---

# ZASADY RACHUNKU ITERACYJNEGO.

NAPISAŁ

Ł. E. BÖTTCHER.

## Część trzecia.[1]

## Zastosowanie teoryi zbieżności iteracyj do rozwiązywania elementarnych równań funkcyjnych.

### I. *Uwagi wstępne.*

§ 1. Zajmijmy się dyskusyą równania funkcyjnego typu:

$$\Phi\{z,\ F(z),\ Ff(z)\}=0. \tag{1}$$

Chodzi tu o zbadanie takiej funkcyi $F(z)$, któraby uczyniła zadość warunkowi (1), przyczem zakładamy, że funkcya $f(z)$ jest znaną nam już funkcyą algebraiczną, wymierną; funkcya zaś $\Phi$ jest również funkcyą algebraiczną wymierną, całkowitą.

Na razie ograniczymy się tylko do czterech typów najprostszych:

1⁰. $$Ff(z)=F(z)+r.$$

[1]) Patrz „Prace matematyczno-fizyczne", t. X, str. 64—101.

Równanie to funkcyjne znanem jest w literaturze iteracyi pod nazwą równania funkcyjnego Abela[1]).

2⁰.
$$Ff(z) = aF(z).$$

Równanie to funkcyjne znanem jest w literaturze iteracyi pod nazwą równania funkcyjnego Schrödera[2]), chociaż rozwiązał je i zbadał w niektórych specyalnych warunkach Koenigs[3]); dyskusyę tą rozszerzył znacznie Grévy[4]).

3⁰.
$$Ff(z) = (F(z))^m,$$

4⁰.
$$Ff(z) = f^{(1)}(z) \cdot F(z).$$

Równanie to funkcyjne po raz pierwszy badał staranniej Ramus[5]) i zostało ono rozwiązane w tych samych warunkach, w których badał Koe-

---

1) Abel: „Détérmination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable. Oeuvres Complètes. Tom. II, str. 36—37.

2) Schröder: Ueber iterirte Functionen. Mathematische Annalen. Tom III, 1881, str. 296—322.

3) Koenigs: Recherches sur les substitutions uniformes. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Serya II. Tom VII, 1883. Część pierwsza str. 340—357.
Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. Comptes Rendus. Tom XCIX. Juillet-Décembre, 1884, str. 1016—1017. Tom CI, 1885, str. 1137—1139.
Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. Serya III. Tom I, 1884. Suplement. Serya III. Tom II, 1885, str. 387—388.

4) Grévy: Étudé sur les équations fonctionnelles. Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. Serya III, t. XI, 1894, str. 249—323; serya III, t. XIII, 1896, str. 295—338.

5) Ramus: Remarque sur l'équation $\varphi f(x) = \varphi(x)\frac{df(x)}{dx}$. Crelle's Journal. Tom IX, 1832, str. 359—361.

Uwaga. Zagadnienie, pod powyższym tytułem podane, pojawiło się na szpaltach Crelle's Journal, t. VII, w art. „Aufgaben und Lehrsätze“ w zbiorze zadań i twierdzeń, zestawionym przez p. Hilla na str. 102—104, jako zagadnienie podane przez d-ra Sterna z Getyngi, a mianowicie na str. 104, streszczone słowami: Data functione $f$, invenire functionen $\varphi(x)$ ex aequatione

$$\varphi f(x) = \varphi(x)\frac{df(x)}{dx}.$$

Zadanie to próbuje rozwiązać Th. Clausen w tym samym roczniku w art.: Demonstrationes theorematum et solutiones problematum, str. 309—410; rozumuje jednak zupełnie błędnie. Krytykuje jego notatkę wspomniany art. Ramusa, z którego widać usiłowania rozwiązania powyższego zagadnienia na drodze rachunku iteracyjnego.



nigs równanie funkcyjne 2⁰, przez Lémeray'a[6]); dyskusya jego została znacznie rozszerzona przez Leau[7]).

§ 2. Badania Koenigsa, Lémeray'a, Leau i Grévy'ego wykazały, że równania wszystkich czterech wyżej wymienionych typów możemy rozwiązywać, opierając się na teoryi zbieżności iteracyj.

