W przypadku $\Delta = 0$ mamy rzeczywistą powierzchnię tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = 0$, t. j. mamy albo kulę, albo płaszczyznę i krzywe (9) istnieją tylko wówczas gdy $P$ nie równa się $a$, a wówczas mają postać:

$$dx^2 + dy^2 = 0,$$

t. j. są krzywemi minimalnemi. W dalszym ciągu mówić będziemy tylko o przypadkach, w których istnieją linie krzywiznowe.

Warunek, któremu ma czynić zadość funkcya $P$, ażeby jedna rodzina, $P$ nie będąca rodziną linij krzywiznowych, pozostawała bez zmiany przy przekształceniu $Uf$, określa się jednem z równań (22), (23) i tym przypadkiem bliżej zajmować się nie będziemy.

Jeżeli zaś obie rodziny $P$ mają pozostawać bez zmiany, ale nie mają pozostawać bez zmiany żadne pary rodzin do innych funkcyj $P$ należące, to muszą mieć miejsce warunki (14) i (16), a należy zauważyć, że jeżeli warunek (14) daje którąkolwiek z krzywizn normalnych głównych t. j. jednę z rodzin linii krzywiznowych, to warunek (16) przez to samo jest spełniony.

Jeżeli wreszcie więcej niż jedna para rodzin $P$ mają być rodzinami niezmiennemi, to nieskończenie małe przekształcenie $Uf$ musi spełniać warunki (17). Gdy jednakowoż warunki te są spełnione, to pozostaje bez zmiany nieskończenie wiele par rodzin $P$, określonych równaniem cząstkowem (19) lub (20), a pomiędzy temi rodzinami zawsze znajdują się rodziny linij krzywiznowych.

---

# METODY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO BEZWZGLĘDNEGO I ICH ZASTOSOWANIA.[1]

NAPISALI

G. RICCI i LEVI-CIVITA.

## Przedmowa.

P. Poincaré[2]) napisał, że w naukach matematycznych dobre znakowanie jest tak samo ważnem filozoficznie, jak dobra klasyfikacya w naukach przyrodniczych. Oczywiście, a nawet z większą słusznością, można to samo powiedzieć o metodach; albowiem właśnie od wyboru metod zależy możliwość zmuszenia (że użyjemy tu znowu słów znakomitego geometry francuskiego) mnóstwa faktów, nie pozostających w żadnej widocznej łączności, do ugrupowania się według ich pokrewieństw naturalnych.

Można też powiedzieć, że twierdzenie, udowodnione na drogach krętych, przy pomocy sposobów sztucznych i rozważań, nie mających z niem łączności istotnej, jest często prawdą odkrytą tylko w połowie; albowiem zdarza się prawie zawsze, że to samo twierdzenie przedstawia się w sposób

---

1) Przekład, upoważniony przez Autorów, pracy Ich, ogłoszonej w t. 54 dziennika „Mathematische Annalen". S. D.

2) Przedmowa do dzieł Laguerre'a (Oeuvres de Laguerre), wydawanych przez Akademię Nauk w Paryżu.

bardziej zupełny i ogólny, gdy dochodzimy do niego drogą prostszą i środkami lepiej przystosowanemi.

Jako przykład, wymieniamy podany przez Jacobi'ego i rozszerzony przez Beltrami'ego dowód niezmienności wyrażenia $\Delta_2 U$. Jest to dowód bezwątpienia wytworny i świadczący o przenikliwości umysłu autora; ale jest uderzającem, że dla udowodnienia twierdzenia, należącego z natury swej do algebraicznej teoryi eliminacyi, trzeba rozważać waryacyę całki. Temu to właśnie spostrzeżeniu oraz przeczuwanej a priori możliwości sprowadzenia teoryi parametrów różniczkowych rzędu drugiego do teoryi niezmienników form algebraicznych zawdzięczać należy badania, które doprowadziły do odkrycia metod, nazwanych przez nas Rachunkiem różniczkowym bezwzględnym[1]). Pierwszym rezultatem tego Rachunku było odkrycie całego łańcucha niezmienników różniczkowych, zawierających jednę albo więcej funkcyj dowolnych, łańcucha, którego $\Delta_2 U$ jest pierwszem i najważniejszem ogniwem.

Algorytm Rachunku różniczkowego bezwzględnego, t. j. narzędzie materyalne metod, które przedstawimy czytelnikom, znajduje się całkowicie w pewnem spostrzeżeniu Christoffela[2]); ale metody same i korzyści z nich płynące mają swoją racyę bytu i źródło w ścisłych związkach, łączących je z pojęciem rozmaitości $n$-wymiarowej, które zawdzięczamy geniuszowi Gaussa i Riemanna.

Według tego pojęcia, rozmaitość $V_n$ jest określona „wewnętrznie" (intrinséquement) co do swych własności metrycznych przez $n$ zmiennych niezależnych i przez całą klasę form kwadratowych różniczek tych zmiennych, z których to form dwie którekolwiek dają się przekształcić jedna na drugą przy pomocy przekształcenia punktowego. Rozmaitość $V_n$ zostaje tedy niezmienną wobec wszelkiego przekształcenia jej spółrzędnych. Rachunek różniczkowy bezwzględny, operujący na formach spółzmiennych albo przeciwzmiennych z wyrażeniem $ds^2$, należącem do $V_n$, w celu otrzymywania innych form tejże natury, jest również w swych wzorach i w swych wynikach niezależny od wyboru zmiennych niezależnych. Będąc tym sposobem niejako przywiązany do rozmaitości $V_n$, jest narzędziem naturalnem wszystkich poszukiwań, mających za przedmiot taką rozmaitość, oraz poszukiwań, w których jako element charakterystyczny napotykamy formę kwadratową dodatnią różniczek $n$-zmiennych lub ich pochodnych.

Niniejszy wykład treściwy tych metod i ich zastosowań ma na celu przekonanie czytelnika o ich pożytku, który wydaje nam się wielkim i oczywistym, oraz zmniejszenie, o ile można, pragnącym stosować te metody—trudności, nastręczających się przy stosowaniu nowego narzędzia. Mniemamy, że po zwalczeniu trudności początkowych, czytelnik przekona się łatwo, iż ogólność, jakiej dostarczają te metody przez usunięcie z każdego pytania elementów z niem różnorodnych, wprowadzonych skutkiem związania się określonym układem spółrzędnych, powiększa nietylko wytworność lecz i łatwość i jasność dowodów i wniosków.

[1]) Porów. Ricci: „Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali". Annali di matematica pura ed applicata. Ser. II, t. XIV, 1886.

[2]) „Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades", Crelle's Journal, Bd. XXX, 1869.



## ROZDZIAŁ I.

# Algorytm rachunku różniczkowego bezwzględnego.[1])

## § 1.

### *Przekształcenie punktowe i układy funkcyj.*

Oznaczmy przez $T$ przekształcenie ogólne:

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{1}$$

dwujednoznaczne i regularne w rozważanej dziedzinie; przez $\Omega$ układ pewnej liczby funkcyj: $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ zmiennych $x$, funkcyj, które nazywać będziemy elementami układu $\Omega$. Oznaczmy przez $S$ podstawienie, które stosujemy do układu $\Omega$, podstawiając zamiast elementów $f_1, f_2, \ldots, f_p$ odpowiednio funkcye $g_1, g_2, \ldots, g_p$ zmiennych $y$.

Uważajmy $S$ jako funkcyę przekształcenia $T$, t. j. załóżmy, że dla każdego przekształcenia (1), stosowanego do zmiennych niezależnych, mamy podstawienie zupełnie określone $S$; oraz że podstawienie $S$, jako funkcya przekształcenia $T$, jest poddane następującym warunkom:

1) Jeżeli za $T$ weźmiemy podstawienie tożsamościowe, wtedy $S$ zlewa się z tem podstawieniem.

2) Jeżeli przez $T$, $T_1$, $T_2$ oznaczymy trzy przekształcenia (1), przez $S$, $S_1$, $S_2$ odpowiadające im podstawienia $S$, i jeżeli $T \equiv T_2 . T_1$, wtedy jest także $S \equiv S_2 , S_1$.

Istnieją rozmaite sposoby wyznaczania podstawienia $S$, jako funkcyi przekształcenia $T$. Można naprzykład (i tak postępuje się powszechnie)

[1]) Ricci: Delle derivazioni covarianti e contravarianti. Studi editi dall'Università di Padova, etc. Padwa, 1880.—Lezioni sulla teoria delle superficie, Padwa, Drucker, 1898.

przyjąć jako elementy układu przekształconego te, które otrzymujemy z elementów układu pierwotnego, podstawiając w nim zamiast zmiennych $x$ wyrażenia ich przez zmienne $y$. Mówimy wtedy, że rozważany układ przekształca się niezmienniczo (par invariance), lub że jest niezmienniczym.

Często wszakże natura danego układu nasuwa nam wybór dogodniejszego prawa przekształcenia. Jeżeli naprzykład $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są pochodnemi pewnej funkcyi $f$ odpowiednio względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$. wtedy naturalną jest rzeczą przyjąć jako elementy układu przekształconego pochodne $(f_1), (f_2), \ldots; (f_n)$ funkcyj $(f)$, która powstaje z funkcyi $f$ przez stosowanie przekształcenia $T$, zamiast wyrażeń, które otrzymać można, stosując przekształcanie $T$ do funkcyi $f_1, f_2, \ldots, f_p$. W tym przypadku $S$ będzie określone przez wzory:

$$(f_r) = \sum_{1}^{n} {}_s f_s \frac{\partial x_s}{\partial y_r}, \qquad (r=1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

w których funkcye $f_1, f_2, \ldots, f_n$ winny być wyrażone w zmiennych $y$.

Jeżeli układ dany składa się z funkcyi $f$ i wszystkich jej pochodnych aż do danego rzędu, to można żądać, aby i po przekształceniu (1) był złożony w takiż sposób. W tym przypadku wzory analityczne, przedstawiające prawo przekształcenia układu, są dość skomplikowane. Funkcya $f$ przekształca się niezmienniczo, jej pochodne pierwsze według wzorów (2), pochodne rzędu drugiego według wzorów:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_r \, \partial y_s} = \sum_{1}^{n} {}_{p,q} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \, \partial x_q} \frac{\partial x_p}{\partial y_r} \frac{\partial x_p}{\partial y_s} + \sum_{1}^{n} {}_p \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial^2 x_p}{\partial y_r \, \partial y_s} \text{ i t. d.} \tag{3}$$

Otrzymujemy także przykłady godne uwagi, rozważając spółczynniki wyrażenia liniowego i jednorodnego względem pochodnych rzędu pierwszego funkcyi, mianowicie:

$$\sum_{1}^{n} {}_r A^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}, \tag{4}$$

oraz spółczynniki wyrażenia kwadratowego i jednorodnego względem różniczek zmiennych niezależnych, mianowicie:

$$\sum_{1}^{n} {}_{r,s} a_{r,s} \, dx_r \, dx_s. \tag{5}$$



Wykonawszy przekształcenie (1) na zmiennych niezależnych, przechodzimy równocześnie od wyrażeń (4) i (5) do wyrażeń przekształconych:

$$\sum_{1}^{n} {}_r B^{(r)} \frac{\partial f}{\partial y_r},$$

$$\sum_{1}^{n} {}_r b_{r,s} \, dy_r \, dy_s:$$

a spółczynniki nowe dane będą odpowiednio przez wzory:

$$B^{(r)} = \sum_{1}^{n} {}_s A^{(s)} \frac{\partial y_r}{\partial x_s}, \tag{4'}$$

$$b_{rs} = \sum_{1}^{n} {}_{p,q} a_{pq} \frac{\partial x_p}{\partial y_r} \frac{\partial x_q}{\partial y_s}. \tag{5'}$$

Jest tedy rzeczą naturalną, że na układach spółczynników wyrażeń (4), (5) wykonywamy podstawienia (4'), (5'), ile razy wykonywamy przekształcenie (1) na zmiennych niezależnych. Wnosimy stąd, że często jest rzeczą właściwą zastępowanie prawa niezmienniczości innemi prawami przekształcenia, mającemi swoje uzasadnienie w naturze rozważanych układów.

