots) = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, Xv_x + Yw_x],$$

$$x_n^s \psi(Xv_1 + Yw_1, \ldots) = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}, f_n, Xv_x + Yw_x],$$

a stąd przy odpowiednim wyborze liczby σ:

$$\Omega Y^\varrho x_n^\sigma = [f_1, f_2, \ldots, f_n, u_x, Xv_x + Yw_x].$$

Jeżeli więc nieoznaczone X, Y, $u_1, u_2, \ldots$ zastąpimy odpowiednio przez wyrażenia $-w_x$, v_x, $w_x v_1 - v_x w_1$, $w_x v_2 - v_x w_2, \ldots$, będzie:

$$\Omega v_x^\varrho x_n^\sigma = [f_1, f_2, \ldots, f_n].$$

A zatem Ω posiada własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

18. Jeżeli θ jest wypadkową $n-1$ form ogólnych $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ i formy liniowej $u_x = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$, i jeżeli położymy dla skrócenia $\frac{\partial \theta}{\partial u_i} = \theta_i$, to wyrażenia:

$$f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n),\ f_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \dots, f_{n-1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n),$$

będą wszystkie podzielne przez θ. Jest bowiem:

$$\theta x_n^r = [f_1, f_2, \dots, f_{n-1}] + Q u_x,$$

gdzie Q jest funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \dots, u_x$ i zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Jeżeli weźmiemy pochodną względem u_i, będzie:

$$x_n^r \theta_i = [f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, u_x] + Q x_i,$$

a stąd:

$$\begin{aligned} x_n^{rm_k} f_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= [f_1, f_2, \dots, u_x] + Q^{m_k} f_k \\ &= [f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, u_x]. \end{aligned}$$

Wyrażenie $f_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ posiada więc własność zasadniczą względem form $f_1, f_2, \dots, u_x$ i dlatego musi być podzielne algebraicznie przez θ.

19. Niechaj $s_1, s_2, \dots, s_n$; $t_1, t_2, \dots, t_n$; $u_1, u_2, \dots, u_n$ będą nieoznaczone, $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ dane formy zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ takie, że wypadkowa:

$$\theta = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & \dots, & f_{n-1}, & u_x \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix},$$

nie znika tożsamościowo względem $u_1, u_2, \dots, u_n$. Niechaj θ względem $u_1, u_2, \dots, u_n$ rozpada się na dwa czynniki całkowite P^μ i Q, gdzie $\mu \geqslant 1$, P zaś jest stopnia wyższego niż zero względem $u_1, u_2, \dots$ i nadto jest niespółdzielne tak z Q jako też z wyrażeniem:

$$s_1 \frac{\partial P}{\partial u_1} + s_2 \frac{\partial P}{\partial u_2} + \dots + s_n \frac{\partial P}{\partial u_n}.$$

Połóżmy dla skrócenia:

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = P_i; \quad t_1 P_1 + t_2 P_2 + \dots + t_n P_n = P_t,$$

oznaczmy dla skrócenia stopień funkcyi P względem $u_1, u_2, \dots, u_n$ przez λ,

iloczyn stopni $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ funkcyj $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ przez ν, wyrażenie zaś postaci $[f_1, f_2, \dots, f_{n-1}]$ ogólnie przez $\square_x$.

I. Każde z wyrażeń:

$$f_1(P_1, P_2, \dots, P_n),\ f_2(P_1, P_2, \dots, P_n), \dots, f_{n-1}(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

jest algebraicznie podzielne przez P.

Według ust. **10**, mamy tożsamość:

$$\Theta(t_x u_1 - u_x t_1, \dots) = P^\mu(t_x u_1 - u_x t_1, \dots)\, Q(t_x u_1 - u_x t_1, \dots) = \square_x,$$

gdzie:

$$\Theta(t_x u_1 - u_x t_1, \dots),\ P(t_x u_1 - u_x t_1, \dots),\ Q(t_x u_1 - u_x t_1, \dots),$$

są wyrażeniami, powstającemi z θ, P, Q przez zamianę nieoznaczonych $u_1, u_2, \dots$ odpowiednio na $t_x u_1 - u_x t_1$, $t_x u_2 - u_x t_2, \dots$ Wziąwszy pochodne μ—te obu stron względem $u_\alpha, u_\beta, \dots, u_\varepsilon$ i kładąc dla skrócenia:

$$t_x P_i - P_t x_i = y_i,$$

znajdziemy:

$$\mu!\, t_x^{\mu(\lambda-1)} y_\alpha y_\beta \dots y_\varepsilon Q(t_x u_1 - u_x t_1, \dots) + [P, u_x] = \square_x.$$

Dla każdego tedy iloczynu potęgowego:

$$\mathfrak{P} = y_\alpha y_\beta \dots y_\varepsilon$$

stopnia μ-tego wyrażeń $y_1, y_2, \dots, y_n$ ma miejsce równanie:

$$t_x^{\nu-\mu} Q \mathfrak{P} = [u_x, P] + \square_x.$$

Ponieważ jest tożsamościowo:

$$\begin{aligned} t_x^{m_i} f_i(P_1, P_2, \dots) &= f_i(t_x P_1, t_x P_2, \dots) \\ = f_i(P_t x_1 + y_1, P_t x_2 + y_2, \dots) &= P_t^{m_i} f_i + [y_1, y_2, \dots, y_n] \\ &= [f_i, y_1, y_2, \dots, y_n], \end{aligned}$$

przeto podnosząc do potęgi μ-tej, znajdziemy:

$$t_x^{\mu m_i} f_i^\mu(P_1, P_2, \dots) = [f_i, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \dots],$$

gdzie $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots$ są różne iloczyny potęgowe stopnia μ-tego wyrażeń $y_1, y_2, \ldots, y_n$. A więc z powyższego równania wypływa:

$$Q\, f_i^\mu\, (P_1, P_2, \ldots)\; t_x^{\nu-\mu+\mu m_i} = [u_x, P] + \square_x.$$

Na podstawie tej tożsamości wypadkowa form:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1},\; Q\, f_i^\mu\, (P_1, P_2, \ldots)\; t_x^{\mu m_i + \nu - \mu}$$

względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ występuje tak w postaci:

$$Q^\nu f_i^{\mu\nu}\, (P_1, P_2, \ldots)\; \theta\, (t_1, t_2, \ldots)^{\mu m_i + \nu - \mu},$$

jako też w postaci:

$$[\theta, P] = [P],$$

a więc wyrażenie:

$$Q^\nu f_i^{\mu\nu}\, (P_1, P_2, \ldots)\; \theta\, (t_1, t_2, \ldots)^{\mu m_i + \nu - \mu}$$

jest algebraicznie podzielne przez P. Tożsamo zachodzi i dla $f_i^{\mu\nu}\,(P_1, P_2, \ldots)$, gdyż Q i P są niespółdzielne, a zatem i dla $f_i\,(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

II. Jeżeli położymy dla skrócenia:

$$u_1 \frac{\partial P\,(s_1, s_2, \ldots)}{\partial s_1} + u_2 \frac{\partial P\,(s_4, s_2, \ldots)}{\partial s_2} + \ldots = P_u\,(s_1, s_2, \ldots),$$

to wypadkowa:

$$R = \begin{bmatrix} P\,(Xv_1 + Yw_1, \ldots), & P_u\,(Xv_1 + Yw_1, \ldots) \\ X & , \quad Y \end{bmatrix},$$

będzie podzielna algebraicznie przez P.

Niechaj $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \ldots, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \ldots$ będą spółczynnikami, występującemi odpowiednio w rozwinięciach wyrażeń:

$$P^\mu\,(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots),\; Q\,(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots),\; P^\mu\,(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots)\; Q\,(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots)$$

według nieoznaczonych $s_1, s_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots,$ i niechaj L_m będzie jednym z iloczynów potęgowych stopnia m-tego spółczynników $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \ldots$ Istnieje [1] wykładnik e taki, że wszystkie iloczyny $\mathfrak{A} L_e, \mathfrak{A}' L_e, \ldots$ dają się przedstawić

[1]) **Mertens**: Wien. Sitzungsber., 1892.

jako sumy wielokrotności (funkcye całkowite całkowito-liczbowe liniowe i jednorodne) iloczynów $\mathfrak{C} L_{e-1}, \mathfrak{C}' L_{e-1}, \ldots$ Ponieważ zgodnie z tożsamością:

$$P^\mu\,(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots)\; Q\,(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots) = \square_x,$$

wszystkie spółczynniki $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \ldots$ są postaci $\square_x$, przeto takiejże postaci są iloczyny $\mathfrak{C} L_{e-1}, \mathfrak{C}' L_{e-1}, \ldots$ i będzie:

$$\mathfrak{A}\, L_e = \square_x, \quad \mathfrak{A}'\, L_e = \square_x, \ldots$$

a więc także:

$$Q^e\,(t_x u_1 - u_x t_1, \ldots)\; P^\mu\,(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots) = \square_x,$$

gdyż $Q^e\,(t_x u_1 - u_x t_1, \ldots)$, po rozwinięciu według $t_1, t_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots,$ zawiera same sumy wielokrotne iloczynów potęgowych L_e, zaś $P^\mu(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots)$ po rozwinięciu według $t_1, t_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots$ ma spółczynniki $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$