Rezultaty tych badań możemy streścić w następujący sposób:

Bliższe badania nad utworem $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z)$ wyświetlają nam fakt, że cała płaszczyzna zmiennej zespolonej rozpada się na pewną liczbę obszarów. Rozróżniamy trzy typy takich obszarów.

1⁰. Obszary zbieżności regularnej:

a)
$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = x, \quad \text{przyczem } f(x) = x;$$

b)
$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = \infty, \quad \text{przyczem } f(\infty) = \infty.$$

2⁰. Obszary zbieżności rytmicznej o rytmie $m$:

$$\lim_{n=\infty} f_{m.n+\lambda}(z) = x_\lambda, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

$$f(x_0) = x_1,\ f(x_1) = x_2, \ldots, f(x_{m-2}) = x_{m-1},\ f(x_{m-1}) = x.$$

a) Wszystkie punkty grupy granicznej: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ znajdują się w skończoności.

b) W obrębie grupy granicznej: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ znajduje się punkt $\infty$, jako jeden z elementów, np. $x_\lambda = \infty$. Możliwe to o tyle tylko, o ile $f_m(\infty) = \infty$.

---

6) Lémeray: Sur les certaines équations fonctionnelles linéaires. Comptes Rendus, CXXLI, 1897, str. 949—950.
Sur la dérivée des fonctions itératives au point limite. Bulletin de Société Mathématique de France. Tom XXV, 1797. str. 51—53.
Dérivées des fonctions itératives par rapport àl'indice d'itération. Bulletin de la Société Mathématique de France. Tom XXV, 1897, str. 92—97.
Un théorème sur les fonctions itératives. Bulletin de la Société Mathèmatique de France. Tom XXIII, 1895, str. 255—262.
Sur la convergence des substitutions uniformes. Comptes Rendus. Tom CXXIII, 1896, 793—704. Tom CXXIV, 1897, 1220—1227.

7) Leau: Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse. Tom XI, 1897, E.

$3^0$. Obszary zbieżności chaotycznej:

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) \quad \text{jest wartością zupełnie nieoznaczoną.}$$

§ **3.** Pojęcie „zbieżności rytmicznej" o rytmie $m$ sprowadza się bezpośrednio do pojęcia „zbieżności regularnej", gdy zamiast funkcyi podstawowej $f(z)$ będziemy rozważali funkcyę $f_m(z)$.

Zbieżność chaotyczna, którą w wielu przypadkach spotykamy, nie posiada swej literatury.

Dla okazania, że istnieje zbieżność chaotyczna, rozpatrzmy przykład:

$$f(z) = \frac{4z(1-z)(1-k^2z)}{(1-k^2z^2)^2} = \mathrm{sn}^2\, 2\int_0^{\sqrt{z}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

$$f_n(z) = \mathrm{sn}^2\, 2^n \int_0^{\sqrt{z}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad \text{(droga całkowania jakakolwiek).}$$

Na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej panuje zbieżność chaotyczna, albowiem

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = \mathrm{sn}^2(\infty) = \text{liczbie nieoznaczonej.}$$

§ **4.** Wystarczy więc, gdy ograniczymy się do dyskusyi obszarów zbieżności regularnej.

Rozróżniamy następujące przypadki:

A). $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z) = x, \qquad f(x) = x, \qquad 0 < |f^{(1)}(x)| < 1.$

$1^0$. Algorytm zasadniczy:

$$B(z) = \lim_{n=\infty} \frac{f_n(z) - x}{(f^{(1)}(x))^n},$$

wprowadzony przez Koenigsa [8]).

$2^0$. Równanie funkcyjne:

$$F f(z) = a\, F(z) \tag{2}$$

całkujemy w następujący sposób:

[8]) Patrz notę 3) na str. 96—(2).



Niechaj funkcya $\Xi(z)$ czyni zadość warunkowi $\Xi f(z) = \Xi(z)$; rozwiązanie równania funkcyjnego $2^0$ ma postać:

$$\Xi(z) \,.\, \{B(z)\}^p = \Xi(z) \,.\, \lim_{n=\infty} \frac{(f_n(z) - x)^p}{(f^{(1)}(x))^{pn}},$$

$$p = \frac{\log a}{\log f^{(1)}(x)}.$$

$3^0$ Równanie funkcyjne:

$$F f(z) = F(z) + r \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

całkujemy w następujący sposób:

Niechaj funkcya $\Xi(z)$ czyni zadość warunkowi $\Xi f(z) = \Xi(z)$, zresztą niech będzie dowolnie obrana; wówczas ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego (1) ma postać:

$$\frac{r \log B(z)}{\log f^{(1)}(x)} + \Xi(z) = \Xi(z) + \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{r \log(z_n - x)}{\log f^{(1)}(x)} - nr \right\}.$$

$4^0$. Równanie funkcyjne

$$F f(z) = (F(z))^m \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

całkujemy w następujący sposób:

Niechaj funkcya $\Xi(z)$ będzie dana, jak wyżej; wówczas ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego (3) ma postać:

$$Q^{\Xi(z)\,.\,\{B(z)\}^p} = \lim_{n=\infty} Q^{\Xi(z)\,.\,\left\{\frac{(z_n - x)}{(f^{(1)}(x))^n}\right\}^p},$$

przyczem mamy:

$$p = \frac{\log m}{\log f^{(1)}(x)}; \quad Q \text{ jest stałą dowolną.}$$

$5^0$. Równanie funkcyjne

$$F f(z) = f^{(1)}(z)\, F(z) \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

całkujemy w następujący sposób:

Niechaj funkcya $\Xi(z)$ będzie dana, jak wyżej; wówczas ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego (4) ma postać:

$$\Xi(z)\,K(z) = \Xi(z)\frac{B(z)}{B^{(1)}(z)} = \Xi(z).\lim_{n=\infty}\frac{f_n(z)-x}{f_n^{(1)}(z)}.$$

Algorytm

$$K(z) = \lim_{n=\infty}\frac{f_n(z)-x}{f_n^{(1)}(z)}$$

wprowadzony został przez p. Lémeray'a.

§ 5. B). $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z) = x, \qquad f(x) = x, \qquad f^{(r)}(x) = 0.$ $_{(r=1,2,\dots,m-1)}$

W najbliższem otoczeniu punktu $x$ mamy rozwinięcie:

$$f(z) = x + \frac{(z-x)^m}{m!} f^{(m)}(x) + \frac{(z-x)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x) + \dots$$

1⁰. Zasadniczy algorytm:

$$R(z) = \lim_{n=\infty}\sqrt[m^n]{f_n(z)-x}.$$

2⁰. Równanie funkcyjne

$$F f(z) = a\,F(z) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

całkujemy w następujący sposób:

Niechaj funkcya $\Xi(z)$ będzie daną, jak wyżej; wówczas całka ogólna równania funkcyjnego (2) ma postać:

$$\Xi(z)(\log R(z))^p = \Xi(z)\lim_{n=\infty}\frac{p\log(f_n(z)-x)}{m^n},$$

$$p = \frac{\log a}{\log m}.$$

3⁰. Równanie funkcyjne:

$$F f(z) = (F(z))^a \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

całkujemy w następujący sposób:



Niechaj funkcya $\Xi(z)$ będzie daną, jak wyżej; wówczas całka ogólna równania funkcyjnego (3) ma postać:

$$Q^{\Xi(z)(\log R(z))^p} = \lim_{n=\infty} Q^{\Xi(z).\frac{p\log(z_n-x)}{m^n}},$$

$Q$ jest stałą dowolną.

4⁰. Równanie funkcyjne

$$F f(z) = F(z) + r \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

całkujemy w następujący sposób:

Niechaj funkcya $\Xi(z)$ będzie daną, jak wyżej; wówczas całka ogólna równania funkcyjnego (1) ma postać:

$$\Xi(z) + \frac{r\log\log R(z)}{\log m} = \Xi(z) + \frac{r}{\log m}\lim_{n=\infty}\log\left\{\frac{\log(z_n-x)}{m^n}\right\}.$$

5⁰. Równanie funkcyjne

$$F f(z) = f^{(1)}(z)\,F(z) \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

całkujemy w następujący sposób:

Niechaj funkcya $\Xi(z)$ będzie daną, jak wyżej, wówczas całka ogólna równania funkcyjnego (4) ma postać:

$$\Xi(z)\frac{R(z)\log R(z)}{R^{(1)}(z)} = \Xi(z)\lim_{n=\infty}\frac{(z_n-x)\log(z_n-x)}{f_n^{(1)}(z)}.$$