## § 2.

### *Układy spółzmiennicze i przeciwzmiennicze. Rozmaite przykłady.*

Pomiędzy pomyśleć się dającemi prawami przekształcenia, dwa prawa odgrywają rolę przeważną w analizie matematycznej; są niemi prawa, które nazywać będziemy prawami spółzmienniczości i przeciwzmienniczości, prawa stosujące się do układów wielokrotnych, któremi się teraz zajmiemy. Mówimy, że układ funkcyj $n$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest $m$-krotnym lub inaczej rzędu $m$, gdy otrzymujemy element oznaczony układu dla każdego rozmieszczenia z powtórzeniem $m$ skaźników z pomiędzy $n$ skaźników $1, 2, \ldots, n$. Jedna funkcya będzie dla nas, jako przypadek graniczny, układem rzędu 0. Dla $m = 1, 2, 3, \ldots,$ otrzynujemy w szczególności układy pojedyńcze lub rzędu pierwszego, podwójne lub rzędu drugiego i t. d. Pochodne rzędu pierwszego funkcyi oraz spółczynniki wyrażenia liniowego i jednorodnego względem jej pochodnych są przykładami układów rzędu pierwszego. Układy podwójne mieć będziemy, rozważając pochodne rzędu drugiego funkcyi, albo spółczynniki formy kwadratowej różniczek zmiennych niezależnych; w ogólności układ rzędu $m$-tego stanowić będą naprzykład pochodne tegoż rzędu funkcyi dowolnej.

Mówić będziemy, że układ rzędu $m$-tego jest spółzmienniczym i w tym przypadku elementy jego oznaczać będziemy przez $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (gdzie skaźniki $r_1, r_2, \dots, r_m$ mogą przyjmować każdy wszystkie wartości $1, 2, \dots n$), jeżeli elementy $Y_{r_1 r_2 \dots r_m}$ układu przekształconego wyrażają się wzorami:

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_m} X_{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{r_1}} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial y_{r_2}} \cdots \frac{\partial x_{s_m}}{\partial y_{r_m}}. \tag{6}$$

Przeciwnie, za pomocą symboli takich, jak $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$, oznaczać będziemy elementy układu przeciwzmienniczego, t. j. układu, którego przekształcenie przedstawiają wzory:

$$Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1, s_2, \dots, s_m} X^{(s_1 s_2 \dots s_m)} \frac{\partial y_{r_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{r_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial y_{r_m}}{\partial x_{s_m}}, \tag{7}$$

gdzie elementy $X$, $Y$ odnoszą się odpowiednio do zmiennych $x$ i $y$. Samo przez się rozumie się, że we wzorach (6), (7) wszystko jest wyrażone w funkcyi zmiennych $y$.

Niechaj $X$ oznacza jakąkolwiek funkcyę zmiennych $x$; $Y$ jakąkolwiek funkcyę zmiennych $y$; wzór $Y = X$ można uważać jako przypadek szczególny tak wzorów (6), jako też i wzorów (7). Z tego to powodu układ rzędu 0, jakkolwiek niezmienniczy, może być także uważany za przypadek graniczny układów spółzmienniczych i układów przeciwzmienniczych.

Wszędzie poniżej, gdzie wprowadzać będziemy symbol taki, jak $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (albo $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$), rozumieć będziemy, że odnosi się on zawsze do jakiegokolwiek elementu układu spółzmienniczego (albo przeciwzmienniczego) rzędu $m$, który nazywać będziemy układem $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (albo $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$).

Pochodne rzędu pierwszego funkcyi oraz spółczynniki formy kwadratowej $\varphi$ różniczek, według wzorów (2) i (5′) dają nam przykłady układów spółzmienniczych odpowiednio rzędu pierwszego i drugiego. Przykłady zaś układów przeciwzmienniczych otrzymujemy, rozważając spółczynniki wyrażenia liniowego względem pochodnych rzędu pierwszego funkcyi i spółczynniki formy odwrotnej względem formy $\varphi$. Podobnież wzory:



$$dy_r = \sum_{1}^{n}{}_s \, dx_s \frac{\partial y_r}{\partial x_s}$$

mówią, że różniczki zmiennych niezależnych są elementami układu pojedyńczego przeciwzmienniczego.

Układy, utworzone z pochodnych rzędu $m > 1$ funkcyi zmiennych niezależnych (jak np. powstałe z wzorów (3) dla $m = 2$) nie są ani spółzmiennicze ani przeciwzmiennicze. Prawa przekształcenia tych układów są dość złożone i w tem właśnie tkwi źródło trudności, które napotyka Rachunek różniczkowy zwyczajny w przekształcaniu wyrażeń, zawierających pochodne cząstkowe rzędu wyższego nad pierwszy. Zobaczymy, że można uniknąć tych trudności, zastępując tworzenie pochodnych zwykłych działaniem, o którem niżej mówimy.

Godzi się zauważyć, że układy spółzmiennicze i przeciwzmiennicze teoryi form algebraicznych są przypadkami szczególnemi układów, wyżej określonych. W samej rzeczy przekształcenia (1), rozważane w teoryi form algebraicznych, są liniowemi i jednorodnemi, i skoro przekształcenie tej natury działa na zmienne niezależne, spółczynniki form punktowych przekształcają się według wzorów (6), a spółczynniki form odwrotnych według wzorów (7).

## § 3.

***Dodawanie, mnożenie i składanie układów. Kwadryka (czyli forma kwadratowa) zasadnicza. Układy wzajemne lub odwrotne.***

**Dodawanie.** Jeżeli $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $\Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}$ są dwa układy spółzmiennicze tego samego rzędu $m$, to:

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = X_{r_1 r_2 \dots r_m} + \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}$$

jest także układem spółzmienniczym rzędu $m$; nazwiemy go sumą dwu danych układów. W podobny sposób określamy sumę dwóch układów przeciwzmienniczych rzędu $m$, która będzie też układem przeciwzmienniczym tegoż rzędu.

**Mnożenie.** Niechaj $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $\Xi_{s_1 s_2 \dots s_p}$ będą dwa układy spółzmiennicze, pierwszy rzędu $m$, drugi rzędu $p$; układ:

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m, s_1 s_2 \dots s_p} = X_{r_1 r_2 \dots r_m} \cdot \Xi_{s_1 s_2 \dots s_p}$$

jest niezmienniczym rzędu $m+p$; nazywamy go iloczynem dwu danych układów. Dość zastąpić tu wyraz „spółzmienniczy" wyrazem „przeciwzmienniczy", aby mieć określenie iloczynu dwóch układów przeciwzmienniczych jakiegokolwiek rzędu.

Podane wyżej określenia rozciągają się oczywiście na sumę i na iloczyn jakichkolwiek układów jednej natury, spółzmienniczych albo przeciwzmienniczych.

**Składanie**. Jeżeli $X_{r_1 r_2 \dots r_m, s_1 s_2 \dots s_p}$ jest jakimkolwiek układem spółzmienniczym rzędu $m+p$, $\Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p)}$ układem przeciwzmienniczym rzędu $p$, wtedy układ:

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \dots s_p} \Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p},$$

jest spółzmienniczym i rzędu $m$. Podobnie, jeżeli dane są dwa układy $X^{(r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p)}$, $\Xi_{s_1 s_2 \dots s_p}$, to otrzymujemy z nich układ przeciwzmienniczy rzędu $m$, kładąc

$$Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} = \sum {}_{s_1 s_2 \dots s_p} X^{(r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p)} \Xi_{s_1 s_2 \dots s_p}.$$

Mówić będziemy, że układ $Y_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (albo $Y^{(r_1 r_2 \dots r_p)}$) jest złożony z dwóch układów rozważanych.

W szczególności, gdy $m = 0$, mamy układ rzędu 0, t. j. niezmiennik, jako wynik składania dwóch układów natury przeciwnej i tego samego rzędu.

Czytelnik może łatwo wyobrazić sobie te częstego użytku w Rachunku naszym twierdzenia, jako wynikające z jednej zasady, mianowicie zasady nasycenia skaźników.

**Kwadryka lub forma zasadnicza**. Metody Rachunku różniczkowego bezwzględnego polegają zasadniczo na rozważaniu formy kwadratowej dodatniej różniczek $n$ zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_n$, t. j. wyrażenia typu

$$\varphi = \sum_1^n {}_{r,s}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Spółczynniki tego wyrażenia, które nazywać będziemy kwadryką lub formą zasadniczą, występują wszędzie we wzorach naszych i wprowadzają tam znakomitą prostotę i symetryę.



**Układy wzajemne**. Oznaczywszy przez $a^{(rs)}$ spółczynniki formy wzajemnej lub odwrotnej względem formy $\varphi$, mamy tożsamości:

$$a^{(rs)} = \sum_1^n {}_{p,q}\, a^{(rp)}\, a^{(sq)}\, a_{pq}.$$

W ogólności, jeżeli dany jest układ $X_{r_1, r_2, \dots, r_m}$, spółzmienniczy rzędu $m$, wtedy przy pomocy formy zasadniczej można z niego otrzymać układ przeciwzmienniczy tego samego rzędu, kładąc:

$$X^{(r_1 r_2 \dots r_m)} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \dots s_m} a^{(r_1 s_1)} a^{(r_2 s_2)} \dots a^{(r_m s_m)} X_{s_1 s_2 \dots s_m}. \tag{8}$$

Podobnież, wychodząc z układu przeciwzmienniczego $\Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$, otrzymujemy układ spółzmienniczy, kładąc:

$$\Xi_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \dots s_m} a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \dots a_{r_m s_m} \Xi^{(s_1 s_2 \dots s_m)}. \tag{9}$$

Kolejne stosowanie działań (8) i (9) prowadzi do tożsamości, i dlatego to nazywamy odwrotnemi lub wzajemnemi, ze względu na formę zasadniczą, dwa takie układy, jak $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ i $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, albo $\Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}$ i $\Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ Z wzorów (8) i (9) wyprowadzamy łatwo tożsamość:

$$\sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_m} X^{(r_1 r_2 \dots r_m)} \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_m} X_{r_1 r_2 \dots r_m} \Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)}, \tag{10}$$

która orzeka, że:

„Każdy niezmiennik, złożony z układu spółzmienniczego i z układu przeciwzmienniczego tego samego rzędu jest identyczny z niezmiennikiem, złożonym z układów odwrotnych względem danych".

Jeżeli ustalimy formę zasadniczą, to dość dać jeden układ spółzmienniczy albo przeciwzmienniczy, aby układy odwrotne były określone. Ten fakt znajduje swoje wyrażenie materyalne w stosowanej już w powyższych przykładach umowie, że ta sama litera, opatrzona $m$ skaźnikami, przedstawia jakikolwiek element układu spółzmienniczego rzędu $m$ albo układu odwrotnego, stosownie do tego, czy skaźniki są umieszczone u dołu albo u góry litery.

Oznaczać będziemy odtąd przez $a$ wyróżnik formy zasadniczej. Z każdej takiej formy można otrzymać dwa układy rzędu $n$ ze względu na nią wzajemne; układy te, które często z pożytkiem wprowadzać można do rachunków, mają własności godne uwagi. Ustaliwszy znak wyrażenia $\sqrt{a}$ dla określonego układu zmiennych niezależnych, przyjmijmy równocześnie, że znak ten, przy stosowaniu podstawienia (1) do zmiennych niezależnych, nie ma ulegać zmianie, jeżeli jakobian zmiennych $x$ względem zmiennych $y$ jest dodatni; że zmienia się, gdy ten jakobian jest ujemny. Układ rzędu $n$, którego elementy $\varepsilon_{r_1 r_2 \dots r_m}$ są zerami, gdy skaźniki $r_1, r_2, \dots, r_n$ nie są wszystkie różne, są zaś równe $\sqrt{a}$ albo $-\sqrt{a}$, stosownie do tego, czy przy wszystkich skaźnikach różnych klasa przemiany $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ jest parzystą albo nieparzystą względem przemiany zasadniczej $(1, 2, \dots, n)$, układ ten jest spółzmienniczym. Elementy $\varepsilon^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ układu odwrotnego są odpowiednio równe 0, $\pm 1 : \sqrt{a}$.

Jeżeli przez $\Delta(z_1, z_2, \dots, z_n)$ oznaczymy jakobian $n$ funkcyj $z_1, z_2, \dots, z_n$ względem $n$ zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, podzielony przez $\sqrt{a}$, będziemy mieli tożsamość:

$$\Delta(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n}^{n} \varepsilon^{(r_1 r_2 \dots r_n)} \frac{\partial z_1}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial z_2}{\partial x_{r_2}} \cdots \frac{\partial z_n}{\partial x_{r_n}},$$

która, wskazując naocznie własność niezmienniczą wyrażenia $\Delta$, pozwala poddać ten niezmiennik metodom Rachunku różniczkowego bezwzględnego. Układ $\varepsilon_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (albo $\varepsilon^{(r_1, r_2, \dots, r_m)}$) nazywać będziemy układem spółzmienniczym (albo przeciwzmienniczym) $E$.

## § 4.

### *Zastosowania do analizy wektoryalnej* [1]).

Podamy zaraz ważny przykład zastosowania Rachunku różniczkowego bezwzględnego, wykładając prawidła rachunku wektoryalnego w spółrzędnych ogólnych.