Będzie tedy:

$$t_x^a\; Q^e\; P^\mu\,(s_1, s_2, \ldots) = \square_x + [s_x, u_x],$$

gdzie:

$$a = \mu\lambda + e\,(\nu - \mu\lambda),$$

μ-krotne zaś wykonanie działania:

$$u_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \ldots + u_n \frac{\partial}{\partial s_n}$$

daje:

$$\mu!\; t_a^x\; Q^e\; P_u^\mu\,(s_1, s_2, \ldots) + [P\,(s_1, s_2, \ldots)] = \square_x + [s_x, u_x].$$

Jeżeli położymy:

$$s_1 = v_1 X + w_1 Y, \quad s_2 = v_2 X + w_2 Y,$$

będzie:

$$t_x^a\; Q^e\; P^\mu\,(v_1 X + w_1 Y, \ldots) = \square_x + [u_x, v_x X + w_x Y]$$

$$t_x^a\; Q^e\; P_u^\mu\,(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + [P\,(v_1 X + w_1 Y, \ldots)]$$

$$= \square_x + [u_x, v_x X + w_x Y].$$

Otrzymujemy stąd na wypadkową $\mathfrak{R}$ równanie:

$$t_x^{(2\lambda-1)\alpha\mu}\, Q^{e(2\lambda-1)\mu}\, \mathfrak{R}^{\mu\mu} = \Box_x + [u_x].$$

Zastępując tu $x_1, x_2, \dots, x_n$ przez $P_1, P_2, \dots, P_n$, otrzymujemy według I:

$$P_t^{a(2\lambda-1)\mu}\, Q^{e(2\lambda-1)\mu}\, \mathfrak{R}^{\mu\mu} = [P].$$

Ponieważ zaś P_t i Q są niespółdzielne z P, przeto $\mathfrak{R}^{\mu\mu}$, a więc i $\mathfrak{R}$ jest algebraicznie podzielne przez P.

Jeżeli napiszemy:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{M} P,$$

to $\mathfrak{M}$ będzie nieznikającą tożsamościowo i nie zawierającą nieoznaczonych $u_1, u_2, \dots$ funkcyą całkowitą wyznaczników:

$$v_1 w_2 - v_2 w_1, \quad v_1 w_3 - v_3 w_1, \dots$$

III. Połóżmy dla skrócenia:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik},$$

$$\Delta(x_1, x_2, \dots) = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & \dots, & f_{1n} \\ f_{21}, & f_{22}, & \dots, & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n-1,1}, & f_{n-1,2}, & \dots, & f_{n-1,n} \\ t_1, & t_2, & \dots, & t_n \end{vmatrix}$$

$$N = \Delta(P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Jeżeli $\mu > 1$, to N jest podzielne algebraicznie przez P.

Pomyślmy formy $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ najprzód jako ogólne i połóżmy:

$$t_\xi x_i - t_x \xi_i = \eta_i, \quad f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f_i^0, \quad t_x^{m_i} f_i^0 - t_\xi^{m_i} f_i = g_i,$$

gdzie $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ oznaczają zmienne. Ponieważ:

$$\begin{aligned} g_i &= f_i(t_x \xi_1, t_x \xi_2, \dots) - f_i(t_\xi x_1, t_\xi x_2, \dots) \\ &= f_i(t_x \xi_1, t_x \xi_2, \dots) - f_i(\eta_1 + t_x \xi_1, \eta_2 + t_x \xi_2, \dots) \\ &= [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n], \end{aligned}$$

to można napisać:

$$g_i = \varphi_{i1}\eta_1 + \varphi_{i2}\eta_2 + \dots + \varphi_{in}\eta_n,$$

gdzie $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in}$ są funkcyami całkowitemi zmiennych $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, t_x, ξ_1, $\xi_2, \dots$ i spółczynników form f_i. Różniczkując względem x_r, znajdujemy:

$$m_i t_x^{m_i-1} t_r f_i^0 - t_\xi^{m_i} f_{ir} = \varphi_{i1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_r} + \varphi_{i2}\frac{\partial \eta_2}{\partial x_r} + \dots + \varphi_{in}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_r}$$

$$+ \eta_1 \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial x_r} + \eta_2 \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial x_r} + \dots + \eta_n \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial x_r}.$$

Pomnóżmy przez η_r i sumujmy od $r=1$ do $r=n$; wtedy uwzględniając równania:

$$t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \dots + t_n\eta_n = 0$$

$$\eta_1 \frac{\partial \eta_k}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \eta_k}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial \eta_k}{\partial x_n} = t_\xi \eta_k,$$

$$\eta_1 \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_n} = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial \eta_\alpha}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_2} + \dots\right)$$

$$+ \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial t_x}(t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \dots) = t_x \Sigma\, \eta_\alpha \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial \eta_\alpha}$$

i opuszczając t_ξ, znajdziemy:

$$(-t_\xi^{m_i-1} f_{i1} - \omega_{i1})\eta_1 + (-t_\xi^{m_i-1} f_{i2} - \omega_{i2})\eta_2 + \dots = g_i,$$

gdzie:

$$\omega_{ik} = \sum_\alpha \eta_\alpha \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial \eta_\alpha}.$$

Mamy więc $n-1$ tożsamości:

$$(t_\xi^{m_1-1} f_{11} + \omega_{11})\eta_1 + (t_\xi^{m_1-1} f_{12} + \omega_{12})\eta_2 + \dots = -g_1,$$

$$(t_\xi^{m_2-1} f_{21} + \omega_{21}) \quad + (t_\xi^{m_2-1} f_{22} + \omega_{22})\eta_2 + \dots = -g_2,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$(t_\xi^{m_{n-1}-1} f_{n-1} \omega_{n-11})\eta_1 + (t_\xi^{m_{n-1}-1} f_{n-12} + \omega_{n-12})\eta_2 + \dots = -g_{n-1}.$$

Jeżeli dołączymy jeszcze równania:

$$t_1 \eta_1 + t_2 \eta_2 + \ldots t_n \eta_n = 0,$$

$$-u_1 \eta_1 - u_2 \eta_2 \ldots - u_n \eta_n + t_\xi u_x - u_\xi t_x = 0,$$

będziemy mieli $n+1$ równań liniowych dla wyrażeń:

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \; t_\xi u_x - u_\xi t_x .$$

Rozwiązanie tych równań względem $t_\xi u_x - u_\xi t_x$ daje:

$$A(t_\xi u_x - u_\xi t_x) = [g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}],$$

gdzie A oznacza wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} t_\xi^{m_1-1} f_{11} + \omega_{11}, & t_\xi^{m_1-1} f_{12} + \omega_{12}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_\xi^{m_{n-1}-1} f_{n-11} + \omega_{n-11}, & t_\xi^{m_n-1} f_{n-12} + \omega_{n-12}, & \ldots \\ t_1, & t_2, & \ldots \end{vmatrix}.$$

Jeżeli rozwiniemy wyznacznik A według wyrażeń $\omega_{11}, \omega_{12}, \ldots; \omega_{nn}$ i wszystkie wyrazy, zawierające przynajmniej jedno z tych wyrażeń jako czynnik, zbierzemy w jedno wyrażenie $-\omega$, będzie ω postaci $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$ i otrzymamy:

$$A = t_\xi^\sigma \Delta - \omega,$$

gdzie:

$$\sigma = m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} - n + 1.$$

Jeżeli więc przez g rozumiemy formę ogólną zmiennych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ stopnia $\mu\sigma+\nu-\mu+1-m_1$, przez s nieoznaczoną i położymy:

$$s t_\xi^{\nu-\mu+1} (t_\xi^{\mu\sigma} \Delta^\mu - \omega^\mu) + g f_1^0 = F,$$

$$\begin{bmatrix} t_x^{m_1} F - g t_\xi^{m_1} f_1, & g_2, & \ldots, & g_{n-1}, & u_\xi \\ \xi_1, & & \xi_2, & \ldots, & \xi_n \end{bmatrix} = \Omega,$$

$$\begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, u_\xi \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \end{bmatrix} = \theta^0, \quad \frac{\nu}{\mu_1} = \varrho,$$

będzie wyrażenie $(F - g f_1^0) u_x$ podzielne przez $A t_\xi u_x$, a więc—podług powyższego—postaci:

$$[g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, u_\xi];$$

tożsamo stosuje się do wyrażenia:

$$(t_x^{m_1} F - g t_\xi^{m_1} f_1) u_x,$$

a przeto wypadkowa $u_x^\varrho \Omega$ form:

$$(t_x^{m_1} F - g t_\xi^{m_1} f_1) u_x, \; g_2, \ldots, g_{n-1}, u_\xi$$

względem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ musi być podzielna przez θ^0. Niechaj będzie:

$$\Omega u_x^\varrho = H \theta^0.$$

θ^0 jest podzielne przez u_x, ale nie jest podzielne przez u_x^2, gdyż jest:

$$\theta^0 = t_x^{(n-1)\nu} \theta + \Box_x;$$

gdyby więc θ^0 było podzielne przez u_x^2, musiałaby pochodna $\frac{\partial\theta}{\partial u_n}$ mieć własność zasadniczą względem $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_x$, co nie ma miejsca. A zatem H musi być podzielne przez $u_x^{\varrho-1}$. Jeżeli położymy:

$$H = u_x^{\varrho-1} K; \quad \Phi = \begin{bmatrix} F_1, f_2^0, \ldots, f^0_{n-1}, u_\xi \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \end{bmatrix},$$

$$\nu + (n-2)\nu(\mu\sigma + \nu - \mu + 1) = \tau - 1,$$

będzie:

$$\Omega u_x = K \theta^0 = K t_x^{\nu(n-1)} \theta + \Box_x,$$

z drugiej zaś strony:

$$\Omega = t_x^{\tau-1} \Phi + \Box_x,$$

a zatem:

$$t_x^{t-1} u_x \Phi = [\theta] + \Box_x,$$

a po wykonaniu działania:

$$\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)=t_1\frac{\partial}{\partial u_1}+t_2\frac{\partial}{\partial u_2}+\ldots+t_n\frac{\partial}{\partial u_n},$$

$$t_x{}^r\,\Phi=\left[\theta,\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)\theta,\,u_x\right]+\square_x.$$