§ 6. Niniejszy artykuł poświęcamy wymienionym powyżej zagadnieniom w przypadku C):

$\lim\limits_{n=\infty} f_n(z) = x, \qquad f(x) = x, \qquad f^{(1)}(x) = +1 \qquad f^{(r)}(x) = 0,$ $_{(r=2,3,\dots,p)}$

a więc zakładamy, że w najbliższem otoczeniu punktu $x$ zachodzi rozwinięcie:

$$f(z) = x + (z-x) + \frac{(z-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) + \frac{(z-x)^{p+2}}{(p+2)!} f^{(p+2)}(x) + \dots$$

a czynimy to dlatego, że własności algorytmów, podanych przez pp. Lémeray'a[1]) i Leau[2]), są ze stanowiska teoretyczno funkcyjnego bardzo ciekawe i stosunkowo mało zbadane.

§ 7. Naprzód zajmijmy się zbadaniem obszaru, w obrębie którego iteracye

$$z, \quad f(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \; . \; . \; .$$

zbiegają się do wskazanego przed chwilą punktu $x$.

Nie mogąc rozpoznać całości tego obszaru, ograniczamy się przynajmniej na tej części, która przypada w najbliższem otoczeniu punktu $x$. Już Lémeray i Leau wykazali, że nie całe (nieskończenie małe) otoczenie punktu $x$ należy do omawianego obszaru. Pomimo badań wspomnianych autorów, nie wiemy dokładnie, w jaki sposób odgranicza się ta część najbliższego otoczenia punktu $x$, w obrębie której zachodzi wzór:

$$\lim f_n(z) = x$$

od tej części tegoż najbliższego otoczenia punktu $x$, w obrębie której wzór powyższy nie zachodzi. Co najwyżej, możemy wyodrębnić tylko pewną część tej części najbliższego otoczenia punktu $x$, w obrębie której zachodzi wspomniany już wzór, i w obrębie tej połowy niejako badanej części otoczenia punktu $x$ będziemy prowadzili nasze badania.

§ 8. Przyjmujemy więc, że w najbliższem otoczeniu punktu $x$ zachodzi rozwinięcie:

$$(z_1 - x) = (z - x) + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^{p+1} + \frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!}(z-x)^{p+2} + \; . \; . \; . \qquad (1)$$

Zatoczmy naokoło punktu $x$ koło o promieniu dostatecznie małym $\varrho$. Połóżmy dla krótkości:

$$\left.\begin{aligned} (z-x) &= re^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} = ae^{\alpha\sqrt{-1}} \\ (z_n - x) &= r_n e^{\theta_n\sqrt{-1}}, \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \qquad (2)$$

Jeżeli tylko promień $\varrho$ będzie dość małym, to nierówność $|z-x| < \varrho$ wystarcza na to, by stosunek:

$$\frac{|z_1 - x|}{|z-x|},$$

[1]) [2]) Patrz notę 6), 7) na str. 97—(3).



był mniejszy lub większy od jedności, stosownie do tego, czy

$$\left| 1 + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^p \right|$$

będzie liczbą mniejszą lub większą od jedności.

Na mocy równania (2) wnioskujemy, że wzór:

$$\left| 1 + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^p \right| \lessgtr 1,$$

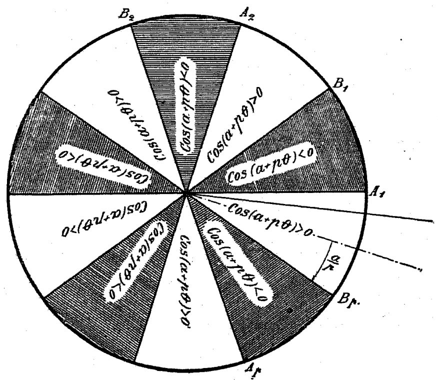
znaczy tyle, co:

$$\left| 1 + ar^p \cos(\alpha + p\theta) + \sqrt{-1}\, ar^p \sin(\alpha + p\theta) \right| \lessgtr 1.$$

Wzór ten, wobec bardzo małego $\varrho$, a więc jeszcze mniejszego $r$, sprowadza się do prostej postaci:

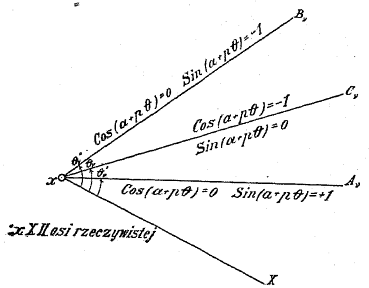
$$\cos(\alpha + p\theta) \lessgtr 0.$$

§ 9. Równanie: $\cos(\alpha + p\theta) = 0$ wyznacza w płaszczyźnie zmiennej zespolonej pęk $2p$ promieni, wychodzących z punktu $x$ i dzielących uważane koło $\varrho_p$ na $2p$ równych wycinków. W obrębie tych wycinków będzie naprze-




mian $\cos(\alpha + p\theta)$ liczbą dodatnią i ujemną. Notujemy i zaznaczamy te wycinki, w obrębie których mamy: $\cos(\alpha + p\theta) < 0$.

Rozpatrując taki wycinek, widzimy w nim następujące linie wybitne:




ramię „prawe“ $OA_\nu$:

$$\cos(\alpha+p\theta_\nu') = 0, \qquad \sin(\alpha+p\theta_\nu') = +1;$$

ramię „lewe“ $OB_\nu$:

$$\cos(\alpha+p\theta_\nu'') = 0, \qquad \sin(\alpha+p\theta_\nu'') = -1;$$

„oś“ wycinka $OC_\nu$, czyli dwusieczną kąta $A_\nu x B_\nu$:

$$\cos(\alpha+p\,\theta_\nu) = -1, \qquad \sin(\alpha+p\theta_\nu) = 0.$$

**Twierdzenie.** Jeżeli punkt $z$ znajduje się w obrębie koła $C_\varrho$, w obrębie jednego z wycinków, dla których $\cos(\alpha+p\theta) < 0$, to wszystkie punkty: $z, z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots$ znajdują się stale w obrębie tego wycinka, zbliżając się asymptotycznie do osi tegoż wycinka, tudzież do punktu $x$. Fakt ten zachowuje się i wtedy, gdy punkt $z$ znajduje się na prawem lub lewem ramieniu wycinka.

**Dowodzenie.** Dopóki $\theta_\nu' < \theta < \theta_\nu''$, będzie:

$$\frac{|z_1 - x|}{|z - x|} < 1;$$

połóżmy $\theta = \theta_\nu'$, a więc:

$$\cos(\alpha+p\theta) = 0, \qquad \sin(\alpha+p\theta) = +1,$$

$$(z_1 - x) = (z - x)\left\{1 + a r^p \sqrt{-1}\right\}.$$

Będzie wprawdzie:

$$\frac{|z_1 - x|}{|z - x|} > 1,$$

ale stosunek ten mało się różni od 1, i sprawę dalszego przebiegu rostrzyga $\cos(\alpha+p\,\theta_1)$:

$$\frac{z_1 - x}{z - x} = 1 + a r^p \sqrt{-1}. = \frac{r_1}{r}\, e^{(\theta_1-\theta)\sqrt{-1}}.$$

$$\theta_1 > \theta. > \theta_\nu' \qquad \sin(\theta_1 - \theta) = \frac{a r^p}{\sqrt{1 + a^2 r^{2p}}} < 0.$$



Różnica $\theta_1 - \theta_\nu'$ jest nieskończenie mała, a więc mniejsza, niż

$$\theta_\nu - \theta_\nu' = \theta_\nu - \theta_\nu'. = \frac{\pi}{2p}.$$

Mamy więc:

$$\theta_\nu' < \theta_1 < \theta_\nu''.$$

To, co wyżej powiedziano o $z$, zastosujmy teraz do $z_1$. Połóżmy $\theta = \theta_\nu''$, a więc:

$$\cos(\alpha+p\,\theta) = 0, \qquad \sin(\alpha+p\theta) = -1.$$

Rozumując, jak wyżej, otrzymamy:

$$\theta_1 < \theta < \theta_\nu'' \qquad \sin(\theta_1 - \theta) = -\frac{a r^p}{\sqrt{1 + a^2 r^{2p}}} < 0.$$

Ale różnica $\theta_1 - \theta_\nu''$ jest nieskończenie mała, a więc bezwzględnie biorąc jest mniejszą, niż różnica $\theta_\nu'' - \theta_\nu = \dfrac{\pi}{2p}$.