Oznaczmy przez $y_1, y_2, y_3$ spółrzędne kartezyańskie prostokątne jakiekolwiek w przestrzeni naszej, przez $(R)$ — wektor w tejże przestrzeni.

[1]) Wyniki, zawarte w tym paragrafie, wyłożone tu są po raz pierwszy w sposób systematyczny i zupełny.



Wprowadźmy $ds^2$ tej przestrzeni, jako formę zasadniczą $\varphi$, i połóżmy w spółrzędnych $y$:

$$\varphi = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2,$$

w spółrzędnych zaś ogólnych:

$$\varphi = \sum_{r,s}^{3} a_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Niechaj $l_r$ $(r=1, 2, 3)$ będą kierunki dodatnie linii spółrzędnych, $n_r$ $(r=1, 2, 3)$ — kierunki dodatnie normalnych do powierzchni spółrzędnych o parametrze $x_r$; kierunki te ustalamy w ten sposób, że przyjmujemy, iż dla przemieszczenia nieskończenie małego wzdłuż $l_r$ albo $n_r$ otrzymujemy przyrost dodatni zmiennej $x_r$.

Ponieważ własność charakterystyczna podstawień ortogonalnych daje się wyrazić, mówiąc, że są one równocześnie spółzmienniczemi i przeciwzmienniczemi, przeto składowe wektora $(R)$ względem trzech osi ortogonalnych można uważać równocześnie jako elementy układu spółzmienniczego i przeciwzmienniczego wobec każdej zmiany tych osi. Postarajmy się wyznaczyć dla spółrzędnych ogólnych wyrażenia rzutów prostokątnych $\overline{R}_{l_r}$ i $\overline{R}_{n_r}$ i składowych $R_{l_r}$ i $R_{n_r}$ według stycznych do linij i według normalnych do powierzchni spółrzędnych. W tym celu rozważmy dwa układy odwrotne $X_r$ i $X^{(r)}$, których elementy w przypadku spółrzędnych kartezyańskich $y$ zlewają się z rzutami wektora $(R)$ na osi spółrzędnych, rzutami, które oznaczyć można symbolami $Y_r$ lub $Y^{(r)}$. Ponieważ rzut wielokąta zamkniętego na jakąkolwiek prostą jest zerem, przeto rozważając wielokąty, których bokami są $R$ i ich składowe według osi $y_1, y_2, y_3$, albo według kierunków $l_r$ i kierunków $n_r$, mieć będziemy:

$$(11) \quad \overline{R}_{l_r} = \sum_{s}^{3} Y_s \cos(l_r, y_s); \qquad (12) \quad \overline{R}_{n_r} = \sum_{(s)}^{3} Y^{(s)} \cos(n_r, y_s);$$

$$(13) \quad Y^{(s)} = \sum_{r}^{3} R_{l_r} \cos(l_r, y_s); \qquad (14) \quad Y^{(s)} = \sum_{r}^{3} R_{n_r} \cos(n_r, y_s),$$

albo też, po podstawieniu zamiast dostaw kierunkowych znanych ich wyrażeń:

$$(11')\quad \sqrt{a_{rr}}\,.\,\overline{R}_{l_r} = \sum_{1}^{3}{}_{s}\, Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_r}\,; \qquad (12')\quad \sqrt{a^{(rr)}}\,.\,\overline{R}_{n_r} = \sum_{1}^{3}{}_{s}\, Y^{(s)} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}\,;$$

$$(13')\quad Y^{(s)} = \sum_{1}^{3}{}_{r}\, \frac{1}{\sqrt{a_{rr}}} R_{l_r} \frac{\partial y_s}{\partial x_r}\,; \qquad (14')\quad Y_s = \sum_{1}^{3}{}_{r}\, \frac{1}{\sqrt{a^{(rr)}}} R_{n_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}\,.$$

Stosownie do natury spółzmienniczej i odpowiednio przeciwzmienniczej układów $X_r$ i $X^{(r)}$, mamy wzory:

$$X_r = \sum_{1}^{3}{}_{s}\, Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_r}\,, \qquad X^{(r)} = \sum_{1}^{3}{}_{s}\, Y^{(s)} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}\,,$$

i także wzory równoważne:

$$Y^{(s)} = \sum_{1}^{3}{}_{r}\, X^{(r)} \frac{\partial y_s}{\partial x_r}\,, \qquad Y_s = \sum_{1}^{3}{}_{r}\, X_r \frac{\partial x_r}{\partial y_s}\,,$$

a porównanie ich z wzorami (11′), (12′), (13′), (14′) daje:

$$(15)\qquad \overline{R}_{l_r} = X_r : \sqrt{a_{rr}}\,, \qquad (16)\qquad \overline{R}_{n_r} = X^{(r)} : \sqrt{a^{(rr)}}\,,$$

$$(17)\qquad \overline{R}_{l_r} = \sqrt{a_{rr}}\,.\,X^{(r)}, \qquad (18)\qquad \overline{R}_{n_r} = \sqrt{a^{(rr)}}\,.\,X_r\,.$$

Wynika stąd, że:

Mając dane dwa układy pojedyńcze odwrotne $X_r$ i $X^{(r)}$, możemy, przy jakichkolwiek spółrzędnych $x_1, x_2, x_3$ przestrzeni, uważać wyrażenia $X_r : \sqrt{a_{rr}}$ i $X^{(r)} : \sqrt{a^{(rr)}}$, jako wyrażenia rzutów prostokątnych tego samego wektora na styczne do linij spółrzędnych $x_r$ i na normalne do powierzchni spółrzędnych; wyrażenia zaś $\sqrt{a_{rr}}\, X^{(r)}$ i $\sqrt{a^{(rr)}}\, X_r$ za składowe tegoż wektora względem tychże linij i tychże normalnych.



## § 5.

***Tworzenie spółzmiennicze i przeciwzmiennicze układów pochodnych względem formy zasadniczej. Zachowanie prawideł Rachunku różniczkowego zwyczajnego.***

**Tworzenie spółzmiennicze układów pochodnych** (Derywacya spółzmienna). Christoffel [1]) zauważył pierwszy, że gdy układ $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ rzędu $m$ jest spółzmienniczy, wtedy i układ rzędu $m+1$

$$(19)\qquad X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial X_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{m}{}_{l} \begin{Bmatrix} r_l\, r_{m+1} \\ q \end{Bmatrix} X_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \ldots r_m},$$

jest także spółzmienniczym. Nazwiemy **tworzeniem spółzmienniczem pochodnych** względem formy zasadniczej $\varphi$ działanie, przez które, przy pomocy tej formy, przechodzimy od układu danego $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ do układu $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$; ten ostatni układ nazywać będziemy **pierwszym układem pochodnym układu $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ względem formy zasadniczej.**

Dla $m=0$, jako w przypadku granicznym, otrzymujemy, że pierwszy układ pochodny układu $X$ rzędu zero składa się z pochodnych tej funkcyi, bez względu na to, jaką jest forma zasadnicza; kładziemy przeto:

$$(19')\qquad X_r = \frac{\partial X}{\partial x_r}\,.$$

Podobnież otrzymujemy pierwszy układ pochodny układu pojedyńczego $X_r$, kładąc:

$$(19'')\qquad X_{rs} = \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \sum_{1}^{n}{}_{q} \begin{Bmatrix} r\,s \\ q \end{Bmatrix} X_q\,;$$

pierwszy układ pochodny układu podwójnego $X_{rs}$, kładąc:

$$(19''')\qquad X_{rst} = \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_t} - \sum_{1}^{n} \left[ \begin{Bmatrix} r\,t \\ q \end{Bmatrix} X_{qs} + \begin{Bmatrix} s\,t \\ q \end{Bmatrix} X_{rq} \right].$$

[1]) Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades Crelle's Journal Bd. LXX, 1869.

Dla $X_{rs} = a_{rs}$, mamy tożsamości $a_{rst} \equiv 0$, które mówią, że:

*Pierwszy układ pochodny względem formy zasadniczej $\varphi$ układu jej spółczynników jest tożsamościowo zerem.*

Stosując wzory (19) do układu spółzmienniczego $E$, określonego w § 3, stwierdzamy, że:

*Pierwszy układ pochodny układu spółzmienniczego $E$ względem jakiejkolwiek kwadryki zasadniczej jest zerem.*

Jeżeli litera o $m$ skaźnikach przedstawia układ spółzmienniczy, to przyjmować będziemy ogólnie, że taż sama litera z jednym skaźnikiem więcej przedstawia jego pierwszy układ pochodny względem uważanej formy zasadniczej.

Rozumie się, że przez $p$ tworzeń (derywacyj) niezmienniczych względem $\varphi$ można od danego układu rzędu $m$ przejść do innego układu rzędu $m+p$ ($p$ jest jakąkolwiek liczbą całkowitą dodatnią), który to układ będzie $p$-tym układem pochodnym pierwszego względem formy zasadniczej.

Naprzykład, wychodząc z układu rzędu 0, t. j. z funkcyi $X$ i stosując kolejno wzory (19'), (19'') i t. d., można otrzymać pierwszy, drugi i t. d. układ pochodny. Rozciągając na rzędy wyższe nazwy, będące w użyciu dla rzędu pierwszego, nazywamy niekiedy elementy $X_{rs}$, $X_{rst}$ i t. d. *pochodnemi spółzmienniczemi* rzędu drugiego, trzeciego i t. d. funkcyi $X$.

Z dobrze znanych własności symboli *Christoffela* i z wzorów (19'') wyprowadzamy, że:

*Jeżeli układ pojedyńczy spółzmienniczy składa się z pochodnych funkcyi względem zmiennych niezależnych, to jego pierwszy układ pochodny względem formy zasadniczej jest symetryczny; i odwrotnie.*

Według wzorów (19), pochodne elementów jakiegokolwiek układu spółzmienniczego są funkcyami liniowemi tych elementów i elementów jego pierwszego układu pochodnego względem jakiejkolwiek formy zasadniczej. Można tedy w rachunkach eliminować wszędzie pochodne elementów danego układu spółzmienniczego, wprowadzając elementy jego pierwszego układu pochodnego. Jeszcze ogólniej: można wszędzie w rachunkach eliminować pochodne różnych rzędów elementów układu spółzmienniczego rzędu jakiegokolwiek $m$ (i w szczególności dla $m=0$ pochodne jakiejkolwiek funkcyi), wprowadzając elementy jego układów pochodnych tychże rzędów. Postępując w ten sposób, osiągamy tę korzyść (§ 2), że mamy do czynienia jedynie z układami, przekształcającemi się według jednego prawa i prostszego od praw, rządzących przekształceniami pochodnych różnych rzędów układu spółzmienniczego (a w szczególności funkcyi), praw, które za pomocą tworzenia pochodnych zwykłych możnaby wyprowadzić z wzorów (6).



Zobaczymy później, że właśnie prawu przekształcenia układów spółzmienniczych zawdzięczać należy naturę niezmienniczą wzorów i równań, które ustanawiamy przy pomocy procesów Rachunku różniczkowego bezwzględnego.

**Tworzenie przeciwzmiennicze układów pochodnych.** (Derywacya przeciwzmiennicza). Od danego układu przeciwzmienniczego $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ można przy pomocy kwadryki zasadniczej przejść najprzód do układu odwrotnego ze względu na tę kwadrykę, t. j. do układu $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$, a od tego układu do jego pierwszego pochodnego względem $\varphi$, t. j. do układu $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ i wreszcie od tego ostatniego do odwrotnego z nim $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m, r_{m+1})}$. Nazywamy *tworzeniem przeciwzmienniczem układów pochodnych* (derywacyą przeciwzmienniczą) względem $\varphi$ działanie, przez które, przy pomocy formy $\varphi$ przechodzimy od układu pierwotnego $X^{(r_1, r_2, \ldots, r_m)}$ do układu $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1})}$, który jest jego pierwszym pochodnym względem $\varphi$.

Elementy pierwszego układu pochodnego wyrażają się w funkcyi elementów układu pierwotnego i spółczynników formy zasadniczej przy pomocy wzorów:

$$0)\qquad X^{(r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1})} = \sum_{1}^{n}{}_t\, a^{(t r_{m+1})} \left\{ \frac{\partial X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}}{\partial x_t} + \sum_{1}^{m}{}_l \sum_{1}^{n}{}_q \left\{ \begin{matrix} l\,q \\ r_l \end{matrix} \right\} X^{(r_1 r_2 \ldots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \ldots r_m)} \right\}.$$

O tworzeniu przeciwzmienniczem układów pochodnych i o samych tych układach pochodnych układów przeciwzmienniczych można poczynić uwagi zupełnie analogiczne do tych, które wypowiedziano wyżej o tworzeniu spółzmienniczem układów pochodnych i o układach pochodnych układów społzmienniczych. Tak naprzykład, jest widocznem, że ponieważ układy $a_{rst}$, $E_{r_1 r_2 \ldots r_n r_{n+1}}$ są tożsamościowo zerami, przeto tożsamo powiedzieć można o układach $a^{(rst)}$ (pierwszym układzie pochodnym układu $a^{rs}$) i $\varepsilon^{(r_1 r_2 \ldots r_n r_{n+1})}$ (pierwszym układzie pochodnym układu przeciwzmienniczego $E$).