Jeżeli tożsamość tę zastosujemy do form danych $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ i położymy nadto:

$$s=Q,\ x_1=P_1,\ x_2=P_2,\ldots,x_n=P_n,$$

przez co Φ, F, ω, η_i niechaj przejdą na Φ^0, F^0, ω_0, $\eta_i{}^0$, będą θ, $\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)\theta$ oraz $f_1(P_1, P_2, \ldots)$, $f_2(P_1, P_2, \ldots)\ldots$ podzielne przez P, a stąd $P_t{}^r\,\Phi^0$, a więc i Φ^0 musi być podzielne przez P. Z drugiej strony jest:

$$F^0=Q\,N^\mu\,t_\xi{}^{\mu\sigma+\nu-\mu+1}-Q\,t_\xi{}^{\nu-\mu+1}\,\omega_0{}^\mu+gf_1{}^0,$$

ponieważ wszakże każdy iloczyn potęgowy stopnia μ-tego $\eta_\alpha{}^0\,\eta_\beta{}^0\ldots\eta_\varepsilon{}^0$ wyrażeń $\eta_1{}^0, \eta_2{}^0, \ldots, \eta_h{}^0$ czyni według I, zadość równaniu.

$$Q\,t_\xi{}^{\nu-\mu+1}\,\eta_\alpha{}^0\,\eta_\beta{}^0\ldots\eta_\varepsilon{}^0=[P,u_\xi,f_1{}^0,\ldots,f_{n-1}{}^0],$$

przeto $Q\,t_\xi{}^{\nu-\mu+1}\,\omega_0{}^\mu$ jest postaci:

$$\psi\,f_1{}^0+[f_2{}^0,f_3{}^0,\ldots,f^0{}_{n-1},u_\xi,P]$$

i będzie:

$$F^0=Q\,N^\mu\,t_\xi{}^{\mu\sigma+\nu-\mu+1}+(g-\psi)\,f_1{}^0+[f_2{}^0,\ldots,f_{n-1},u_\xi,P].$$

Jeżeli dobierzemy funkcyę g tak, aby było $g=\psi$, co z powodu równych stopni funkcyj g i ψ jest dozwolone, będzie:

$$\Phi^0=\begin{bmatrix}Q\,N^\mu\,t_\xi{}^{\mu\sigma+\nu-\mu+1}+[P], & f_2{}^0, & \ldots, & f_{n-1}, & u_\xi\\ \xi_1, & \xi_2, & \ldots, & & \xi_n\end{bmatrix}$$

$$=\pm\,Q^\varrho\,N^{\mu\varrho}\,L^{\mu\sigma+\nu-\mu+1}+[P],$$

gdzie:

$$L=\begin{bmatrix}f_2, & f_3, & \ldots, & f_{n-1}, & t_x, & u_x\\ x_1, & x_2, & \ldots, & & , & x_n\end{bmatrix}.$$

Będzie też zatem:

$$Q^\varrho\,L^{\mu\sigma+\nu-\mu+1}\,N^{\mu\varrho}=[P].$$

Wyrażenie L według **15** nie może znikać tożsamościowo i musi być niespółdzielne z P, ponieważ zawiera nieoznaczone $t_1, t_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots$ tylko wewnątrz wyznaczników $t_1u_2-t_2u_1, \ldots$ Gdyby bowiem L i P zawierały czynnik wspólny T stopnia wyższego niż 0 względem $u_1, u_2, \ldots,$ to byłoby $L=[T]$, a więc po zastąpieniu nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots$ przez u_1+st_1, $u_2+st_2, \ldots$ byłoby:

$$L=[T(u_1+st_1,u_2+st_2,\ldots],$$

co jest niemożliwe, ponieważ L nie zawiera nieoznaczonej s.

Ponieważ tedy $Q^\varrho\,L^{\mu\varrho+\nu-\mu+1}$ i P są niespółdzielne, wynika stąd:

$$N^{\mu\varrho}=[P],$$

a więc także:

$$N=[P].$$

20. Jeżeli $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ są ogólnemi formami zmiennych $x_1, x_2, \ldots x$ i nie wszystkie liniowemi, i jeżeli położymy:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}=f_{ik},\qquad\begin{vmatrix}f_{11}, & f_{12}, & \ldots, & f_{1n}\\ f_{21}, & f_{22}, & \ldots, & f_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ f_{n-11}, & f_{n-12}, & \ldots, & f_{n-1n}\\ u_1, & u_2, & \ldots, & u_n\end{vmatrix}=\Delta_u,$$

$$u_x=u_1x_1+u_2x_2+\ldots+u_nx_n,$$

$$\theta=\begin{bmatrix}f_1, & f_2, & \ldots, & f_{n-1}, & u_x\\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1}, & x_n\end{bmatrix},\quad \Psi=\begin{bmatrix}f_1, & f_2, & \ldots, & f_{n-1}, & \Delta_u\\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1}, & x_n\end{bmatrix},$$

to Ψ będzie podzielne przez θ.

Albowiem mamy:

$$x_n \Delta_u = \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n-1}, & x_1 f_{11} + x_2 f_{12} + \ldots + x_n f_{1n} \\ f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n-1}, & x_1 f_{21} + x_2 f_{22} + \ldots + x_n f_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, & u_x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n-1}, m_1 f_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_x \end{vmatrix}.$$

Z tożsamości zaś:

$$\Psi x_n^r = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, \Delta_u],$$

wynika:

$$x_n^{r+1} \Psi = [f_1. f_2, \ldots, f_{n-1}, x_n \Delta_u],$$

będzie zatem:

$$x_n^{r+1} \Psi = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_x].$$

A więc Ψ posiada własność zasadniczą względem $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_x$.

Jeżeli napiszemy:

$$\Psi = D\,\theta,$$

to D będzie funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, niezależną od $u_1, u_2, \ldots, u_n$; funkcya ta nazywa się według Kroneckera **wyróżnikiem** tychże form

Jeżeli:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_i} = \theta_i, \quad \theta_t(u_1, u_2, \ldots) = t_1 \theta_1 + t_2 \theta_2 + \ldots + t_n \theta_n,$$

to według poprzednio dowiedzionego twierdzenia:

$$\begin{bmatrix} \theta(v_1 X + w Y_1, \ldots), & \theta_t(v_1 X + w_1 Y, \ldots) \\ X, & Y, \end{bmatrix} = M \theta(t_1, \ldots),$$

gdzie M jest funkcyą całkowitą spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ i wy-

znaczników $v_1 w_2 - v_2 w_1, v_1 w_3 - v_3 w_1, \ldots$ Wyrażenie M jest algebraicznie podzielne przez D.

Aby to okazać, położmy:

$$u_x = f_n, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = f_{ni} = u_i,$$

$$f_i(t_n X_1 + x_1 X_n, t_n X_2 + x_2 X_n, \ldots, -t_1 X_1 - t_2 X_2 - \ldots + x_n X_n) = g_i$$

$$\nu = m_1 m_2 \ldots m_{n-1}.$$

Forma f_i ma przy iloczynach potęgowych:

$$X_1 X_n^{m_i - 1}, X_2 X_n^{m_i - 1}, \ldots, X_n^{m_i},$$

spółczynniki:

$$t_n f_{i1} - t_1 f_{in}, t_n f_{i2} - t_2 f_{in}, \ldots, f_i,$$

a wypadkowa form $g_1, g_2, \ldots, g_n$ względem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest z jednej strony równa $t_n^{\nu(n-2)} t_x^\nu \theta$, z drugiej zaś według ust. **12** jest postaci:

$$Q \begin{vmatrix} t_n f_{11} - t_1 f_{1n}, t_n f_{12} - t_2 f_{1n}, \ldots, f_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_n f_{n1} - t_1 f_{nn}, t_n f_{n2} - t_2 f_{nn}, \ldots, f_n \end{vmatrix} + H,$$

gdzie Q, H oznaczają funkcye całkowite spółczynników form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ oraz zmiennych $x_1, x_2, \ldots,$ H zaś jest względem $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wymiaru wyższego niż pierwszy. Mamy zatem:

$$t_n^{\nu(n-2)} t_x^\nu \theta = [u_x \Delta_t] + [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}] + H$$