Mamy więc:

$$\theta_\nu' < \theta_1 < \theta_\nu''.$$

Wzór $\dfrac{z_1 - x}{z - x} = 1 + a r^p \cos(\alpha+p\theta) + \sqrt{-1}\, a r^p \sin(\alpha+p\theta)$

daje nam: $$\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta) = \frac{a r^p \sin(\alpha+p\theta)}{1 + a r^p \cos(\alpha+p\theta)}.$$

Rozróżniamy przypadki:

$$(1) \qquad \begin{cases} \theta_\nu' < \theta < \theta_\nu, \\ \cos(\alpha+p\theta) < 0, \quad \sin(\alpha+p\theta) > 0, \\ \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta) > 0, \quad \theta_1 - \theta > 0. \end{cases}$$

Punkt $z_1$ jest bardziej wysunięty ku osi, niż $z$; podobnież $z_2$ będzie jeszcze bliżej tej osi, $z_3$ jeszcze bliżej etc. Może się zdarzyć, że $z_m$ będzie jeszcze blizko osi, ale po prawej stronie, a $z_{m+1}$ przeskakuje po za oś—na lewą jej stronę, przecież jednak bliżej jeszcze jest do niej, niż punkt $z_m$.

$$(2) \qquad \begin{cases} \theta_\nu < \theta < \theta_\nu, \\ \cos(\alpha+p\theta) < 0, \quad \sin(\alpha+p\theta) < 0, \\ \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta) < 0, \quad \theta_1 - \theta < 0. \end{cases}$$

Punkt $z_{m+1}$ jest po lewej stronie osi, ale punkt $z_{m+2}$ może być po lewej stronie, ale jeszcze bliżej, itd.

Twierdzenie więc zostało udowodnione.

**Prawo zasadnicze.**

§ **10.** W obrębie całego obszaru zbieżności iteracyjnej, dołączonego do punktu $x$, zachodzi wzór:

$$\lim_{n=\infty} n\,\{f_n(z)-x\}^p = -\frac{(p+1)!}{p\,f^{(p+1)}(x)}.$$

Prawo to odkrył Lemeray[1]), jakkolwiek dowodzenie jego nie jest dość ścisłem. Poprawniejszy dowód podał Leau[2]). Ze względu na doniosłość tego prawa, podajemy tu jego dowód, przez nas w tym celu obmyślony.

Przedewszystkiem nie zmniejszamy ogólności, zakładając, że punkt $z$ już został obranym w obrębie jednego z wycinków: $\cos(\alpha+p\theta)<0$ (patrz § 7) koła $C_\varrho$, mającego środek w punkcie $x$, a promień równy $\varrho$.

Z rozwinięcia:

$$(z_1-x)=(z-x)+\frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^{p+1}+\frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!}(z-x)^{p+2}+\ldots \quad (1)$$

wynika rozwinięcie:

$$\left(\frac{1}{z_1-x}\right)^p=\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}-\frac{p\,f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!}(z-x)-\frac{p\,f^{(p+3)}(x)}{(p+3)!}(z-x)^2$$

$$-\ldots-\frac{p\,f^{(2p)}(x)}{(2p)!}(z-x)^{p-1}-\left\{\frac{p\,f^{(2p+1)}(x)}{(2p+1)!}-\frac{p\,(p+1)}{1.2}\left(\frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}\right)^2\right\}(z-x)^p-\ldots$$

które możemy krótko napisać:

$$\left(\frac{1}{z_1-x}\right)^p=\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}+A_1(z-x)+A_2(z-x)^2+\ldots \quad (2)$$

Łatwo okazać, że istnieje taka skończona wartość $M$, że stale będzie:

$$|A_k|\,\varrho^k<M;\qquad \varrho<1,\quad \text{t. j.}\quad |A_k|<M\varrho^{-k}\ \ldots\ldots \quad (3)$$

§ **11.** Ponieważ na mocy § 9 mamy:

$$|z-x|>|z_1-x|>|z_2-x|>\ldots$$

[1]) [2]) Patrz notę 6) i 7) na str. 97—(3).



więc zarazem:

$$\left(\frac{1}{z_\nu-x}\right)^p=\left(\frac{1}{z_{\nu-1}-x}\right)^p-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}+\sum_{j=1}^{j=\infty}A_j\,(z_{r-1}-x)^j \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
$$r=1,2,3,\ldots$$