Można powiedzieć ogólnie, że istnieje prawo wzajemności lub dwoistości, pozwalające z każdego twierdzenia i wzoru Rachunku różniczkowego bezwzględnego otrzymać twierdzenie i wzór wzajemny przez przemianę wyrazów *spółzmienniczy* i *przeciwzmienniczy* i przez przeniesienie skaźników z położenia spółzmienniczego do przeciwzmienniczego, i odwrotnie.

**Prawidła rachunku.** Dobrze znane prawidła o tworzeniu pochodnych sum i iloczynów funkcyi rozciągają się sposobem naturalnym na tworzenie spółzmiennicze i pzzeciwzmiennicze układów pochodnych. W samej rzeczy, stosując wzory (19) tego działania spółzmienniczego do układów:

$$Y_{r_1 r_2 \ldots r_m} = X_{r_1 r \ldots r_m} + \Xi_{r_1 r_2 \ldots r_m};$$

$$Y_{r_1 r_2 \ldots r_m s_1 s_2 \ldots s_p} = X_{r_1 r_2 \ldots r_m} \Xi_{s_1 s_2 \ldots s_p},$$

dochodzimy do tożsamości:

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} + \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}},$$

$$\begin{aligned} Y_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p r_{m+1}} = {} & X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} \Xi_{s_1 s_2 \dots s_p} \\ & + X_{r_1 r_2 \dots r_m} \Xi_{s_1 s_2 \dots s_p r_{m+1}}; \end{aligned}$$

rzecz ma się podobnie dla układów przeciwzmienniczych, oraz dla tworzenia układów pochodnych sumy albo iloczynu ilukolwiek wyrazów.

Rozpatrzmy układ złożony:

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_p}^{n} {}_1 \Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p}.$$

Stosując wzory (19) i (20), znajdujemy następujące wyrażenia elementów jego pierwszego układu pochodnego:

$$\begin{aligned} Y_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = {} & \sum_{s_1, s_2, \dots, s_p}^{n} {}_1 \Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p r_{m+1}} \\ & + \sum_{s_1, s_2, \dots, s_p, t}^{n} {}_1 \Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p t)} a_{t r_{m+1}} X_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p}. \end{aligned} \tag{21}$$

Otrzymujemy podobnie wzór wzajemny na tworzenie pochodnych układów złożonych przeciwzmienniczych.

Dla niezmiennika takiego, jakim jest:

$$Y = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m}^{n} {}_1 \Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)} X_{r_1 r_2 \dots r_m}.$$

mamy:

$$\begin{aligned} Y_s = {} & \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m}^{n} {}_1 \Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)} X_{r_1 r_2 \dots r_m, s} \\ & + \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m, t}^{n} {}_1 \Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m t)} a_{ts} X_{r_1 r_2 \dots r_m}. \end{aligned}$$



a zastępując układy $\Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m t)}$ i $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ ich odwrotnemi, znajdziemy:

$$Y_s = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m}^{n} {}_1 (\Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)} X_{r_1 r_2 \dots r_m} + X^{(r_1 r_2 \dots r_m)} \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m s}). \tag{22}$$

W szczególności dla utworzenia pochodnej niezmiennika:

$$Y = \sum_{r}^{n} {}_1 \Xi^{(r)} X_r,$$

mamy wzory:

$$Y_s = \sum_{r}^{n} {}_1 \Xi^{(r)} X_{rs} + \sum_{r}^{n} {}_1 X^{(r)} \Xi_{rs}. \tag{22'}$$

Weźmy niezmiennik

$$(\Delta_1 f)^2 = \sum^{n} {}_1 f^{(r)} f_r,$$

gdzie $f$ jest jakąkolwiek funkcyą zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$; będzie także

$$\Delta_1 f \frac{\partial \Delta_1 f}{\partial x_s} = \sum_{r}^{n} {}_1 f^{(r)} f_{rs}.$$

---

## § 6.

***Układ Riemanna.*** ***Związki pomiędzy elementami drugiego układu pochodnego jakiegokolwiek układu spółzmienniczego.***

Niechaj będzie forma zasadnicza

$$\varphi = \sum_{r,s}^{n} {}_1 a_{rs} \, dx_r \, dx_s;$$

położmy:

$$2a_{rs,t} = \frac{\partial a_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t}$$

$$a_{rs,tu} = \frac{\partial a_{rt,s}}{\partial x_u} - \frac{\partial a_{ru,s}}{\partial x_t} + \sum_1^n {}_{pq}\, a^{(pq)} \left(a_{ru,p}\, a_{st,q} - a_{rt,p}\, a_{su,q}\right).$$

Symbole $a_{rs,tu}$ są elementami układu poczwórnego spółzmienniczego, bardzo ważnego w teoryi form kwadratowych różniczek. Znajdujemy go (jeżeli pominiemy pewien czynnik liczbowy) w pracy R i e m a n n a [1]): „Commentatio mathematica" i dlatego nazywać go będziemy u k ł a d e m s p ó ł z m i e n n i c z y m R i e m a n n a. Wyrażenia $a_{rs,tu}$ badał, jeszcze przed ukazaniem się tej rozprawy wielkiego geometry, C h r i s t o f f e l [2]), który podał ich własności zasadnicze. Wystarczy tu przypomnieć, że liczba tych wyrażeń, niezwiązanych pomiędzy sobą żadnym związkiem liniowym, wynosi $N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

W szczególności, gdy $n = 1$, dość uważać wyrażenie $a_{12,12}$ albo stosunek $a_{12,12} : a$, który oznaczać będziemy przez $G$, a który jest niezmiennikiem G a u s s a, dobrze znanym w teoryi powierzchni.

Dla $n = 3$ mamy $N = 6$. W tym przypadku wzory zyskują na symetryi, jeżeli umówimy się, że dwa skaźniki mogą zastępować się wzajemnie, gdy różnica ich jest podzielna przez 3. Wprowadzamy od tej chwili umowę tę raz na zawsze. Elementy układu spółzmienniczego R i e m a n n a, liniowo od siebie niezależne, dają się wtedy sprowadzić do typu $a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2}$, i jeżeli położymy $a^{(rs)} = a_{r+2\, r+2,\, s+1\, s+2} : a$, układ $a^{(rs)}$ będzie spółzmienniczym. Układ ten, który nazywać będziemy u k ł a d e m p r z e c i w z m i e n n i c z y m R i e m a n n a (albo też układ odwrotny $a_{rs}$) może w przypadku $n = 3$ zastępować układ spółzmienniczy $a_{rs,tu}$. To mając, przyjmijmy, że $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ jest jakimkolwiek układem spółzmienniczym i rozważmy jego drugi układ pochodny $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$; mamy wtedy tożsamości:

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}} \tag{23}$$
$$= \sum_1^n {}_l \sum_1^n {}_{p,q}\, a^{(pq)}\, a_{r_{m+1} r_{m+2} r_l p}\, X_{r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m},$$

[1]) Gesammelte Werke, str. 270

[2]) W pracy wyżej cytowanej, Crelle, LXX. Patrz także w tymże tomie rozprawę L i p s c h i t z a: „Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n. Differentialen".



które orzekają, że element $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ nie jest wogólności identyczny z elementem $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$. W szczególności, gdy $n = 2$, wzory (23) można zastąpić wzorami:

$$\sum_1^2 {}_{r,s}\, \varepsilon^{(rs)} X_{r_1 r_2 \ldots r_m rs} = G \cdot \sum_1^m {}_l \sum_1^2 {}_{r,s}\, a^{(rs)} \varepsilon_{r r_l} X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}, \tag{23'}$$

a gdy $n = 3$ — wzorami:

$$\sum_1^3 {}_{s,t}\, \varepsilon^{(rst)} X_{r_1 r_2 \ldots r_m st} = \sum_1^3 {}_{q,s,t}\, a^{(qs)} \alpha^{(rt)} \sum_1^m {}_l\, \varepsilon_{r_l,st} X_{r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m}. \tag{23''}$$

Jeżeli wyrażenie kwadryki zasadniczej daje się sprowadzić do postaci $\sum_1^n {}_i\, dx_i^2$, wtedy układ spółzmienniczy R i e m a n n a jest tożsamościowo zerem, i w tym przypadku wzory (23) orzekają:

„A b y u k ł a d $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ b y ł p i e r w s z y m u k ł a d e m p o c h o d n y m u k ł a d u r z ę d u $m$, j e s t k o n i e c z n e m i d o s t a t e c z n e m, b y e l e m e n t y $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ i $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$ b y ł y i d e n t y c z n e."

---

## § 7.

### *Charakter niezmienniczy równań Rachunku różniczkowego bezwzględnego.*

Równania (6), określające prawo przekształcenia układów spółzmienniczych, wyrażają, że jakikolwiek układ spółzmienniczy jest albo nie jest tożsamościowo zerem, niezależnie od wyboru zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tę to własność możemy wysłowić, mówiąc, że układ równań takich jak:

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = 0, \tag{24}$$

ma charakter niezmienniczy lub bezwzględny. Można to samo powiedzieć o równaniach typu $X^{(r_1, r_2, \ldots, r_m)} = 0$, ale niema potrzeby osobnego rozważania tych ostatnich, albowiem można je sprowadzić do typu (24), przechodząc od układu $X^{(r_1, r_2, \ldots, r_m)}$ do odwrotnego. W samej rzeczy (patrz wzory (8) i (9)) dwa układy odwrotne są albo nie są równocześnie tożsamościowo zerami.

Stawiając sobie e x n o v o pewne zagadnienie, dość przyjąć, że jego elementy określające są wyrażone w zmiennych zupełnie ogólnych i zamiast tworzenia pochodnych zwykłych tworzyć układy pochodne spółzmiennicze (względem wskazanej prawie zawsze przez naturę samego zagadnienia formy zasadniczej), aby równania zagadnienia dały się bez wysiłku przedstawić w postaci niezmienniczej. Jest to—jak to zobaczymy w licznych zastosowaniach—wielka droga, po której postępować tu należy, gdy idzie o teorye ogólne lub gdy mamy na celu wykład systematyczny tych teoryj.

Ale bardzo często, mając już równania $(\varepsilon)$ zagadnienia, wyrażone w pewnych zmiennych $y$, chcemy przekształcić je na równania w zmiennych ogólnych, bez powtarzania dla tych zmiennych działań, które doprowadziły do równań $(\varepsilon)$. Dość w tym celu wyznaczyć w zmiennych ogólnych układ $X$ spółzmienniczy albo przeciwzmienniczy, którego elementy wyrażone w zmiennych $y$, zlewają się—jeżeli pominiemy pewne czynniki — z pierwszemi wyrazami równań $(\varepsilon)$. W samej rzeczy jest widocznem, że skoro przyjmiemy, że drugie strony równań $(\varepsilon)$ są zerami, to otrzymamy wyrażenia przekształcone w spółrzędnych ogólnych, przyrównawszy do zera elementy układu $X$.

Metoda ta wprawdzie nie udaje się we wszystkich przypadkach, ale zato często prowadzi do celu sposobem szybkim i łatwym. Zdarza się to zwłaszczą, jak to zobaczymy, dla równań Fizyki matematycznej, tak że w tym względzie dziwić się należy, iż do osiągnięcia tegoż celu postępowano nieraz po drogach trudnych i powikłanych.

---

ROZDZIAŁ II.

## Geometrya wewnętrzna jako narzędzie Rachunku.[1]

---

### § 1.

***Rzeczy ogólne o układach ortogonalnych kongruencyj w jakiejkolwiek przestrzeni.***

W rozdziale tym używać będziemy języka geometrycznego, rozważając formę zasadniczą $\varphi$ jako $ds^2$ rozmaitości $V_n$ o $n$ wymiarach.

[1]) Porów. Ricci: „Sulla teoria degli iperspazi", Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 24 listop. 1895, także: „Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque". Memorie della R. Acc. dei Lincei, 1896



Niechaj będzie układ równań

$$\frac{dx_1}{\lambda^{(1)}} = \frac{dx_2}{\lambda^{(2)}} = \ldots = \frac{dx_n}{\lambda^{(n)}},$$

gdzie $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ są funkcye zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dane dowolnie, ale regularne i nie znikające wszystkie równocześnie w pewnym obszarze $C$.