Po wykonaniu działania:

$$t_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + t_n \frac{\partial}{\partial u_n}$$

i zastąpieniu nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots$ przez $v_1 w_x - w_1 v_x, v_2 w_x - w_2 v_x, \ldots$ otrzymujemy:

$$t_n^{\nu(n-2)} t_x^\nu \theta_i(v_1 w_x - w_1 v_x, \ldots) = [t_x \Delta_t] + [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}].$$

Jeżeli przeto weźmiemy wypadkową form:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1},\ t_n^{\nu(n-2)}\, t_x^{\nu}\, \theta_t\, (v_1 w_x - w_1 v_x, \ldots),$$

względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to będzie ona tak postaci:

$$t_n^{(n-2)\nu\nu}\, \theta^{\nu}\, (t_1, t_2, \ldots)\, M\theta\, (t_1, t_2, \ldots),$$

jako też i postaci:

$$[\theta\, (t_1, t_2, \ldots)\, D\, \theta\, (t_1, t_2, \ldots)].$$

Będzie zatem:

$$t_n^{(\nu-2)\nu\nu}\, \theta^{\nu+1}\, (t_1, t_2, \ldots)\, M = [D\, \theta^2\, (t_1, t_2, \ldots)],$$

a po zniesieniu czynnika $t_n^{(n-2)\nu\nu}\, \theta^{\nu+1}\, (t_1, t_2, \ldots)$:

$$M = [D].$$

Wyróżnik D znika, gdy θ posiada czynnik wielokrotny względem $u_1, u_2, \ldots, u_n$ Jest też wtedy bowiem także:

$$\theta = P^{\mu}\, Q,$$

gdzie $\mu \geqslant 2$ i P jest niespółdzielne z Q, oraz z wyrażeniem:

$$P_t = t_1 \frac{\partial P}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial P}{\partial u_2} + \ldots$$

Z tożsamości:

$$D\, \theta\, (t_1, t_2, \ldots)\, t_x^{r} = [f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, \Delta_t],$$

skoro położymy:

$$x_1 = \frac{\partial P}{\partial u_1},\ x_2 = \frac{\partial P}{\partial u_2}, \ldots, x_n = \frac{\partial P}{\partial u_n},$$

wynika na zasadzie ust. **19**:

$$D\, \theta\, (t_1, t_2, \ldots)\, P_t^{r} = [P],$$

a wyrażenie $D\, \theta\, (t_1, t_2, \ldots)$ musi znikać, ponieważ nie zawiera $u_1, u_2, \ldots$ Że zaś $\theta\, (t_1, t_2, \ldots)$ nie znika tożsamościowo, przeto:

$$D = 0.$$

Ale wyróżnik D znika też, gdy θ znika tożsamościowo względem $u_1, u_2, \ldots$

Niechaj $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ będą formy ogólne tych samych stopni, co $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$; t niechaj będzie nieoznaczoną. Położymy:

$$f_i + t\, \varphi_i = g_i,\quad \theta_0 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots, \quad x_n \end{bmatrix}$$

i oznaczmy wyróżnik form $g_1, g_1, \ldots, g_{n-1}$ przez D_0. Jeżeli przez N rozumieć będziemy funkcyę całkowitą jednorodną spółczynników $A, A', \ldots$ wyrażenia θ_0 stopnia:

$$q = m_1 m_2 \ldots m_{n-1}\, (m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} - n + 1),$$

będzie według ust. **5**:

$$\theta_0\, (t_1, \ldots)^{q - m_1 - m_2 - \ldots - m_{n-1} + n}\, D_0 = N\, (A, A', \ldots).$$

θ_0 nie znika tożsamościowo i jest podzielne przez t. Jeżeli t^h jest najwyższą potęgą nieoznaczonej t, dzielącą wszystkie spółczynniki wyrażenia θ i jeżeli położymy:

$$\theta_0 = F t^h,\ A = B t^h,\ A' = B' t^h, \ldots$$

to poprzedzające równanie da nam:

$$F^{q - m_1 - m_2 \ldots - m_{n-1} + n}\, D_0 = t^{h\, (m_1 + m_2 + \ldots - n)}\, N\, (B, \ldots).$$

Gdy więc $m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} - n > 0$, to D_0 jest podzielne przez t, a więc $D = 0$.

W przypadku $m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} - n = 0$ jedna z form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ jest kwadratową, dajmy na to f_1, pozostałe liniowemi i twierdzenie nasze wynika z równania:

$$D = \pm \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta}.$$

w którem:

$$f_1 = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta.$$

21. Dana forma F nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots, u_n$ daje się zawsze przedstawić w postaci $F = C\varphi^{\lambda}\psi^{\mu} \ldots$, gdzie formy $\varphi, \psi, \ldots$ są odpowiednio niespółdzielne z formami:

$$t_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \ldots + t_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_n},\quad t_1 \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial \psi}{\partial u_2} + \ldots + t_n \frac{\partial \psi}{\partial u_n}, \ldots$$

i — gdy ich liczba jest większa od 1 — także niespółdzielne pomiędzy sobą; C jest stała, $t_1, t_2, \dots, t_n$ są nieoznaczone.

Niechaj $\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)$ oznacza działanie:

$$t_1\frac{\partial}{\partial u_1}+t_2\frac{\partial}{\partial u_2}+\dots+t_n\frac{\partial}{\partial u_n},$$

i niechaj będzie:

$$F'=\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)F,\quad F''=\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)F'=\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)^2F,\dots$$

Jeżeli F, F' są niespółdzielne ze sobą względem nieoznaczonych $u_1, u_2, \dots, u_n$, to dość położyć $\varphi=F$, aby otrzymać przedstawienie $F=\varphi$. Jeżeli F i F' posiadają dzielnik wspólny stopnia wyższego od 0 względem $u_1, u_2, \dots, u_n$, to mogą w tym razie jeszcze także F, F', F'' albo F, F', F'', F''' i t. d. posiadać taki czynnik wspólny. Niechaj λ będzie największą liczbą taką, że jeszcze $F, F', \dots, F^{(\lambda-1)}$ mają dzielnik wspólny stopnia wyższego niż zero względem $u_1, u_2, \dots$; i niechaj φ będzie największym wspólnym dzielnikiem tych funkcyj. Jest wtedy φ niespółdzielne z formą $\varphi'=\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi$, gdyż w razie przeciwnym miałyby także $F, F', \dots, F^{(\lambda)}$ czynnik wspólny.

Forma F jest podzielna przez φ^λ. W samej rzeczy, niechaj będzie:

$$F^{(i)}=A_i\,\varphi,$$

gdy $i<\lambda$. Z tożsamości:

$$F^{(\lambda-2)}=A_{\lambda-2}\,\varphi,$$

po wykonaniu działania $\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)$, wypływa:

$$F^{(\lambda-1)}=\varphi' A_{\lambda-2}+\varphi\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)A_{\lambda-2}$$

i będzie:

$$\varphi' A_{\lambda-2}=\varphi A_{\lambda-1}-\varphi\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)A_{\lambda-2}.$$

A więc $\varphi' A_{\lambda-2}$, a stąd także $A_{\lambda-2}$ musi być podzielne przez φ. Jeżeli położymy $A_{\lambda-2}=B\varphi$, będzie tedy:

$$F^{(\lambda-2)}=B\varphi^2.$$

Gdy więc $\lambda=2$, jest $F=B\varphi^2$ i twierdzenie jest udowodnione.

Gdy $\lambda>2$, to z tożsamości:

$$F^{(\lambda-3)}=A_{\lambda-3}\varphi,$$

po wykonaniu działania $\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)$, wypływa znów:

$$F^{(\lambda-2)}=\varphi' A_{\lambda-3}+\varphi\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)A_{\lambda-3}$$

i będzie:

$$\varphi' A_{\lambda-3}=B\varphi^2-\varphi\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)A_{\lambda-3}$$

$A_{\lambda-3}$ musi być podzielne przez φ. Jeżeli położymy $A_{\lambda-3}=B_1\varphi$, będzie:

$$\varphi' B_1=B\varphi-\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)B_1\varphi$$

lub:

$$2\varphi' B_1=B\varphi-\varphi\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)B_1$$

B_1 musi więc być także podzielne przez φ. Kładąc $B_1=C\varphi$, otrzymujemy:

$$F^{(\lambda-3)}=C\varphi^3.$$

Postępując w ten sam sposób dalej, dojdziemy do równania:

$$F=\varphi^\lambda\,G$$

i jest jasnem, że φ i G są niespółdzielne. Jeżeli forma G nie jest jeszcze stopnia 0 względem $u_1, u_2, \dots, u_n$, to należy z nią postąpić tak samo, jak z formą F.

Postępowanie to prowadzić należy tak daleko, póki nie dojdziemy do formy stopnia 0.

22. **Zadanie.** Dane są formy $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$; wyznaczyć wszystkie rozwiązania równań:

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \dots,\ f_{n-1}=0,$$

t. j. wszystkie układy n wielkości, które wstawione zamiast $x_1, x_2, \dots, x_n$, czynią tym równaniom zadość. Dwa rozwiązania:

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_n;\ \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n,$$

uważamy wtedy tylko za istotnie różne, gdy wielkości jednego z nich nie są odpowiednio proporcyonalne do wielkości drugiego, t. j. gdy nie wszystkie wyznaczniki $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2-\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3-\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1, \dots$ znikają Zakłada się przytem, że wypadkowa:

$$\theta = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \dots\dots, x_n \end{bmatrix},$$

nie znika tożsamościowo względem $u_1, u_2, \dots, u_n$ i że $n>2$.