Stąd wynika wzór:

$$\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{np\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}+A_1\sum_{i=0}^{i=n-1}(z_i-x)+A_2\sum_{i=0}^{i=n-1}(z_i-x)^2$$

$$+A_3\sum_{i=0}^{i=n-1}(z_i-x)^3+\ldots+A_p\sum_{i=0}^{i=n-1}(z_i-x)^p+A_{p+1}\sum_{i=0}^{i=n-1}(z_i-x)^{p+1}+\ldots$$

i zarazem:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}$$

$$+\sum_{i=1}^{i=p}A_i\left\{\frac{(z-x)^i+(z_1-x)^i+(z_2-x)^i+\ldots+(z_{n-1}-x)^i}{n}\right\}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}A_{p+r}\left\{\frac{(z-x)^{p+\nu}+(z_1-x)^{p+\nu}+(z_2-x)^{p+\nu}+\ldots+(z_{n-1}-x)^{p+\nu}}{n}\right\}\ldots(5)$$

§ **12.** Z nierówności: $|z-x|>|z_1-x|>|z_2-x|>\ldots$ wynika, że:

$$\left|\frac{(z-x)^\mu+(z_1-x)^\mu+\ldots+(z_{n-1}-x)^\mu}{n}\right|<|z-x|^\mu,$$

a stąd:

$$\frac{1}{n}\left|\frac{1}{z_n-x}\right|^p<\frac{1}{n}\left|\frac{1}{z-x}\right|^p+\frac{p\,|f^{(p+1)}(x)|}{(p+1)!}+\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\infty}|A_\sigma|\,|z-x|^\sigma. \qquad (5')$$

Ponieważ zaś $|A_\sigma|<M\varrho^{-\sigma}$, $|z-x|<\varrho$, przeto wyrażenie:

$$\frac{1}{n}\left|\frac{1}{z_n-x}\right|^p,$$

nie wzrasta nieograniczenie, gdy $n$ rośnie. Stąd już wynika, że $\lim\limits_{n=\infty} n\,(z_n-x)^p$ nie może być zerem, ale należy jeszcze dowieść, że:

$$\frac{1}{n}\left|\frac{1}{z_n-x}\right|^p,$$

nie może maleć do zera, gdy $n$ rośnie nieograniczenie.

§ 13. Napiszmy:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}+Q_n\quad\ldots\ldots\ (6)$$

gdzie $Q_n$ jest liczbą skończoną, nawet dla $n=\infty$.

W granicy będzie:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}+Q_\infty.$$

Położmy $Q_\infty=Se^{\psi\sqrt{-1}}$; $\dfrac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}=pae^{\alpha\sqrt{-1}}$ (patrz § 7); otrzymamy:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r_n^p}\,e^{-p\theta_n\sqrt{-1}}\right\}=-\frac{pa\,e^{\alpha\sqrt{-1}}}{(p+1)!}+Se^{\psi\sqrt{-1}}\ \ldots\ (7)$$

Mnożymy obie strony przez $e^{p\,\theta_n\sqrt{-1}}$ i znajdujemy:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{nr_n^p}\right)=-\frac{pa\,e^{(\alpha+p\,\theta_n)\sqrt{-1}}}{(p+1)!}+Se^{(\psi+p\,\theta_n)\sqrt{-1}}\quad\ldots\ldots\ (8)$$

Porównanie części rzeczywistych daje:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{nr_n^p}\right)=-\frac{pa\cos(\alpha+p\theta_n)}{(p+1)!}+S\cos(\psi+p\theta_n)\ \ldots\ldots\ (9)$$

§ 14. Zajmijmy się wyrażeniem $S$. Przedewszystkiem z wzoru (5′) widać, że:

$$S<\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\infty}|A_\sigma|\,|z-x|^\sigma<|z-x|\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\infty}|A_\sigma|\,|z-x|^{\sigma-1}.$$



$S<N|z-x|$ przyczem $N$ jest liczbą skończoną. Jeżeli teraz $|z-x|$ dobierzemy tak, by $N|z-x|$ było dość małe, to z pewnością będzie:

$$S<\left|\frac{pa\cos(\alpha+p\theta_n)}{(p+1)!}\right|<\frac{pa}{(p+1)!}\quad\ldots\ldots\ (10)$$