Równania te określają w rozmaitości $V_n$ kongruencyę linij, regularną w obszarze $C$; do tego obszaru ograniczymy nasze rozważania.

Jeżeli układ funkcyj $\lambda^{(r)}$ uważać będziemy jako przeciwzmienniczy i jeżeli przypomnimy sobie, że takimże jest układ różniczek zmiennych niezależnych, to wniesiemy stąd, że układ równań (1) jest niezmienniczy. Ponieważ równania te nie zmieniają się, gdy funkcye $\lambda$ pomnożymy przez jeden i ten sam czynnik, załóżmy przeto, że czynnik ten wyznaczono uprzednio w ten sposób, iż

$$\sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)}\, \lambda^{(s)} = \sum_1^n \lambda^{(r)}\, \lambda_r = 1.\text{[1]}) \tag{2}$$

Mówimy, że w tym razie układ $\lambda^{(r)}$ jest układem spółrzędnym przeciwzmienniczym kongruencyi, przedstawionej przez równania (1), i że układ odwrotny $\lambda_r$ jest układem spółrzędnym spółzmienniczym.

Oznaczmy przez $ds$ element łuku jakiejkolwiek linii, należącej do kongruencyi, t. j. wartość dodatnią wielkości $\sqrt{\varphi}$; z wzorów (1) i (2) wynika, że $ds$ jest wartością bezwzględną stosunków (1); będzie tedy wogólności:

$$\pm\frac{dx_r}{ds} = \lambda^{(r)}, \qquad (r=1, 2, \ldots, n) \tag{1'}$$

i jeżeli przyjmiemy, jak to i czynić będziemy w następstwie, znak dodatni, wyznaczymy przez to dla każdego punktu rozmaitości $V_n$ kierunek, który nazwiemy kierunkiem dodatnim linii, należącej do kongruencyi, a przez ten punkt przechodzącej.

Łatwo widzieć, że gdy rozmaitość $V_n$ jest euklidesową, zmienne zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są spółrzędnemi kartezyańskiemi ortogonalnemi, wtedy fun-

[1]) W obszarze rzeczywistym można zawsze zadośćuczynić temu warunkowi, ponieważ zakładamy, że forma zasadnicza jest dodatnia.

kcye $\lambda^{(r)}$ (zlewające się w tym przypadku z funkcyami $\lambda_r$) są dostawami kierunkowemi linij spółrzędnych.

Według definicyi, podanej przez Beltrami'ego dla kąta $\alpha$, utworzonego przez kierunki $dx_r$ i $\delta x_r$, wychodzące z jednego punktu $P$ rozmaitości $V_n$, mamy:

$$\cos\alpha = \frac{\sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs}\, dx_r\, \delta x_s}{\sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s}\,.\,\sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs}\, \delta x_r\, \delta x_s}}\,.$$

Jeżeli mamy dwie kongruencye, określone przez ich układy spółrzędne przeciwzmiennicze $\lambda^{(r)}$ i $\mu^{(r)}$, i jeżeli oznaczymy przez $\alpha$ kąt, utworzony przez linie kongruencyjne, wychodzące z punktu $P$, będzie według tego wzoru i wzorów (1'):

$$\cos\alpha = \sum_{1}^{n}{}_r\, \lambda^{(r)}\, \mu_r\,, \tag{3}$$

(po stronie drugiej być też może albo $\sum_{1}^{n}{}_r\, \mu^{(r)}\, \lambda_r$, albo $\sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)}\, \mu^{(s)}$, albo wreszcie $\sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a^{(rs)}\, \lambda_r\, \mu_s$).

Warunek ortogonalności dwóch kongruencyj przedstawia tedy równanie:

$$\sum{}_r\, \lambda^{(r)}\, \mu_r = 0\,. \tag{3'}$$

Oznaczmy przez $\lambda_{h/r}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ [1]) układy spółrzędne spółzmiennicze $n$ kongruencyj i przyjmijmy, że każde dwie ich linie w każdym punkcie rozmaitości $V_n$ spotykają się pod kątem prostym. Jeżeli przez $\eta_{hh}$ rozumieć będziemy jedność, przez $\eta_{hk}$ $(h \neq k)$ zero, wtedy na zasadzie równań

[1]) Kreska, oddzielająca dwa skaźniki w tym symbolu, ma wskazywać, że mamy tu do czynienia z $n$ układami pojedyńczemi a nie z układem podwójnym; pierwszy ze skaźników indywidualizuje różnemi swemi wartościami różne układy, drugi — elementy tego samego układu.



(2) i (3') wyrażenia $\lambda_{h/r}$ czynić będą zadość równaniom:

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_{k/r} = \eta_{hk}\,, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

które są uogólnieniami równań, zachodzących pomiędzy dostawami kierunkowemi każdych dwóch z pomiędzy $n$ linij ortogonalnych $n$-wymiarowej rozmaitości euklidesowej.

Nazywać będziemy $n$-*kongruencyą* w skróceniu $n$-*ką ortogonalną w rozmaitości* $V_n$ każdy zbiór $n$ kongruencyj, takich, jak dopiero co rozważany; i oznaczać będziemy przez [1], [2], ..., [$n$] kongruencye $n$-ki, przez 1, 2, ..., $n$ linie tych kongruencyj, przechodzące przez punkt jakikolwiek rozmaitości $V_n$; przez $s_1, s_2, \ldots, s_n$ łuki tych linij.

**Wyrażenie układu spółzmienniczego albo przeciwzmienniczego jakiegokolwiek w funkcyi spółrzędnych $n$-kongruencyi ortogonalnej.** Jeżeli mamy jakikolwiek układ spółzmienniczy $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ i $n$-kę ortogonalną zupełnie dowolną [1], [2], ..., [$n$], to można wyznaczyć $n^m$ funkcyj $c_{h_1 h_2 \ldots h_m}$ takich, że zachodzić będą tożsamości:

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \sum_{1}^{n}{}_{h_1, h_2, \ldots, h_m}\, c_{h_1 h_2 \ldots h_m}\, \lambda_{h_1/r_1}\, \lambda_{h_2/r_2} \ldots \lambda_{h_m/r_m}\,. \tag{5}$$

Funkcye te będą też określone i mają wyrażenia:

$$c_{h_1 h_2 \ldots h_m} = \sum_{1}^{n}{}_{r_1, r_2, \ldots, r_m}\, \lambda_{h_1}^{(r_1)}\, \lambda_{h_2}^{(r_2)} \ldots \lambda_{h_m}^{(r_m)}\, X_{r_1 r_2 \ldots r_m}\,, \tag{5'}$$

które orzekają, że są one niezmienniczemi. Przechodząc od wzorów (5) albo (5') do odwrotnych, rozciągamy je z łatwością na układy przeciwzmiennicze.

W szczególności, jeżeli idzie o układ $a_{rs}$ albo $a^{(rs)}$, wtedy z przyczyny równań (4) mamy dla każdej $n$-ki ortogonalnej [1], [2], ..., [$n$] tożsamości:

$$a_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s}\,; \tag{4'}$$

$$a^{(rs)} = \sum_{1}^{n}{}_h\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_h^{(s)}\,. \tag{4''}$$

Wyznaczniki $\| \lambda_{h/r} \|$ i $\| \overset{(r)}{\lambda_h} \|$, które według równań (4) są wyróżnikami dwóch kwadryk odwrotnych, są tedy równe odpowiednio wyrażeniom $\sqrt{a}$ i $1 : \sqrt{a}$ [1]).

Z równań (5) i (5') wyprowadzamy, że każdy układ równań $X_{r_1 r_2 \dots r_m} = 0$ można zastąpić układem $c_{h_1 h_2 \dots h_m} = 0$, t. j. (Rozdział I § 7), t. j. że każdy układ bezwzględny równań może być przekształcony w ten sposób, iż jego wyrazy pierwsze będą niezmiennikami. Często stosujemy z korzyścią to przekształcenie.

Zauważmy jeszcze, że ponieważ $\frac{\partial x_r}{\partial s_h} = \overset{(r)}{\lambda_h}$, oznaczając przeto przez $f$ jakąkolwiek funkcyę zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, mieć będziemy:

(6) $$\sum_1^n {}_r \overset{(r)}{\lambda_h} f_r = \frac{\partial f}{\partial s_h}. \qquad (h=1, 2, \dots, n).$$

**Elementy metryczne rzędu pierwszego.** Własności metryczne linij $1, 2, \dots, n$, będące w związku z tem, co nazywamy zwykle krzywizną krzywych skośnych, są, jak łatwo rozumieć a priori, funkcyami pochodnych układów $\lambda_{h/r}$. Pochodne te nie są wszystkie niezależne; przeciwnie, winny one czynić zadość $\frac{n^2(n+1)}{2}$ równaniom, które otrzymujemy, biorąc pochodne równań (4).

Połóżmy:

(7) $$\gamma_{hkl} = \sum_1^n {}_{rs} \overset{(r)}{\lambda_k} \overset{(s)}{\lambda_l} \lambda_{h/rs}, \qquad (h, k, l = 1, 2, \dots, n)$$

i weźmy pochodne tych równań, stosując prawidło tworzenia pochodnych układów złożonych (Rozdział I, wzory (22')). Znajdujemy najprzód równania, o które idzie, w postaci:

(8) $$\sum_1^n {}_r \overset{(r)}{\lambda_k} \lambda_{h/rs} + \sum_1^n {}_{(r)} \overset{(r)}{\lambda_h} \lambda_{k/rs} = 0, \qquad (h, k, l = 1, 2, \dots, n)$$

i widzimy łatwo, że można je zastąpić następującemi:

(8') $$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0, \qquad (h, k, l = 1, 2, \dots, n),$$

[1]) Równania (4) orzekają, że natura metryczna rozmaitości $V_n$ jest określoną, skoro znamy układy spółrzędne $n$-ki ortogonalnej jakiejkolwiek w rozmaitości $V_n$.



które obejmują w sobie jako przypadek szczególny równania:

(8₁) $$\gamma_{hkl} = 0.$$

Liczba niezmienników $\gamma_{hkl}$ wzajemnie niezależnych równa się tedy $\frac{n^2(n-1)}{2}$, a ponieważ ta liczba równa się różnicy liczb $n^3$ i $\frac{n^2(n+1)}{2}$, z których pierwsza jest liczbą pochodnych wyrażeń $\lambda_{h/r}$, druga zaś liczbą związków pomiędzy temi pochodnemi zachodzących, można przeto będzie przedstawić wyrażenia $\lambda_{h/rs}$ w funkcyi wyrażeń $\lambda_{h/r}$ i niezmienników $\gamma$. Rozwiązując równanie (7), otrzymujemy istotnie wyrażenia te w postaci:

(7') $$\lambda_{h/rs} = \sum_1^n {}_{i,j} \gamma_{hij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s}.$$

Aby zbadać tedy własności metryczne linij $1, 2, \dots, n$, dość będzie zwrócić uwagę na niezmienniki $\gamma_{hij}$; w samej rzeczy, wiążą się one z temi własnościami przy pomocy związków bardzo ścisłych i bardzo prostych. Nie zatrzymując się nad szczegółowem badaniem znaczenia geometrycznego albo kinematycznego każdego z niezmienników $\gamma$, powiemy tylko tyle, ile potrzeba dla zastosowań, o których niżej mowa. Dodajemy jeszcze, że niezmienniki $\gamma$ ze względu na ich znaczenie kinematyczne, nazwiemy s p ó ł c z y n n i k a m i  o b r o t u $n$-ki [1], [2], ..., [$n$].