Niechaj $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ będzie jakiekolwiek rozwiązanie równań danych i $\mathfrak{a}_h \neq 0$; z tożsamości:

$$\theta x_h^r = [f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, u_x],$$

gdy położymy $x_1=\mathfrak{a}_1, x_2=\mathfrak{a}_2, \dots, x_n=\mathfrak{a}_n$, wypływa:

$$\theta \mathfrak{a}_h^r = [u_\mathfrak{a}],$$

a zatem θ jest podzielne przez $u_\mathfrak{a}$.

Aby znaleźć tedy wszystkie rozwiązania równań danych, trzeba szukać wszystkich form liniowych jednorodnych nieoznaczonych $u_1, u_2, \dots, u_n$, dzielących formę θ. Dwie takie formy uważamy za różne nieistotnie, skoro posiadają spółczynniki proporcyonalne.

Wyrażenie θ w samej rzeczy daje się rozłożyć na ν czynników liniowych jednorodnych, gdzie ν oznacza iloczyn stopni $m_1, m_2, \dots$ form $f_1, f_2, \dots$ lub stopień formy θ.

Zależnie od tego, czy wyróżnik D form $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ ma wartość różną od zera albo równą zeru, odróżniamy dwa przypadki.

I. Niechaj będzie $D \neq 0$.

Położmy:

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_i} = \theta_i,\quad t_1\theta_1+t_2\theta_2+\dots+t_n\theta_n = \theta_t\,(u_1\, u_2 \dots u_n).$$

funkcye θ, θ_t w tym przypadku będą niespółdzielne ze sobą względem $u_1, u_2, \dots, u_n$, gdyż w razie przeciwnym forma θ miałaby dzielnik wielokrotny i wyróżnik D musiałby znikać. A zatem wypadkowa $M\theta\,(v_1, v_2, \dots)$ form:

$$\theta\,(v_1 X+w_1 Y, \dots),\ \theta_t\,(v_1 X+w_1 Y, \dots),$$

względem X, Y nie znika tożsamościowo względem $v_1, v_2, \dots, w_1, w_2, \dots$ i można zamiast $v_1, v_2, \dots, w_1, w_2, \dots$ podstawić wartości szczególne $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ takie, aby M miało wartość M_0, różną od zera, i aby $\theta\,(a_1, a_2, \dots)$ było różnem od zera.

Niechaj będzie:

$$\theta\,(a_1 X+b_1, a_2 X+b_2, \dots) = F(X),\quad \theta_t\,(a_1 X+b_1, a_2 X+b_2 \dots) = F_t(X).$$

Pierwiastki $r_1, r_2, \dots, r_\nu$ równania $F(X)=0$ są wszystkie różne, gdyż jest:

$$F'(X) = \theta_a\,(a_1 X+b_1, a_2 X+b_2, \dots),$$

a zatem wyróżnik formy $F(X)$ równa się $M_0\,\theta\,(a_1, a_2, \dots)$.

Dla wypadkowej $M_0\,\theta$ form:

$$\theta\,(a_1 X+b_1 Y, \dots),\quad \theta_u\,(a_1 X+b_1 Y, \dots)$$

mamy równanie:

$$M_0\,\theta = \theta\,(a_1, a_2, \dots)^{\nu-1} \prod_i \theta_u\,(r_i a_1+b_1, \dots),$$

będzie zatem:

$$\theta = \frac{\theta\,(a_1, a_2, \dots)^{\nu-1}}{M_0} \prod_i (u_1 F_1(r_i) + u_2 F_2(r_i) + \dots + u_n F_n(r_i)).$$

W ten sposób wypadkowa θ została rozłożona na ν czynników liniowo-jednorodnych.

Równania dane mogą posiadać przeto tylko ν rozwiązań:

$$x_1=F_1(r_i),\ x_2=F_2(r_i),\ \dots,\ x_n=F_n(r_i);\qquad i=1,2,3,\dots,\nu.$$

Że i odwrotnie każdy z tych układów wartości tworzy rozwiązanie, wypływa z tożsamości w ust. 18:

$$f_k\,(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = [\theta],$$

skoro położymy w niej:

$$u_1 = a_1 r_i + b_1, \quad u_2 = a_2 r_i + b_2, \ldots$$

Te ν rozwiązań są wszystkie różne od siebie.

II. Niechaj będzie $D = 0$.

W tym przypadku znika podzielne przez D wyrażenie M, formy zaś θ, θ_i mają czynnik wspólny stopnia wyższego niż zero względem $u_1, u_2, \ldots$ Można więc napisać:

$$\theta = P^{\varrho} Q^{\sigma} \ldots$$

gdzie P i Q są wzajem niespółdzielne oraz niespółdzielne odpowiednio z wyrażeniami:

$$P_t = t_1 \frac{\partial P}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial P}{\partial u_2} + \ldots, \quad Q_t = t_1 \frac{\partial Q}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial Q}{\partial u_2} + \ldots$$

a jeden przynajmniej z wykładników $\varrho, \sigma, \ldots$ jest większy od 1.

Wypadkowa form:

$$P(v_1 X + w_1 Y, \ldots), \quad P_\varkappa (v_1 X + w_1 Y, \ldots)$$

względem X, Y jest postaci $\mathfrak{M} P$, gdzie $\mathfrak{M}$ jest funkcyą całkowitą nieznikającą wyznaczników $v_1 w_2 - v_2 w_1, \ldots$ Toż samo powiedzieć można o wypadkowej form:

$$Q(v_1 X + w_1 Y, \ldots), \quad Q_\varkappa (v_1 X + w_1 Y, \ldots)$$

i t. d. Można zatem podstawić za $v_1, v_2, \ldots, w_1, w_2, \ldots$ takie wartości szczególne $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, aby wszystkie te wypadkowe przybrały wartości różne od zera, i aby zarazem $\theta(a_1, a_2, \ldots)$ było od zera różne.

Rozważmy jeden z czynników wypadkowej θ, np. P, i połóżmy:

$$P(a_1 X + b_1, \ldots) = F(X), \quad P_i(a_1 X + b_1, \ldots) = F_i(X),$$

gdzie:

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial u_i}.$$

Równanie $F(X) = 0$ ma λ pierwiastków różnych $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$, gdy P jest stopnia λ względem $u_1, u_2, \ldots$; dla wypadkowej $\mathfrak{M}_0 P$ form:

$$P(a_1 X + b_1 Y, \ldots), \quad P_\varkappa (a_1 X + b_1 Y, \ldots),$$

otrzymujemy przeto równanie:

$$\mathfrak{M}_0 P = P(a_1, a_2, \ldots)^{\lambda-1} \prod_i P_\varkappa (a_1 r_i + b_1, \ldots).$$

Wynika stąd rozkład:

$$P = \frac{P(a_1, a_2, \ldots)^{\lambda-1}}{\mathfrak{M}_0} \prod_i (u_1 F_1(r_i) + u_2 F(r_i) + \ldots).$$

Ponieważ taki rozkład ma miejsce dla każdego z czynników $P, Q, \ldots$ wypadkowej θ, przeto i θ rozkłada się na ν czynników liniowo-jednorodnych.

Każdy z λ układów wartości:

$$F_1(r_i), \; F_2(r_i), \ldots, F_n(r_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots \lambda)$$

jest rozwiązaniem równań danych, gdyż zgodnie z tożsamością:

$$f_k(P_1, P_2, \ldots, P_n) = [P]$$

jest:

$$f_k(F_1(r_i), F_2(r_i), \ldots) = [F(r_i)] = 0.$$

Mamy więc znowu ν rozwiązań, jeżeli każde z poprzednich rozwiązań, pochodzących z czynnika P wypadkowej θ, bierzemy tyle razy, ile jedności zawiera wykładnik, z jakim występuje czynnik P w rozkładzie wypadkowej θ.

We wszystkich tedy przypadkach, w których θ nie znika tożsamościowo, istnieje rozkład postaci:

$$\theta = u_\mathfrak{a} u_\mathfrak{b} \ldots u_\mathfrak{n}$$

i dla każdych dwóch spółczynników A i $\mathfrak{A}$, A' i $\mathfrak{A}', \ldots$ przy tychsamych iloczynach potęgowych stopnia ν-tego nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots$ w wyrażeniu θ i $u_\mathfrak{a} u_\mathfrak{b} \ldots u_\mathfrak{n}$, jest:

$$A = \mathfrak{A}, \quad A' = \mathfrak{A}', \ldots$$

Jeżeli f_n jest formą ogólną zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, R — wypadkową form $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n$ i jeżeli położymy:

$$f_n(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots) = f_n(\mathfrak{a}), \quad f_n(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots) = f_n(\mathfrak{b}), \ldots,$$

to według ust. 5 będzie:

$$\theta^{p-m_n} R = N(A, A', \ldots)$$

$$(u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{b}} \ldots)^{p-m_n} f_n(\mathfrak{a}) f_n(\mathfrak{b}) \ldots f_n(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots).$$

Stąd wynika:

$$R = f_n(\mathfrak{a})\, f_n(\mathfrak{b}) \ldots f_n(\mathfrak{c}).$$

23. J e ż e l i r ó w n a n i a j e d n o r o d n e:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$$

w l i c z b i e n z n n i e w i a d o m e m i p o s i a d a j ą r o z w i ą z a n i e w s p ó l n e:

$$x_1 = \mathfrak{a}_1,\ x_2 = \mathfrak{a}_2, \ldots, x_n = \mathfrak{a}_n,$$

w t e d y z n i k a w y p a d k o w a:

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix}.$$

Z tożsamości bowiem:

$$R x_h^r = [f_1, f_2, \ldots, f_n],$$

gdy $\mathfrak{a}_h \neq 0$ wypływa:

$$R\, \mathfrak{a}_h^r = 0,$$

a stąd $R = 0$.