Ponieważ na mocy twierdzenia podanego w § 8 jest:

$$\lim_{n=\infty}\cos(\alpha+p\,\theta_n)=-1,$$

przeto

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{nr_n^p}\right)=\frac{pa}{(p+1)!}+S\cos(\psi+p\theta_n)\quad\ldots\ (11)$$

Ze względu na to, że $S<\dfrac{pa}{(p+1)!}$ możemy napisać:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{nr_n^p}\right)>h^p>0,$$

przyczem $h$ jest pewną liczbą skończoną, np. $h^p=\dfrac{pa}{(p+1)!}-S$.

§ 14. Przekonywamy się tedy, że:

$$h^p<\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\left|\frac{1}{z_n-x}\right|^p<H^p;\quad\ldots\ldots\ (12)$$

gdzie liczby $H$ i $h$ są skończonemi.

Stąd wynika:

$$\text{mod.}\,(z_n-x)<\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\quad\ldots\ldots\ (13)$$

$$|z_n-x|^j<\left(\frac{1}{h}\right)^j\frac{1}{\sqrt[p]{n^j}}\quad\ldots\ldots\ (14)$$

Napiszmy rozwinięcie:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}$$
$$+\sum_{i=1}^{i=p}A_i\frac{(z-x)^i+(z_1-x)^i+\ldots+(z_{n-1}-x)^i}{n}$$
$$+\sum_{j=p+1}^{j=\infty}A_j\frac{(z-x)^j+(z_1-x)^j+\ldots+(z_{n-1}-x)^j}{n}.$$

Ponieważ:

$$|(z-x)^i+(z_1-x)^i+\ldots+(z_{n-1}-x)^i|<\left(\frac{1}{h}\right)^i\left\{\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{i}{p}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{i}{p}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{i}{p}}\right\}<\left(\frac{1}{h}\right)^i n^{1-\frac{i}{p}}\left(1-\frac{i}{p}\right)+\mu_0\, n^{-\frac{i}{p}}+\mu_1\, n^{-\frac{i}{p}-1}+\ldots$$

$$i\leqslant p,$$

przyczem $\mu_0, \mu_1, \ldots$ są liczbami skończonemi dodatniemi, przeto:

$$\frac{1}{h}\left|(z-x)^i+(z_1-x)^i+\ldots+(z_{n-1}-x)^i\right|<\left(\frac{1}{h}\right)^i\left(1-\frac{1}{p}\right)n^{-\frac{i}{p}}+\ldots.$$

w granicy staje się zerem. Zostaje tedy rozwinięcie:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}$$

$$+\sum_{j=p+1}^{j=\infty}A_j\frac{(z-x)^j+(z_1-x)^j+\ldots+(z_{n-1}-x)^j}{n}.$$

§ **15.** Łatwo okazać, że:

$$\left|\sum_{j=p+1}^{j=\infty}A_j\,(z-x)^j\right|<|z-x|^{p+1}K,$$

gdzie $K$ jest pewną skończoną liczbą. Stąd wynika:

$$\left|\sum_{j=p+1}^{j=\infty}A_j\frac{(z-x)^j+(z_1-x)^j+\ldots+(z_{n-1}-x)^j}{n}\right|$$

$$<K\frac{|z-x|^{p+1}+|z_1-x|^{p+1}+\ldots+|z_{n-1}-x|^{p+1}}{n}.$$

Szereg

$$|z-x|^{p+1}+\ldots+|z_{n-1}-x|^{p+1}$$

jest zbieżnym (gdy $n=\infty$), gdyż:

$$|z_{n-1}-x^{p+1}|<\left(\frac{1}{h}\right)^{p+1}\frac{1}{\sqrt[p]{n^{p+1}}}.$$



Stąd wreszcie wynika, że:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{j=p+1}^{j=\infty}A_j\frac{(z-x)^j+\ldots+(z_{n-1}-x)^j}{n}=0.$$

Będzie tedy:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=-\frac{p\,f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!},$$

i wreszcie:

$$\lim_{n=\infty}n\,(z_n-x)^p=-\frac{(p+1)!}{p\,f^{(p+1)}(x)},$$

co było do okazania.

(Dok. nast.).