## § 2.

### *Pochodne wewnętrzne i związki pomiędzy niemi.*

Ustanowimy przedewszystkiem związki, zachodzące pomiędzy pochodnemi takiemi, jak $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial s_h}$ i $\frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial f}{\partial s_k}$, albowiem nie można odwracać działań, przedstawionych przez symbole $\frac{\partial}{\partial s_h}$ i $\frac{\partial}{\partial s_k}$. W samej rzeczy, wziąwszy pochodne obu stron tożsamości (6), mamy najprzód:

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial s_h}=\sum_1^n{}_r\,\lambda_h^{(r)}\,f_{rs}+\sum_1^n{}_r\,f^{(r)}\,\lambda_{h|rs}$$

i dalej:

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}=\sum_1^n{}_s\,\lambda_k^{(s)}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial s_h}=\sum_1^n{}_{rs}\,\lambda_h^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,f_{rs}+\sum_1^n{}_{rs}\,f^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,\lambda_{h|rs}\,,$$

lub jeszcze, uwzględniając tożsamości

$$\sum_1^n{}_s\,\lambda_k^{(s)}\,\lambda_{h|rs}=\sum_1^n{}_i\,\gamma_{hik}\,\lambda_{i|r}\,,\qquad \sum_1^n{}_{r,s}\,f^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,\lambda_{h|rs}=\sum_1^n{}_i\,\lambda_{hik}\,\frac{\partial f}{\partial s_i}\,,$$

wynikające z równań (4), (6) i (7′):

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}=\sum_1^n{}_{r,s}\,\lambda_h^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,f_{rs}+\sum_1^n{}_i\,\gamma_{hik}\,\frac{\partial f}{\partial s_i}\,.$$

Nakoniec z tych ostatnich równań, wyprowadzamy szukane związki w postaci:

(9) $$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}-\frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k}=\sum{}_i\,(\gamma_{ikh}-\gamma_{ihk})\,\frac{\partial f}{\partial s_i}\,.$$

---

## § 3.

### *Kongruencye normalne i geodozyjne. Rodziny izotermiczne powierzchni. Układ kanoniczny dla kongruencyi danej.*

**Kongruencye normalne.** Powiadamy, że kongruencya linij, nakreślonych w rozmaitości $V_n$, jest normalną, jeżeli tworzy się z trajektoryj ortogonalnych do rodziny powierzchni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$ w rozmaitości $V_n$. Obierzmy w $n$-kongruencyi ortogonalnej kongruencyę $[n]$ i postarajmy się wyznaczyć warunki konieczne i dostateczne na to, aby ta kongruencya była normalną.



Potrzeba i wystarcza do tego, oczywiście, aby każdy kierunek $\delta x_r$ normalny do jakiejkolwiek linii $n$ należał do powierzchni $f = 0$, t. j. aby było:

$$\sum_1^n{}_r\,\frac{\partial f}{\partial x_r}\,\delta x_r=0\,.$$

Innemi słowy, warunki, o które nam idzie, są zarazem warunkami koniecznemi i dostatecznemi na to, aby równaniom

$$X_h\,(f)=\sum_1^n{}_r\,\lambda_h^{(r)}\,f_r=0\,,\qquad (h=1,2,\ldots,n-1)$$

czyniła zadość funkcya $f$, t. j. aby układ tych równań był zupełnym. Możemy przeto wyrazić, że (dla $h, k = 1, 2, \ldots, n$) wyrażenia:

$$(X_h\,X_k)\,f=X_h\,X_k\,(f)-X_k\,X_h\,(f)$$

są funkcyami liniowemi wyrażeń $X_h\,(f)$.

Mamy:

$$X_h\,X_k\,(f)=\sum_1^n{}_r\,\lambda_h^{(r)}\sum_1^n{}_s\,(\lambda_k^{(s)}\,f_{sr}+f^{(s)}\,\lambda_{k|sr})\,,$$

albo też, ponieważ na mocy równań (8) i (7′) jest $\sum_1^n \lambda_h^{(r)}\,\lambda_{k|sr}=-\sum_1^n{}_i\,\gamma_{ikh}\,\lambda_{i|s}$,

$$X_h\,X_k\,(f)=\sum_1^n{}_{rs}\,\lambda_h^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,f_{sr}-\sum_1^{n-1}\gamma_{ikh}\,X_i\,(f)-\gamma_{nkh}\,\frac{\partial f}{\partial s_n}\,;$$

będzie tedy:

$$X_h\,X_k\,(f)-X_k\,X_h\,(f)=\sum_2^{n-1}{}_i\,(\gamma_{ihk}-\gamma_{ikh})\,X_i\,(f)+(\gamma_{nhk}-\gamma_{nkh})\,\frac{\partial f}{\partial s_n}\,.$$

Ponieważ wyrażenie $\frac{\partial f}{\partial s_n}$ jest niezależne od wyrażeń $X_h\,(f)$, $(h=1,2,\ldots,n-1)$, przeto znaleziona tożsamość orzeka, że:

Warunki konieczne i dostateczne na to, aby kongruencya $[n]$ była normalna, wyrażają równania:

(10) $$\gamma_{nhk} = \gamma_{nkh}, \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n-1),$$

których liczba wynosi $\dfrac{(n-1)\,(n-2)}{2}$.

Mamy tedy także:

„Jeżeli wszystkie kongruencye $n$-ki ortogonalnej są normalne, wszystkie wyrażenia $\gamma_{hkl}$ o trzech skaźnikach różnych są zerami, i odwrotnie.“

Ponieważ nie powiedziano nic określonego o wyborze kongruencyj $[1], [2], \dots, [n-1]$, tworzących wraz z kongruencyą $[n]$ $n$-kę ortogonalną, przeto równania (9), gdy zważymy ich znaczenie geometryczne, mają charakter niezmienniczy nietylko wobec wszystkich możliwych przekształceń spółrzędnych lecz także wobec wszystkich możliwych zmian $n-1$ kongruencyj $[1], [2], \dots, [n-1]$, tworzących z $[n]$ $n$-kongruencyę ortogonalną.

Skoro warunki (10) są spełnione, wyrażenia $\lambda_{n/r}$ są proporcyonalne do pochodnych $f_r$ jednej funkcyi, t. j. można będzie wyznaczyć spółczynnik $\mu$ tak, aby wyrażenia $f_r = \mu \lambda_{n/r}$ czyniły zadość równaniom $f_{rs} = f_{sr}$. Ponieważ na mocy równań (7′) jest:

(11) $$f_{rs} = \mu_s \lambda_{n/r} + \mu \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, \gamma_{nij}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s},$$

przeto, jeżeli położymy:

(12) $$\psi = \log \mu;$$

funkcya nieoznaczona $\psi$ powinna czynić zadość równaniom:

$$\psi_s \lambda_{n/r} + \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, \gamma_{nij}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s} = \psi_r\, \lambda_{n/s} + \sum_{1}^{n}{}_{i,j}\, \gamma_{nij}\, \lambda_{i/s}\, \lambda_{j/r}.$$

Mnożąc je przez $\lambda_{n}^{(s)}$, wstawiając $s = 1, 2, \dots, n$, dodając do siebie i uwzględniając równania (4) i (9), można, zamiast nich, wziąć układ równoważny:

(13) $$\psi_r = \nu \lambda_{n/r} + \sum_{1}^{n-1}{}_{i}\, \gamma_{nin}\, \lambda_{i/r},$$

gdzie $\nu$ jest nieoznaczone.



**Rodziny izotermiczne powierzchni.** Powiadamy, że rodzina powierzchni $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$ const. jest izotermiczną w rozmaitości $V_n$ i że $f$ jest jej parametrem termometrycznym, jeżeli ta funkcya czyni zadość równaniu:

(14) $$\sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a^{(rs)} f_{rs} = 0\,[1].$$

Można uważać rodzinę powierzchni za zindywidualizowaną, skoro znamy kongruencyę jej trajektoryj ortogonalnych; innemi słowy, znaczy to, że każda rodzina powierzchni może być przedstawiona przez układ $\lambda_{n/r}$, czyniący zadość równocześnie równaniu algebraicznemu (2) i równaniom (10) o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Postarajmy się wyznaczyć warunki konieczne i dostateczne na to, aby ta rodzina była izotermiczną, a następnie, skoro te warunki spełniają się, postarajmy się znaleść parametry termometryczne.

Podstawiając we wzorze (14) wyrażenia $f_{rs}$, dane przez wzory (11), możemy zamiast wzoru (14) napisać wzór równoważny:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_n} = -\sum_{1}^{n}{}_{i}\, \gamma_{nii},$$

co prowadzi do następującego wyrażenia na nieoznaczone $\nu$ z wzoru (13):

(15) $$\nu = -\sum_{1}^{n-1}{}_{i}\, \gamma_{nii}.$$

Aby rodzina powierzchni, mających linie $n$ za trajektorye ortogonalne, była izotermiczna, potrzeba tedy i wystarcza, aby, po wstawieniu za $\nu$ wyrażenia (15), drugie strony równań (13) składały się z pochodnych funkcyi $\psi$ wziętych względem $x_r$; poczem i wyrażenia $f_r = Ce^{\psi} \lambda_{n/r}$ będą też pochodnemi funkcyi $f$ względem tychże zmiennych, a wyrażenie:

$$f = C \int e^{\psi} \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_{n/r}\, dx_r + c,$$

---

[1]) Zobaczymy dalej, że równanie to jest identyczne z równaniem dla funkcyj harmonicznych.

gdzie $C$ i $c$ są stałe dowolne, będzie najogólniejszem wyrażeniem parametrów termometrycznych rozważanej rodziny.

Łatwo następnie poznajemy, że warunki całkowalności równań (13) przedstawione są przez równania:

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \nu}{\partial s_h} + \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \nu\, \gamma_{hnn} + \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn}\,(\gamma_{ihn} - \gamma_{inh}) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} + \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn}\, \gamma_{ihk} = \dfrac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h} + \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn}\, \gamma_{ikh}\,. \end{cases}$$

$$[h, k = 1, 2, \ldots, n-1].$$

Jeżeli kongruencye $[1], [2], \ldots, [n]$ są wszystkie normalne, t. j. jeżeli są przecięciami powierzchni $n$ rodzin ortogonalnych w rozmaitości $V_n$, wtedy równania te sprowadzają się do postaci prostszej:

$$(15')\qquad \frac{\partial \nu}{\partial s_h} + \frac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \nu\, \gamma_{hnn} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} = \frac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h}\,.$$

**Kongruencye geodezyjne** [1]). Mówiąc, że linia jest geodezyjną w rozmaitości $V_n$, dla której $ds^2$ danem jest przez formę zasadniczą $\varphi$, oznaczamy przez to, że waryacya pierwsza całki

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s}\,,$$

rozciągniętej wzdłuż tej linii, jest zerem. Warunki na to, aby wszystkie linie $n$ były geodezyjnemi (mówić będziemy wtedy, że kongruencya $[n]$ jest geodezyjną) wyrażają się równaniami:

$$(16)\qquad \gamma_{inn} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

które mają te same charaktery niezmiennicze, jakie zaznaczyliśmy dla równań (10). W szczególności, jeżeli przestrzeń jest euklidesowa, równania (16) dają nam charakterystyki wewnętrzne kongruencyj prostoliniowych.

**Krzywizna geodezyjna kongruencyi.** Jeżeli kongruencya $[n]$ nie jest geodezyjna i jeżeli uważać będziemy rozmaitość $V_n$, jako zawartą w przestrzeni euklidesowej $S_{n+m}$, można będzie krzywiznę geodezyjną linii $[n]$ w jakimkolwiek punkcie $P$ rozmaitości $V_n$ wyznaczyć w sposób następujący. Poprowadźmy przez punkt $P$ w przestrzeni $S_{n+m}$ wektor styczny do rozmaitości $V_n$, którego długość dana jest przez wzór $\gamma^2 = \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma^2_{inn}$, kierunek zaś przez kierunek stycznej do linii, przechodzącej przez punkt $P$ i należącej do kongruencyi, której układem spółrzędnym spółzmienniczym jest $\mu_r = \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn}\, \lambda_{i|r}$. Wektor ten ma własności następujące: 1) znika tożsamościowo, gdy kongruencya $n$ jest geodezyjną; 2) rzut jego na płaszczyznę styczną do linij $i$ i $n$ równa się krzywiźnie rzutu linii $n$ na tęż płaszczyznę; 3) jest normalny do linij $n$. Z przyczyny tych własności wektorowi temu nadajemy nazwę k r z y w i z n y g e o d e z y j n e j, a linie kongruencyi, mającej $\mu_r$ jako układ spółrzędny spółzmienniczy, nazwiemy l i n i a m i k r z y w i z n y g e o d e z y j n e j kongruencyi $n$.

**Układy kanoniczne względem kongruencyi danej.** Mając daną kongruencyę $[n]$, można nieskończenie wieloma różnemi sposobami przyłączyć do niej $n-1$ kongruencyj, tak, aby wraz z $[n]$ utworzyły $n$-kę ortogonalną w rozmaitości $V_n$. Pomiędzy temi układami $n-1$ kongruencyj ortogonalnych jedna do drugiej i do kongruencyi $[n]$, istnieje jeden lub więcej układów, które określamy niżej i nazywamy układami kanonicznemi względem kongruencyi $[n]$.