24. Równania jednorodne:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_m = 0,$$

w liczbie m z n niewiadomemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w przypadku, gdy $m < n - 1$ i wypadkowa $\theta(uv \ldots w)$ form $f_1, f_2, \ldots, f_m$ i $n-m$ form liniowych ogólnych $u_x, v_x, \ldots, w_x$ nie znika tożsamościowo, posiadają nieskończenie wiele rozwiązań, tworzących rozmaitość $(n-m-1)$-krotną.

Można bowiem dołączyć $n-m-1$ równań liniowych:

$$a_x = 0,\ b_x = 0, \ldots, d_x = 0$$

takich, aby $\theta(ab \ldots du)$ nie znikało tożsamościowo względem $u_1, u_2, \ldots$ i rozwiązując równania:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_m = 0,\ a_x = 0, \ldots, d_x = 0$$

otrzymać jedno lub więcej rozwiązań.

Zadanie[1]. N i e c h a j b ę d z i e m r ó w n a ń j e d n o r o d n y c h:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$$

z n n i e w i a d o m e m i $x_1, x_2, \ldots, x_n$. W y z n a c z y ć w s z y s t k i e i c h r o z w i ą z a n i a a l b o s t w i e r d z i ć, ż e n i e m a ż a d n e g o.

Niechaj $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ będą stopnie form $f_1, f_2, \ldots, f_m$; $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varkappa$ niechaj będą te z pomiędzy form danych, które są stopnia najwyższego μ. Utwórzmy szereg form $f_1', f_2', \ldots, f_r'$, składający się z form $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\varkappa$ oraz w przypadku, gdy pomiędzy formami $f_1, f_2, \ldots, f_m$ są formy $f_\varrho, f_\sigma, \ldots$ stopnia niższego niż μ, jeszcze z iloczynów:

$$x_1^{\mu-\mu_\varrho} f_\varrho,\ x_2^{\mu-\mu_\varrho} f_\varrho, \ldots, x_n^{\mu-\mu_\varrho} f_\varrho,$$
$$x_1^{\mu-\mu_\sigma} f_\sigma,\ x_2^{\mu-\mu_\sigma} f_\sigma, \ldots, x_n^{\mu-\mu_\sigma} f_\sigma,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

tak że wszystkie formy $f_1', f_2', \ldots, f_r'$ są tego samego stopnia μ. Z form $f_1', f_2', \ldots, f_r'$ przy pomocy spółczynników nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{nr}$ utwórzmy n form:

$$g_i = t_{i1} f_1' + t_{i2} f_2' + \ldots + t_{ir} f_r' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

z tych zaś wypadkowe:

$$R_0 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, y_1 \\ x_1, x_2, \ldots, \quad x_n \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-2}, y_1, y_2 \\ x_1, x_1, \ldots, \quad x_{n-1}, x_n \end{bmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gdzie $y_1, y_2, \ldots$ są formy liniowe ogólne zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nazywać będziemy wypadkową R_0 wypadkową s z c z e b l a 0, wypadkową zaś

[1]) Patrz K r o n e c k e r a „Festschrift", § 10.

$n-k$ form szeregu $g_1, g_2, \ldots$ i k form ogólnych liniowych wypadkową szczebla k.

Jeżeli równania dane posiadają rozwiązania wspólne i jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jest jednem z takich rozwiązań, to czyni ono zadość równaniom $g_1=0, g_2=0, \ldots, g_n=0$, a wypadkowa R_0 znikać musi tożsamościowo względem wszystkich nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots$

Należy tu odróżnić rozmaite przypadki:

I. Wypadkowa R_0 nie znika tożsamościowo. W przypadku tym równania dane nie mają rozwiązania wspólnego.

II. R_0 znika tożsamościowo względem nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{nr}$, ale wypadkowa szczebla pierwszego:

$$R_1 = \begin{bmatrix} g_1, & g_2, & \ldots, & g_{n-1}, & u_x \\ x_1, & x_2, & \ldots, & & x_n \end{bmatrix},$$

nie znika tożsamościowo względem:

$$t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{n-1r}, u_1, u_2, \ldots, u_n.$$

Jeżeli równania dane mają rozwiązania wspólne i jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jest jednem z takich rozwiązań, wtedy czyni ono zadość równaniom:

$$g_1=0, g_2=0, \ldots, g_{n-1}=0,$$

a wypadkowa R_1, jak to wskazuje tożsamość:

$$R x_h^i = [g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, u_x],$$

po podstawieniu w niej za zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wartości $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, zawiera czynnik u_α, niezależny od nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{n-1r}$. A zatem spółczynniki rozmaitych iloczynów potęgowych tych nieoznaczonych zawierać muszą wszystkie czynnik wspólny zawierający $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Otóż to w istocie zachodzi.

Utwórzmy wypadkową:

$$R_1' = \begin{bmatrix} g_1, & g_2, & \ldots, & g_{n-2}, & g_n, & u_x \\ x_1, & x_2, & \ldots\ldots, & & & x_n \end{bmatrix},$$

i niechaj wyrażenia, powstające z R_1, R_1' przez zamianę nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots, u_n$ przez $p_1X+q_1Y, p_2X+q_2Y, \ldots, p_nX+q_nY$, będą:

$$R_1(p_1X+q_1Y, \ldots),\ R_1'(p_1X+q_1Y, \ldots).$$

Wypadkowa:

$$\Omega = \begin{bmatrix} R_1(p_1X+q_1Y, \ldots), & R_1'(p_1X+q_1Y, \ldots) \\ X, & Y \end{bmatrix},$$

według ust. **17** jest podzielna algebraicznie przez R_0, a więc jest tożsamościowo zerem względem $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots, q_n, t_{11}, t_{12}, \ldots$, a stąd wyrażenia R_1, R_1' muszą posiadać czynnik wspólny stopnia wyższego niż 0 względem $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Niechaj T będzie największym wspólnym dzielnikiem wyrażeń R_1 i R_1' względem wszystkich nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots, u_n, t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{nr}$. Dzielnik ten nie zawiera nieoznaczonych $t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nr}$, ponieważ dzieli formę R_1; nie zawiera nieoznaczonych $t_{n-11}, t_{n-12}, \ldots, t_{n-1r}$, ponieważ dzieli formę R_1. Nie może więc wogóle zawierać żadnej z nieoznaczonych $t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{nr}$, ponieważ nieoznaczone te, według ust. **11**, występują w R tylko wewnątrz wyznaczników rzędu $n-1$ układu elementów:

$$\begin{matrix} t_{11}, & t_{12}, & \ldots, & t_{1r} \\ t_{21}, & t_{22}, & \ldots, & t_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-11}, & t_{n-12}, & \ldots, & t_{n-1r}. \end{matrix}$$

Jeżeli położymy $R_1=TQ$, $R_1'=TQ'$, to Q nie będzie zawierało żadnego czynnika w $u_1, u_2, \ldots, u_n$ wolnego od nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots$, gdyż taki czynnik musiałby dzielić i formę Q', co być nie może, albowiem Q, Q' są niespółdzielne. A więc także T i Q są z sobą niespółdzielnemi względem $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Według twierdzeń poprzedzających (ust. **22**) T rozkłada się na czynniki liniowe $u_\alpha, u_\beta, \ldots, u_\epsilon$. Układy wartości:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n;\ \ldots,\ \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n,$$

są wtedy niezależne od nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots$ i stanowią jedynie możliwe rozwiązania wspólne równań danych. Że te układy wartości są w rzeczy samej rozwiązaniami, wypływa stąd, że dla wszystkich możliwych wartości $t_{11}, t_{12}, \ldots$ jest:

$$g_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,\quad g_1(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0,\ \ldots,\ g_1(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) = 0,$$

i także z powodu, że $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,\ \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ są niezależne od $t_{11}, t_{12}, \ldots$:

$$f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,\quad f_2'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \ldots$$
$$f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0.\quad f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \ldots$$

Podobnież wynika stąd:

$$f_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n) = 0, \quad f_2(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

III. Wypadkowa szczebla pierwszego:

$$R_1 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{bmatrix},$$

znika tożsamościowo, nie znika zaś:

$$R_2 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-2}, u_x, v_x \\ x_1, x_2, \ldots, \quad , x_n \end{bmatrix}.$$

