O PEWNEM TWIERDZENIU ELEMENTARNEM W TEORYI GRUP PODSTAWIEŃ.

PODAŁ

G. A. MILLER.

Jest rzeczą dobrze znaną, że wszystkie podstawienia stopnia n, które dane podstawienie, zawierające też same n liter, przekształcają na samo siebie, tworzą grupę[1]). Niech s_1, s_2 będą dwa podstawienia, zawierające te same n liter, i niechaj G_1, G_2 będą grupy, złożone z tych wszystkich podstawień tychże n liter, i zarazem odpowiednio przemienne z podstawieniami s_1, s_2. Jeżeli podstawienia s_1, s_2 są podobne, wtedy G_1, G_2 są podgrupami sprzężonemi grupy symetrycznej stopnia n-tego. Udowodnimy twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby grupy G_1, G_2 przedstawiały tęż samą grupę podstawień[2]), jest, by podstawienia s_1, s_2 były podobnemi.

Jeżeli s_1 składa się z pojedyńczego cyklu, wtedy G_1 jest grupą, utworzoną z s_1; jeżeli s_1 jest złożone z k cyklów tak, że żadne dwa z nich nie

[1]) Cauchy: Exercices d'analyse et de physique mathématique, 1844, vol. 3, p. 225; Jordan: Traité des substitutions, 1870, p. 24; Serret: Algèbre supérieure, t. 885, p. 287 Netto: Substitutionentheorie, 1881, p. 85.

[2]) Dwie grupy uważają się za jednę i tą samą, gdy jedne można przekształcić na drugą; gdy takie grupy są oderwanemi, są wtedy holomorficznemi.

zawierają tej samej liczby liter, wtedy G_1 jest wprost iloczynem wszystkich grup kołowych, utworzonych przez pojedyńcze cykle podstawienia s_1[1]). W tych dwóch przypadkach twierdzenie jest oczywistem. Dla zupełnego tedy udowodnienia twierdzenia pozostaje jeszcze zbadać grupę G_1 wtedy, gdy podstawienie s_1 składa się z k cyklów podobnych. Zbadajmy własności takiej grupy.

Zauważmy najprzód, że zawiera ona podgrupę niezmienną abelową rzędu $(n/k)^k$, która jest wprost iloczynem grup kołowych, utworzonych przez jej cykle rzędu n/k. Ta podgrupa zawiera dokładnie n/k podstawień, które są przemiennemi z każdem podstawieniem całej grupy G_1, t. j. z podstawieniami, utworzonemi z podstawienia s_1. Ponieważ k cyklów podstawienia s_1 przemieniają się, jako w grupie symetrycznej stopnia k, ze wszystkiemi podstawieniami grupy G_1, przeto grupa G_1 jest niepierwotną nieabelową i rzędu $(n/k)^k\, k!$, o ile k jest większe od jedności. Mamy teraz dane, wystarczające do ukończenia dowodu twierdzenia.

Przyjmijmy, że grupy G_1 i G_2 nie są różnemi. Można wtedy znaleść takie podstawienie S, aby było $S^{-1}GS = G$. Jeżeli grupa G_1 zawiera składnik nieabelowy, wtedy postawienie S przekształca go na składnik nieabelowy grupy G_2. Ponieważ części podstawień s_1 i s_2, zawierające te same litery, wytwarzają jako ich składniki odpowiednio tylko podstawienia niezmienne tych składników, przeto S musi przekształcać te części jednę na drugą, t. j. podstawienia s_1 i s_2 są podobne, o ile ich elementy należą do ich składników nieabelowych. Gdy zaś pozostałe cykle podstawień s_1 i s_2 wytwarzają podstawienia kołowe niezmienne grup G_1 i G_2, muszą zatem być podobne. Stąd s_1 i s_2 są podobne, o ile grupy G_1 i G_2 mogą przekształcać się jedna na drugą, t. j. o ile G_1 i G_2 nie są różnemi.

Wogólności możemy okazać, że wszystkie podstawienia stopnia m, przemienne z danem podstawieniem s_1, tworzą grupę G. Jeżeli $m = n + b$, i G zawiera wszystkie litery podstawienia s_1, to jest wprost iloczynem danej grupy podstawień G_1 i grupy symetrycznej stopnia b, gdy $b \geqslant 2$. W tym przypadku zauważmy jeszcze, że gdy weźmiemy za s dwa podstawienia do niego podobne, wtedy wypadną grupy G różne. Twierdzenie stosuje się do tego przypadku, i każde podstawienie s_1 służy dla nieskończonej liczby grup podstawień, które wszystkie są różne od nieskończonej liczby grup podstawień, otrzymanych za pomocą tego samego postępowania z podstawienia niepodobnego do podstawienia s_1.

[1]) Burnside: Theory of groups of finite order, 1897, p. 216.

Brief abstract of the paper.

Let s_1, s_2 be any two substitutions which involve the same n letters and let G_1, G_2 be the groups which ave composed of all the substitutions in these n letters that are commutative with s_1, s_2 respectively. The necessary and sufficient condition that G_1, G_2 represent the same substitutions group is that s_1, s_2 are similar. All the substitutions of degree m that are commutative with s_1 form a group. When $m = n + b$ and this group involve all the letters of s_1, it is the direct product of the given G_1 and the symmetric group of degree b. When we use two dissimilar substitutions for s_1, the resulting groups will be distinct.

Z TEORYI ELIMINACYI.[1]

NAPISAŁ

FR. MERTENS.

Część pierwsza.

1. Tworzenie wypadkowej n form ogólnych o n zmiennych i dowód ich najważniejszych własności można, jak to wykazałem[2]), uzasadnić bez oparcia się na twierdzeniu zasadniczem Algebry. Twierdzenie to okazuje się koniecznem dopiero w zastosowaniach.

Powracam dziś do tego przedmiotu, ponieważ można przedstawić go prościej, i dodaję przytem najważniejsze zastosowania.

2. Przez formę ogólną zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumieć będziemy funkcyę całkowitą jednorodną tych zmiennych ze spółczynnikami nieoznaczonemi.

Funkcyę całkowitą nieoznaczonych $u', u'', \ldots$, mającą postać:

$$\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \ldots + \psi_\nu \psi_\nu ,$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$; $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ są funkcyami całkowitemi tychże nieoznaczonych, oznaczać będziemy krótko przez

$$[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu],$$

jeżeli nie chodzi nam o bliższe podanie postaci wyrażeń $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$.

---

[1]) Ze Sprawozdań Akademii Wiedeńskiej, 12 października i 30 listopada 1899

[2]) Sprawozdania Akademii Wiedeńskiej, II, 1886.