Położmy $2X_{rs} = \lambda_{n|rs} + \lambda_{n|sr}$ i rozwsżmy układ równań algebraicznych:

$$(17)\qquad \sum_1^n{}_r\, \lambda_{n|r}\, \lambda^{(r)} = 0; \quad \lambda_n \cdot \mu + \sum_1^n{}_r\, (X_{qr} + \omega a_{qr})\, \lambda^{(r)} = 0\,; \qquad (q = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $\mu, \omega, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ są nieoznaczone. Jest to układ $n+1$ równań liniowych i jednorodnych względem niewiadomych $\mu, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$, a wyznacznik jego, przyrównany do zera, daje nam równanie stopnia $n-1$ względem $\omega$:

$$(18)\qquad \Delta(\omega) = 0,$$

którego wszystkie pierwiastki są rzeczywiste. Oznaczmy te pierwiastki przez $\omega_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ i przyjmijmy najprzód, że są wszystkie pojedyncze. Jeżeli w układzie (17) położymy $\omega = \omega_h$ i przyłączymy do tego układu równanie (2), niewiadome $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ dadzą się wyznaczyć aż do znaku. Wartości ich, które oznaczymy przez $\lambda_h^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, są ele-

[1]) Patrz Ricci: „Dei sistemi di congruenze ortogonali etc.“ § 5 i także: „Lezioni sulla teoria della superficie“. Część I, Rozdział IV.

mentami układu spółrzędnego spółzmienniczego kongruencyi $[h]$, a kongruencye $[1], [2], \ldots, [n-1]$, które są ortogonalne jedna do drugiej i do kongruencyi $[n]$, są elementami układu ortogonalnego kanonicznego względem tej ostatniej. W tym przypadku tedy układ jest zupełnie wyznaczony.

Jeżeli pierwiastki równania (18) są wszystkie równe, wtedy każdy układ $n-1$ kongruencyj, tworzących wraz z $[n]$ $n$-kę ortogonalną, czyni zadość równaniom (17) i może być uważany za układ kanoniczny względem $[n]$.

W ogólności, niechaj $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ będą pierwiastki różne równania (18), $p_1, p_2, \ldots, p_m$ rzędy ich wielokrotności; połóżmy w równaniach (17) $\omega = \omega_h$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$. Można wyznaczyć $p_h$ kongruencyj ortogonalnych jedna do drugiej i takich, że elementy ich układów spółrzędnych przeciwzmienniczych są rozwiązaniami równań (17). W grupie $\Delta_h$ tych kongruencyi istnieje nawet wszelka dowolność, należąca do podstawienia ortogonalnego rzędu $p_h$, t. j. dowolność. przedstawiona przez $p_h \cdot (p_h - 1) : 2$ funkcyj dowolnych. Ponieważ kongruencye, wchodzące do grup $\Delta_h$ i $\Delta_k$, są także do siebie ortogonalnemi, otrzymujemy tedy $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n-1$ kongruencyj, tworzących wraz z $[n]$ $n$-kę ortogonalną. I w tym przypadku kongruencye $[1], [2], \ldots, [n-1]$ są elementami układu ortogonalnego kanonicznego względem kongruencyi $[n]$, lecz układ nie jest ani zupełnie wyznaczony, ani zupełnie dowolny. Zawiera on funkcye dowolne, których liczba równa się $\sum_1^m {}_h\, p_h\,(p_h - 1) : 2$.

Spółczynniki obrotu $n$-ki ortogonalnej, gdy $[1], [2], \ldots, [n-1]$ są elementami układu kanonicznego względem $[n]$, są związane ze sobą związkiem charakterystycznym:

$$\gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0. \tag{19}$$

Z zestawienia tych równań z równaniami (10) wyprowadzamy, że, gdy kongruencya $[n]$ jest normalną, spółczynniki $\gamma_{nhk}$ (dla $h \neq k$) są wszystkie zerami w układzie ortogonalnym kanonicznym względem $[n]$. W tym przypadku kongruencye, należące do układu, mają bardzo proste znaczenie geometryczne: składają się z linij krzywiznowych powierzchni ortogonalnych do linij $n$[1]).

Można dać dość prostą interpretacyę geometryczną układu ortogonalnego kanonicznego względem jakiejkolwiek danej kongruencyi, skoro

[1]) Niektórzy geometrowie badali krzywiznę powierzchni w nadprzestrzeniach; dość tu przypomnieć rozprawę zasadniczą Lipschitza „Entwickelungen einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von Differentialen". Crelles Journal, LXXI, 1870.



rozmaitością zasadniczą jest przestrzeń euklidesowa o trzech wymiarach [1]). Możnaby nawet rozciągnąć tę interpretacyę i na rozmaitość $V_n$ jakiejkolwiek natury, ale nie możemy tu zatrzymywać się nad temi szczegółami i przechodzimy do innych rozważań.

---

## § 4.

### *Własności spółczynników obrotów i związek z teoryą trójścianu ruchomego według p. Darboux.*

Widzieliśmy w § 2, że dla każdej $n$-ki mamy $\frac{n^2(n-1)}{2}$ spółczynników obrotu, algebraicznie od siebie niezależnych. Spółczynniki te nie są od siebie niezależnemi z punktu widzenia funkcyjnego; przeciwnie, winny one czynić zadość równaniom różniczkowym rzędu 1-go, które otrzymujemy łatwo, biorąc raz jeszcze pochodne równań (7') i eliminując pochodne wyrażeń $\lambda_{h/r}$ przy pomocy tych samych równań i równań (23) Rozdziału pierwszego.

Kładąc:

$$\gamma_{hi,kl} = \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_l} - \frac{\partial \gamma_{hil}}{\partial s_k} + \sum_1^n {}_j \left\{\gamma_{hij}(\gamma_{jkl} - \gamma_{jlk}) + \gamma_{jhl}\gamma_{jik} - \gamma_{jkh}\gamma_{jil}\right\}, \tag{20}$$

dochodzimy tym sposobem do równań:

$$\gamma_{hi,kl} = \sum_1^n {}_{q,r,s,t}\, \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qr,st}, \tag{21}$$

które wraz z równaniami (8') dają warunki konieczne i dostateczne na to, aby $n^3$ funkcyj danych $\gamma_{hki}$ można było uważać za spółczynniki obrotu $n$-ki ortogonalnej w rozmaitości $V_n$, dla której $ds^2$ wyraża się formą zasadniczą.

Dla $n = 2$ mamy jeden tylko wzór (21), który daje się sprowadzić do postaci:

[1]) Porówn. Levi-Civita. „Sulle congruenze di curve". Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 5 marca, 1891.

$$(21_1)\qquad \frac{\partial\gamma_{121}}{\partial s_2}+\frac{\partial\gamma_{212}}{\partial s_1}=\gamma^2_{121}+\gamma^2_{212}+G.$$

Jest to wzór, dobrze znany w teoryi powierzchni, gdyż $\gamma_{121}$ i $\gamma_{212}$ są krzywiznami geodezyjnemi linij 1 i 2.

Dla $n=3$, kładąc:

$$(22)\qquad \gamma_{hk}=\gamma_{h+1\,h+2,\,k+1\,k+2}\,,$$

można równanie (21) zastąpić równaniami:

$$(21_2)\qquad \gamma_{hk}=\sum_{1}^{n}{}_{r,s}\,\lambda_h^{(r)}\lambda_k^{(s)}\,a_{rs}\,,$$

które dają w szczególności $\gamma_{hk}=\gamma_{kh}$.

Równania (21) wogóle, będąc związane z układem spółzmienniczym Riemanna, są też ściśle związane z naturą metryczną rozmaitości $V_n$.

Równania te są tylko uogólnieniem równań, które zachodzą pomiędzy składowemi $p, q, r$ obrotów w teoryi trójścianu ruchomego [1]). W samej rzeczy, jeżeli przyjmiemy, że rozmaitość $V_n$ zlewa się z przestrzenią euklidesową o trzech wymiarach, wtedy styczne do linij 1, 2, 3 wyznaczają w każdym punkcie tej przestrzeni trójścian trójprostokątny. Niezmienniki $\gamma_{ihk}$ wzajemnie niezależne dają nam wtedy obroty $p_i, q_i, r_i$ $(i=1, 2, 3)$, odnoszące się do przemieszczeń nieskończenie małych wzdłuż linij 1, 2, 3. Wzory, które dla tego przypadku wyprowadzamy z wzorów (21), są nawet ogólniejsze od znanych ogólnie, albowiem opierają się jedynie na założeniu, że kongruencye [1], [2], [3], . . . są normalne [2]).

Można widzieć na tym przykładzie, w jaki sposób metody Rachunku różniczkowego bezwzględnego ogólnością swoją obejmują w sobie rozmaite znane postępowania i ich pożytki.

---

[1]) Darboux: „Leçons sur la théorie des surfaces", t. I, Chop V i także Königs: „Leçons de Cinématique", Chap. X, oraz nota pp. E i F. Cosserata: „Sur la cinématique dans les milieux continus", pomieszczona w tychże „Lekcyach".

[2]) Levi-Civita: „Tipi di potentiali, che si possono far dipendere da due sole coordinate". Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, XLIX, 1889, § 4.



## § 5.

### *Wyrażenia kanoniczne układów przyłączonych do formy zasadniczej.*

W badaniu zagadnień Geometryi, Fizyki, Mechaniki analitycznej i t. d. dochodzimy prawie zawsze do układów równań, mających charakter niezmienniczy (patrz § 7 Rozdziału pierwszego), w których, obok spółczynników formy zasadniczej, napotykamy elementy jednego lub kilku układów pojedyńczych i podwójnych oraz ich pochodnych. Dla ustalenia myśli ograniczymy się tu do jednego tylko układu przyłączonego.

Przyjmijmy najprzód, że tym układem jest układ pojedyńczy $X_r$; niechaj odpowiada mu kongruencya $[n]$, określona przez równania:

$$\frac{dx_1}{X^{(1)}}=\frac{dx_2}{X^{(2)}}=\ldots=\frac{dx_n}{X^{(n)}}\,;$$

układ spółrzędny spółzmienniczy dla niej składać się tu będzie z elementów

$\lambda_{n/r}=X_r:\varrho$, gdzie $\varrho^2=\sum_1^n{}_r\,X^{(r)}X_r$. Powiadamy, że wzory:

$$(23)\qquad X_r=\varrho\lambda_{n/r}$$

dają nam wyrażenia kanoniczne układów $X_r$.

Wychodząc z tych układów kanonicznych, postępujemy w ten sposób.

Do kongruencyi $[n]$ przyłączamy $n-1$ kongruencyj, stanowiących z nią $n$-kę ortogonalną (w tym przypadku jest pożytecznem korzystanie z układu albo z jednego z układów kanonicznych względem kongruencyi $[n]$). Przekształcamy następnie równania zagadnienia, podstawiając odpowiednio zamiast $a_{rs}$ i $X_r$ ich wyrażenia, dane przez wzory (4') i (22), a zamiast pochodnych—elementy układów, otrzymanych przez tworzenie niezmiennicze pochodnych według formy zasadniczej.

Otrzymujemy tym sposobem układ równań, będący w ścisłym związku z elementami istotnemi zadania, układ, którego interpretacya geometryczna, prawie zawsze łatwa i naturalna, charakteryzuje go w sposób jasny i dogodny. Układ ten daje nam też często wskazówki bardzo korzystne przy całkowaniu, albowiem unaocznia prawie układ zmiennych niezależnych, jaki obrać należy, aby otrzymać, gdy to jest możliwe, równania całkowe. W tym przypadku wracamy ostatecznie do znakowań zwykłych i otrzymujemy rozwiązania kanoniczne zagadnienia.

Metody te—wyznajemy to sami—nie mogą rościć sobie pretensyi do usuwania zasadniczych trudności w pytaniach, do których je stosujemy.

Przeciwnie, prowadzą one tylko do przekształceń, pozostawiając wszystkie te trudności. Uczą one nas jedynie unikania przeszkód przypadkowych, a to jedno sprawia często, że wyszedłszy z układu równań dość skomplikowanego, dochodzimy do układu kanonicznego, bardzo prostego i doskonale nadającego się do traktowania. Otrzymujemy wówczas wyniki interesujące i niespodziewane tam właśnie, gdzie metody zwyczajne prawie napewno chybiają.

Jeżeli idzie o układ podwójny symetryczny $a_{rs}$, wtedy zwracamy się do równań:

$$\sum_{1}^{n}{}_{s}\,(a_{rs}-\varrho\, a_{rs})\,\lambda^{(s)}=0, \qquad (r=1,2,\ldots,n) \text{ [1]}. \tag{23}$$

Eliminując $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$, dochodzimy do równania stopnia $n$ względem $\varrho$ o dobrze znanych własnościach. Wszystkie jego pierwiastki $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ są rzeczywiste, a podstawienie ich zamiast $\varrho$ w równaniach (23) prowadzi w każdym przypadku do wyznaczenia jednej lub kilku $n$-kongruencyj ortogonalnych [1], [2], ..., [$n$], takich, że elementy układu danego otrzymują wyrażenia kanoniczne:

$$a_{rs}=\sum_{1}^{n}{}_{h}\,\varrho_h\,\lambda_{h/r}\,\lambda_{h/s}\,.$$

Wyszedłszy z tych wyrażeń, przekształcamy równania zagadnienia i dochodzimy często do jego rozwiązań kanonicznych sposobem zupełnie analogicznym do sposobu, wskazanego w przypadku układów pojedyńczych.