Połóżmy:

$$R_2' = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-3}, g_{n-1}, u_x, v_x \\ x_1, x_2, \ldots\ldots, \quad , x_n \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} R_2(p_1X+q_1Y, \ldots), & R_2'(p_1X+q_1Y, \ldots) \\ X, & Y \end{bmatrix},$$

gdzie $R_2(p_1X+q_1Y, \ldots)$, $R_2'(p_1X+q_1Y, \ldots)$ powstają z R_2, R_2' wskutek zastąpienia nieoznaczonych $v_1, v_2, \ldots, v_n$ przez $p_1X+q_1Y, p_2X+q_2Y, \ldots, p_nX+q_nY$. Forma Ω jest podzielna algebraicznie przez R_1, znika więc tożsamościowo w uważanym przypadku; formy R_2 i R_2' muszą tedy posiadać czynnik wspólny stopnia wyższego niż zero względem $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Niechaj T będzie największym wspólnym dzielnikiem wyrażeń R_2 i R_2'; jest, podobnie jak poprzednio, jasnem, że T nie zawiera nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots$ Ponieważ dalej R_2, R_2' zawierają nieoznaczone $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ tylko wewnątrz wyznaczników rzędu 2-go:

$$(u_1 v_2) = u_1 v_2 - u_1 v_1, \quad (u_1 v_2) = u_1 v_3 - u_3 v_1, \ldots$$

to i toż samo stosuje się do T. Albowiem T musi pozostać bez zmiany, skoro $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zastąpimy przez $u_1+tv_1, u_2+tv_2, \ldots, u_n+tv_n$, lub skoro $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zastąpimy przez $v_1+tu_1, v_2+tu_2, \ldots, v_n+tv_n$, gdzie t jest nieoznaczoną. Musi więc być:

$$v_1 \frac{\partial T}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial u_2} + \ldots + v_n \frac{\partial T}{\partial u_n} = 0,$$

$$u_1 \frac{\partial T}{\partial v_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial v_2} + \ldots + u_n \frac{\partial T}{\partial v_n} = 0,$$

i te równania wystarczają do przedstawienia największego wspólnego dzielnika T przez powyższe wyznaczniki.

Jeżeli położymy $R_2 = TQ$, $R_2' = TQ'$, to i Q, Q' będą także funkcyami samych wyznaczników $(u_1v_2), (u_1v_3), \ldots$ i według ust. **10** będzie tożsamościowo:

$$R_2(t_x(u_1v_2) - u_x(t_1v_2) + v_x(t_1u_2)\ldots) = [g_1, g_2, \ldots, g_{n-2}].$$

A więc dla każdego rozwiązania $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ równań danych będzie tożsamościowo względem wszystkich zachodzących tu nieoznaczonych:

$$R_2(t_{\mathfrak{a}}(u_1v_2) - u_{\mathfrak{a}}(t_1v_2) + v_{\mathfrak{a}}(t_1u_2)\ldots) = 0,$$

rozwiązania zaś $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ muszą czynić zadość jednemu z dwu równań:

$$T(t_x(u_1v_2) - u_x(t_1v_2) + v_x(t_1u_2)\ldots) = 0,$$

$$Q(t_x(u_1v_2) - u_x(t_1v_2) + v_x(t_1u_2)\ldots) = 0.$$

Według tego mogą istnieć dwojakie rozwiązania równań danych; rozwiązania czyniące zadość pierwszemu z napisanych dwu równań, nazywać będziemy krótko r o z w i ą z a n i a m i g ł ó w n e m i; rozwiązania zaś, czyniące zadość drugiemu równaniu—r o z w i ą z a n i a m i p o d r z ę d n e m i. Nie jest wszakże wykluczonem i to, że pewne rozwiązanie jest zarazem głównem i podrzędnem.

Rozwiązania podrzędne mogą istnieć oczywiście tylko wtedy, jeżeli Q jest przynajmniej stopnia pierwszego względem wyznaczników $(u_1v_2), (u_1v_3), \ldots$

Wyobraźmy sobie wyrażenia:

$$T(t_x(u_1v_2) - u_x(t_1v_2) + v_x(t_1u_2)\ldots), \quad Q(t_x(u_1v_2) - u_x(t_1v_2) + v_x(t_1u_2)\ldots$$

rozwinięte według iloczynów potęgowych wszystkich nieoznaczonych, prócz $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i niechaj spółczynnikami tych rozwinięć będą odpowiednio:

$$\varphi_x, \varphi_x', \varphi_x'', \ldots; \quad \psi_x, \psi_x', \psi_x'', \ldots$$

Wtedy rozwiązania główne zlewają się z rozwiązaniami równań:

$$\varphi_x = 0, \quad \varphi_x' = 0, \quad \varphi_x'' = 0, \ldots,$$

rozwiązania zaś podrzędne z rozwiązaniami równań:

$$\psi_x = 0, \quad \psi_x' = 0, \quad \psi_x'' = 0, \dots$$

W samej rzeczy każde rozwiązanie $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ jednego z tych układów równań, np. pierwszego, jest rozwiązaniem równań danych. Albowiem, gdy wyznaczymy wielkości $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak aby było:

$$a_{\mathfrak{a}} = a_1 \mathfrak{a}_1 + a_2 \mathfrak{a}_2 + \dots + a_n \mathfrak{a}_n = 0$$

i aby $R_2((a_1 u_2), \dots)$ nie znikało tożsamościowo względem $u_1, u_2, \dots,$ wtedy będzie:

$$T(a_{\mathfrak{a}}(u_1 v_2) - u_{\mathfrak{a}}(a_1 v_2) + v_{\mathfrak{a}}(a_1 u_2), \dots) = 0,$$

gdyż strona lewa jest połączeniem liniowo-jednorodnem wielkości $\varphi_{\mathfrak{a}}, \varphi_{\mathfrak{a}}', \varphi_{\mathfrak{a}}'', \dots$ Jest także:

$$T(-u_{\mathfrak{a}}(a_1 v_2) + v_{\mathfrak{a}}(a_1 u_2) \dots) = 0,$$

a stąd:

$$v_{\mathfrak{a}}^{\nu}\, T((a_1 u_2) \dots) = [u_{\mathfrak{a}}],$$

gdzie ν jest stopniem wyrażenia T względem wyznaczników $(u_1 v_2) \dots$ A zatem $T((a_1 u_2) \dots)$ zawiera czynnik $u_{\mathfrak{a}}$; toż samo stosuje się do $R_2((a_1 u_2) \dots)$ i będzie:

$$g_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0,$$

$$f_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0, \quad f_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0, \dots$$

Liczba ewentualnych rozwiązań podrzędnych może być tylko skończona. Aby otrzymać te rozwiązania, zastosujmy do równań $\psi_x = 0, \psi_x' = 0, \dots$ toż samo postępowanie, jakie stosowaliśmy do równań danych. W tym celu należy przy pomocy spółczynników nieoznaczonych $t_1, t_1', \dots, t_2, t_2', \dots, t_n, t_n', \dots$ utworzyć n form:

$$h_i = t_i \psi_x + t_i' \psi_x' + \dots \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

i zbadać wypadkowe różnych szczebli tych form.

Wypadkowa szczebla pierwszego nie znika tożsamościowo. Skoro bowiem Q, Q' są niespółdzielnemi względem $v_1, v_2, \dots, v_n$ gdy $u_1, u_2, \dots, u_n$ są nieoznaczonemi, to wypadkowa:

$$S = \left[\frac{Q(p_1 X + q_1 Y, \dots)}{X}, \quad \frac{Q'(p_1 X + q_1 Y, \dots)}{Y} \right],$$

nie znika tożsamościowo względem $u_1, u_2, \dots, u_n$ i można wyznaczyć wartości szczególne $a_1, a_2, \dots, a_n$ takie, aby ta wypadkowa po zastąpieniu nieoznaczonych $u_1, u_2, \dots, u_n$ przez $a_1, a_2, \dots, a_n$ była różną od zera. Równania:

$$\psi_x = 0, \ \psi_x' = 0, \dots, a_x = 0,$$

nie mają wtedy żadnego rozwiązania, gdyż dla takiego rozwiązania $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ według tego, co wyżej powiedziano, musiałaby forma $Q((a_1 v_2), \dots)$ zawierać czynnik $v_{\mathfrak{a}}$. Tożsamo miałoby miejsce także i dla $Q'((a_1 v_2), \dots)$, a wypadkowa S znikałaby tożsamościowo dla $u_1 = a_1, u_2 = a_2, \dots, u_n = a_n$, co sprzeciwia się założeniu o wielkościach $a_1, a_2, \dots, a_n$. Może tedy zachodzić tu tylko przypadek I lub II i można albo stwierdzić, że nie ma wcale rozwiązań podrzędnych, albo jeżeli są, podać wszystkie.

Te ewentualne rozwiązania, które są równocześnie głównemi i podrzędnemi znajdziemy, badając zjednoczony układ równań:

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \dots, \psi = 0, \quad \psi' = 0, \dots$$

Liczba rozwiązań głównych jest zawsze nieskończona. Jeżeli wybierzemy bowiem $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, że równanie $a_x = 0$ nie spełniało się dla żadnego właściwego rozwiązania podrzędnego, a wyrażenie $T((a_1 v_2), \dots)$ nie znikało tożsamościowo względem $v_1, v_2, \dots, v_n$, wtedy to ostatnie wyrażenie rozkłada się na czynniki liniowe $v_{\mathfrak{a}}, v_{\mathfrak{b}}, \dots$ i będzie:

$$g_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0, \ g_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n) = 0, \dots$$

a więc:

$$f_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0, \quad f_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = 0, \dots$$

$$f_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n) = 0, \quad f_2(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n) = 0, \dots$$

. . . .

Ponieważ nadto:

$$a_{\mathfrak{a}} = 0, \ a_{\mathfrak{b}} = 0, \dots$$

przeto:

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n; \ \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n, \dots$$

nie mogą być właściwemi rozwiązaniami podrzędnemi i muszą być rozwiązaniami głównemi.

IV. Niechaj ogólnie znika wypadkowa R_{k-1} szczebla $k-1$, a nie znika wypadkowa R_k szczebla k, gdzie $2 < k < n$.

Połóżmy:

$$R_k = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-k}, v_x, & \ldots, v_x, & w_x \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, & \ldots, x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix},$$

$$R_k' = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-k-1}, g_{n-k+1}, u_x, \ldots, v_x, w_x \\ x_1, x_2, \ldots\ldots \qquad\qquad , x_n \end{bmatrix},$$

$$R_{k-1} = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_{n-k+1}, u_x, \ldots, v_x \\ x_1, x_2, \ldots\ldots \qquad , x_n \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} R_k(p_1X+q_1Y, \ldots), & R_k'(p_1X+q_1Y, \ldots) \\ X, & Y \end{bmatrix},$$

gdzie R_k' powstaje z R_k przez zamianę nieoznaczonych $w_1, w_2, \ldots$ na p_1X+q_1Y, $p_2X+q_2Y, \ldots$

Wypadkowa Ω jest podzielna algebraicznie przez R_{k-1}, jest więc tożsamościowo zerem, a wypadkowe R_k i R_k' mają czynnik wspólny stopnia wyższego niż 0 względem $w_1, w_2, \ldots$ Jeżeli tym czynnikiem wspólnym jest T, wtedy, podobnie jak poprzednio, jest jasnem, że T nie zawiera nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{n-k,r}$, nieoznaczone zaś $u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots, w_1, w_2, \ldots$ może zawierać tylko wewnątrz wyznaczników rzędu k-tego $(u_1 v_2 \ldots w_k), \ldots$ układu elementów:

$$\begin{matrix} u_1, u_2, \ldots, u_n, \\ v_1, v_2, \ldots, v_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_1, w_2, \ldots, w_n. \end{matrix}$$

Jeżeli napiszemy $R_k = TQ$, $R_k' = TQ'$, to i Q, Q' będą funkcyami samych tylko wyznaczników $(u_1 v_2 \ldots w_k), \ldots$; jeżeli R_k, T, Q, Q' jako funkcye tych wyznaczników oznaczymy krótko przez:

$$R_k((u_1v_2\ldots w_k)\ldots), \quad T((u_1v_2\ldots w_k), \ldots), \quad Q((u_1v_2\ldots w_k), \ldots),$$
$$Q'((u_1v_1\ldots w_k)\ldots),$$

będzie według ust. **10** tożsamościowo:

$$R_k(t_x(u_1\ldots v_{k-1}w_k) - u_x(t_1\ldots w_k) + \ldots \pm w_x(t_1u_2\ldots w_k))$$
$$= [g_1, g_2, \ldots, g_{n-k}].$$

Dla każdego rozwiązania $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ równań danych jest przeto albo:

$$T(t_x(u_1\ldots v_{k-1}w_k) - u_x(t_1\ldots v_{k-1}w_k) + \ldots \pm w_x(t_1u_2\ldots v_k), \ldots) = 0,$$

albo też:

$$Q(t_x(u_1\ldots v_{k-1}w_k) - u_x(t_1\ldots v_{k-1}w_k) + \ldots \pm w_x(t_1u_2\ldots v_k)\ldots) = 0$$

i można rozwiązania, czyniące zadość równaniu pierwszemu, nazwać krótko rozwiązaniami podrzędnemi.

Rozwiązania podrzędne mogą istnieć tylko wtedy, gdy Q zawiera wyznaczniki $(u_1 \ldots v_{k-1}w_k)$ przynajmniej w stopniu pierwszym.

Jeżeli rozwiniemy wyrażenia:

$$T(t_x(u_1\ldots v_{k-1}) - u_x(t_1\ldots v_{k-1}w_k) + \ldots),$$
$$Q(t_x(u_1\ldots v_{k-1}w_k) - u_x(t_1\ldots v_{k-1}w_k) + \ldots)$$

według iloczynów potęgowych wszystkich nieoznaczonych, prócz $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i oznaczymy spółczynniki rozwinięć przez:

$$\varphi_x, \varphi_x', \varphi_x'', \ldots; \psi_x, \psi_x', \psi_x'', \ldots,$$

to rozwiązania główne zleją się z rozwiązaniami równań $\varphi_x = 0$, $\varphi_x' = 0, \ldots$) rozwiązania zaś podrzędne z rozwiązaniami równań $\psi_x = 0$, $\psi_x' = 0, \ldots$ Albowiem każde rozwiązanie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jednego z tych układów równań np pierwszego, skoro wyznaczymy $k-1$ rozwiązań:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_n;\ \ldots\ d_1, d_2, \ldots\ d_n$$

równania:

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n = 0,$$

tak, aby $R_k((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k)\ldots)$ nie znikało tożsamościowo, czyni zadość równaniu:

$$Q(t_\alpha(a_1 b_2 \ldots d_{k-1}) - a_\alpha(t_1 b_2 \ldots w_k) + \ldots \pm w_\alpha(t_1 a_2 \ldots d_k)\ldots)$$
$$= Q(t_\alpha(a_1 b_2 \ldots d_{k-1}w_k) \pm w_\alpha(t_1 a_2 \ldots d_k)\ldots) = 0$$

i będzie:

$$t_\alpha^\nu\, Q((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k)\ldots) = [w_\alpha],$$

gdzie ν oznacza stopień wyrażenia Q względem wyznaczników $(u_1 \ldots v_{k-1} w_k)$.

A zatem wyrażenie $Q((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots)$ posiada czynnik w_a niezależny od nieoznaczonych $t_{11}, t_{12}, \ldots$ Toż samo stosuje się i do wyrażenia $R_k((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots)$, i będzie:

$$g_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

$$f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \ldots$$

Ewentualne rozwiązania podrzędne znajdziemy, stosując do równań $\psi_x = 0$, $\psi_x' = 0, \ldots$ toż samo postępowanie jak do równań danych. Równania te są o tyle prostsze od danych, że dla nich nie znika wypadkowa szczebla $k-1$. Jeżeli mianowicie wybierzemy $k-1$ układów wartości $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots d_1, d_2, \ldots, d_n$ tak, aby wypadkowa:

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{Q(p_1 X + q_1 Y, \ldots)}{X}, & \dfrac{Q'(p_1 Y + q_1 Y, \ldots)}{Y} \end{bmatrix}$$

nie znikała, gdy położymy w niej $u_1 = a_1, u_2 = a_2, \ldots; v_1 = d_1, v_2 = d_2, \ldots$ co zawsze jest możliwe, gdyż S nie znika tożsamościowo względem $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots, p_1, \ldots, q_1, \ldots$ — to równania:

$$\psi_x = 0, \ \psi_x' = 0, \ \ldots\ldots$$

$$a_x = 0, \ b_x = 0, \ \ldots, \ d_x = 0,$$

nie będą posiadały rozwiązania wspólnego. Dla takiego bowiem rozwiązania $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ byłoby na zasadzie powyższego:

$$Q((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k) \ldots) = [w_\alpha],$$

a więc także:

$$Q'((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k) \ldots) = [w_\alpha],$$

a stąd:

$$S = 0,$$

dla $\quad u_1 = a_1, u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n; \ldots v_1 = d_1, v_2 = d_2, \ldots, v_n = d_n,$

co pozostaje w sprzeczności z wyborem wielkości $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

Rozwiązań głównych jest nieskończenie wiele. Wybierzmy:

$$a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$$

dowolnie, lecz tak, aby S i R_k nie znikały tożsamościowo dla:

$$u_1 = a_1, u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \ldots, v_1 = d_1, v_2 = d_2, \ldots, v_n = d_n.$$

Wtedy $T(a_1 b_2 \ldots w_k) \ldots$ rozkłada się na czynniki liniowe $w_a, w_b, \ldots$ Jeżeli w_a jest jednym z tych czynników, wtedy $R_k((a_1 b_2 \ldots w_k), \ldots)$ jest przez ten czynnik podzielne, a więc:

$$f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \ldots$$

Lecz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nie mogą być rozwiązaniami podrzędnemi, bo dla takiego rozwiązania:

$$Q((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots), \quad Q'((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots),$$

miałyby czynnik wspólny w_a, co sprzeciwia się założeniu o wielkościach $a_1, a_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Wniosek. Jeżeli wypadkowa R n równań jednorodnych:

$$f_1 = 0, \ f_2 = 0, \ \ldots, f_n = 0$$

znika, to formy te mają przynajmniej jedno wspólne rozwiązanie. Albowiem w tym przypadku wypadkowa szczebla zero R_0 jest podzielna przez R, a więc równa zeru, i zachodzi wtedy jeden z przypadków II, III, ...