Zobaczmy teraz, jakie są prawidła ogólne, dające się z rozważanych przykładów wyprowadzić dla układu rzędu jakiegokolwiek.

Widzieliśmy (§ 1), że elementy jakiegokolwiek układu spółzmienniczego rzędu $m$ wyrazić się dają jako funkcye jednorodne stopnia $m$ elementów układów spółrzędnych $n$-ki dowolnej, którą odtąd nazywać będziemy $n$-ką **odniesienia**. Aby otrzymać wyrażenia kanoniczne elementów układu pojedyńczego $X_r$, wybraliśmy w przykładzie pierwszym tę $n$-kę w ten sposób, aby we wzorach ogólnych:

$$X_r=\sum_{1}^{n}{}_{h}\,c_h\,\lambda_{h/r}\,,$$

[1]) Ricci: Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville, § 2 Atti del R. Ist. Ven. di Sc., Let. ed Arti. 1894; także Levi-Civita: Sulla transformazione delle equazioni dinamiche, § 7, Annali di Matematica, 1896.



było

$$c_1=c_2=\ldots=c_{n-1}=0\,.$$

W przykładzie zaś drugim zredukowaliśmy elementy $a_{rs}$ do ich wyrażeń kanonicznych, obierając $n$-kę odniesienia w ten sposób, aby we wzorach:

$$a_{rs}=\sum_{1}^{n}{}_{h,k}\,c_{hk}\,\lambda_{h/r}\,\lambda_{k/s}$$

było

$$c_{hk}=0\,, \qquad (h \neq k).$$

W ogólności, jeżeli mamy do czynienia z układem spółzmienniczym rzędu $m$, jest rzeczą ważną, abyśmy przedewszystkiem zredukowali elementy do dobrze obranych wyrażeń kanonicznych przez najodpowiedniejszy wybór $n$-ki odniesienia, poczem, dla ustanowienia równań wewnętrznych zagadnienia, stosujemy sposoby proste i jednolite.

---

ROZDZIAŁ III.

# Zastosowania analityczne.

## § 1.

### *Klasyfikacya form kwadratowych różniczek* [1]).

Niechaj $\varphi$ będzie formą kwadratową różniczek $n$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zasadniczo dodatnią. Wybrawszy w odpowiedni sposób $n+\mu$ funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_{n+\mu}$ zmiennych $x$, można zawsze (dla $\mu$ dostatecznie wielkiego) uczynić zadość równaniu:

$$\varphi=dy_1^2+dy_2^2+\ldots+dy_n^2+\ldots+dy_{n+\mu}^2\,.$$

Najmniejsza wartość $m$ liczby $\mu$, dla której ta równość jest możliwa, może zmieniać się od 0 do $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$. Mamy tym sposobem kryteryum za-

[1]) Por. Ricci: „Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche". Ann., di Matematica (2), t. XII, albo „Lezioni etc.", Rozdz. V.

sadnicze klasyfikacyi form $\varphi$. Liczba $m$ nazywa się klasą formy odpowiedniej; nie może ona przekraczać liczby $\frac{n(n-1)}{2}$. Tak np. formy dwójkowe ($n=2$) są albo klasy zero, albo klasy pierwszej.

Formy klasy 0 (o jakiejkolwiek liczbie zmiennych) charakteryzuje fakt, że układ Riemanna (patrz § 6) jest dla nich tożsamościowo zerem. Dla form klasy pierwszej mamy twierdzenie:

Aby forma $\varphi$ była klasy pierwszej, jest koniecznem i dostatecznem, by można było wyznaczyć układ podwójny symetryczny $b_{rs}$ taki, że:

1) $a_{rt,su} = b_{rs} b_{tu} - b_{ru} b_{ts}$,

2) układ $b_{rst}$ (pochodny spółzmienniczy względem $\varphi$) jest symetryczny[1]).

Skoro warunki te są spełnione, funkcye $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ dają się wyznaczyć jako całki pewnego układu zupełnego.

Dla form klas wyższych można dowieść twierdzenia analogicznego. Lecz nie zatrzymujemy się nad tym przedmiotem, a zwracamy się do innego ważnego zastosowania Rachunku różniczkowego bezwzględnego.

## § 2.

### *Niezmienniki bezwzględne. Uwagi geometryczne. Parametry różniczkowe.*

Badania klasyczne Jacobi'ego, Lamé'go i Beltrami'ego, którym zawdzięczamy wprowadzenie do analizy niezmienników, znanych pod nazwą parametrów różniczkowych, mają podstawę swoją w rozważaniu waryacyi pierwszej pewnych całek. Środek ten—mimo swej wytworności i dowcipu—prowadzi nas do metod pośrednich i bardzo dalekich od tych, które zdaje się nasuwać sama natura zagadnienia.

W istocie zagadnienie to zawiera się w następującym problemacie ogólnym, będącym ostatecznie tylko zagadnieniem o eliminacyi algebraicznej:

[1]) Powiadamy, że układ wielokrotny jest symetryczny, skoro jego elementy, odpowiadające tej samej kombinacyi skaźników, są identyczne.

[2]) Patrz Ricci: „Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali". Ann. di Mat. (2), XIV, 1886; „Lezioni etc.", Rozdz. V. Porówn. Levi-Civita: „Sugli invarianti assoluti". Att. del Ist. Ven., 1894.



Mając daną formę kwadratową określoną $\varphi$ i jakąkolwiek liczbę układów przyłączonych $S$ (spółzmienniczych albo przeciwzmienniczych, wyznaczyć wszystkie niezmienniki bezwzględne, które można utworzyć ze spółczynników formy $\varphi$, oraz elementy układów $S$ i pochodne jednych i drugich aż do rzędu $\mu$, z góry ustalonego.

Gdyby nie potrzeba było rozważać pochodnych, byłoby to zagadnienie dobrze znane, dla którego wystarcza zwrócenie się do teoryi form. Wprowadzenie pochodnych na pierwszy rzut oka pozornie komplikuje bardzo poszukiwania. Na szczęście tak nie jest. Rachunek różniczkowy bezwzględny sprowadza nas zawsze do tegoż zagadnienia, skoro pochodne zwykłe zastąpimy elementami układów, powstałych z układów danych przez tworzenie spółzmiennicze pochodnych względem formy $\varphi$. Mówiąc dokładniej, mamy twierdzenie:

Aby otrzymać wszystkie niezmienniki różniczkowe bezwzględne rzędu $\mu$, dość wyznaczyć niezmienniki algebraiczne układu form następujących:

1) formy zasadniczej $\varphi$;

2) form przyłączonych $S$ i ich pochodnych aż do rzędu $\mu$;

3) (dla $\mu > 1$) formy czworoliniowej, której spółczynniki są elementami układu Riemanna i jej form pochodnych aż do rzędu $\mu-2$.

Jeżeli nazwiemy niezmiennikami właściwemi formy $\varphi$ niezmienniki, zależne jedynie od spółczynników formy $\varphi$ i jej pochodnych, to z poprzedzającego twierdzenia będzie można wyprowadzić dwa wnioski, a mianowicie:

Formy klasy 0 nie posiadają wcale niezmiennika różniczkowego właściwego.

Formy klasy wyższej nie posiadają niezmienników różniczkowych rzędu pierwszego; ich niezmienniki różniczkowe rzędu $\mu > 1$ są niezmiennikami form 1), 3).

Wyniki te przybierają oczywiście postać prostszą dla form dwójkowych i trójkowych. Dla $n=2$ (patrz Rozdz. I, § 6) zamiast układu Riemanna można podstawić niezmiennik $G$ Gaussa, który jest jedynym niezmiennikiem rzędu 2-go właściwym form dwojkowych.

Należy tu zauważyć, że gdy uważamy formę $\varphi$ jako $ds^2$ dla pewnej powierzchni, to wartość $G$ jest iloczynem odwrotności promieni głównych krzywizny i dlatego $G$ nazywa się także krzywizną całkowitą formy $\varphi$. Na zasadzie poprzedzającego możemy twierdzić, że $G=0$ daje warunek konieczny i dostateczny na to, aby forma dwójkowa $\varphi$ była klasy zero. W języku geometrycznym wyraża to dobrze znane twierdzenie, że powierzchnie rozwijalne są jedynemi, dającemi się rozwinąć na płaszczyznę. Dla $G=0$ nasza forma dwójkowa nie ma widocznie niezmienników właściwych; wogólności:

Niezmienniki właściwe formy dwójkowej aż do rzędu jakiegokolwiek $\mu>2$ otrzymujemy, wyznaczając niezmienniki bezwzględne algebraiczne wspólne formie $\varphi$ i formom, których spółczynnikami są pochodne spółzmiennicze niezmiennika $G$ aż do rzędu $\mu-2$.

Wynik ten zawiera się implicite w jednej z rozpraw Casorati'ego[1]).

Dla $n=3$ można zamiast układu spółzmienniczego Riemanna rozważać układ przeciwzmienniczy podwóiny $a^{(rs)}$ albo odwrotny $\alpha_{rs}$; jest tu odrazu jasnem, że warunki $\alpha_{rs}=0$ są równocześnie konieczne i dostateczne na to, aby forma trójkowa była klasy 0 Gdy układ $\alpha_{rs}$ nie jest tożsamościowo zerem, wtedy rozważanie dwóch form kwadratowych o spółczynnikach $a_{rs}$ i $\alpha_{rs}$ da nam niezmienniki różniczkowe właściwe rzędu drugiego. Jako niezmienniki algebraiczne tych dwóch form przyjąć można pierwiastki równania:

$$\| \alpha_{rs} - \varrho\, a_{rs} \| = 0;$$

nazwiemy je niezmiennikami zasadniczemi formy $\varphi$. Prowadzi do tego wyboru redukcya układu podwójnego $\alpha_{rs}$ do jego formy kanonicznej (Rozdz. II, § 5). Wypływa z niej zupełnie naturalnie trójka kongruencyj ortogonalnych, bardzo ważnych w badaniu geometrycznem własności, uogólniających pojęcie krzywizny całkowitej rozmaitości dwuwymiarowej.

Powrócimy do tego przedmiotu w zastosowaniach geometrycznych (Rozdz. IV, § 8); tu nadmienimy tylko, że kongruencye trójki nazywamy kongruencyami głównemi, a kierunkami głównemi kierunki ich stycznych.

Zbytecznem prawie jest dodać, że dla otrzymania niezmienników właściwych rozmaitości trójkowej aż do rzędu $\mu>2$ dość, obok dwóch form dopiero co rozważonych, wziąć pod uwagę formy, które wyprowadzamy przez tworzenie spółzmiennicze pochodnych spółczynników $\alpha_{rs}$ aż do rzędu $\mu-2$.

To powiedziawszy o niezmiennikach właściwych, zbadajmy niektóre proste przykłady przypadku ogólnego, w których mamy także układy przyłączone.

[1]) „Ricerca fondamentale per lo studio di una certe classe di proprietà delle superficie curve", Annali di Mat. (1), III i IV, 1860—1861.



Przyjmijmy najprzód, że mamy dwie funkcye $U$ i $V$, przyłączone do formy kwadratowej jakiejkolwiek $\varphi$ o $n$ zmiennych. Parametry różniczkowe rzędu pierwszego $\underset{1}{\Delta} U$ i $\underset{1}{\Delta} V$ oraz parametr, który Beltrami nazywa parametrem mieszanym funkcyj $U$, $V$:

$$\Delta(U, V) = \sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a^{(rs)}\, U_r\, V_s,$$

wyczerpują układ parametrów różniczkowych rzędu pierwszego.

Gdy mamy do czynienia z pojedyńczą funkcyą przyłączoną $U$, to dla rzędu pierwszego mamy oczywiście tylko $\underset{1}{\Delta} U$; dla rzędu drugiego trzeba rozważać niezmienniki bezwzględne dwóch form algebraicznych $\varphi = \sum_1^n{}_r\, U_r\, dx_r$, $\psi = \sum_1^n{}_{rs}\, U_{rs}\, dx_r\, dx_s$. W szczególności niezmienniki pary $\varphi, \psi$ w ich postaci wymiernej (t. j. spółczynniki przy $\varrho^{n-2}, \varrho^{n-3}, \ldots$ w równaniu $\frac{1}{a} \| U_{rs} - \varrho\, a_{rs} \| = 0$ będą odpowiednio stopnia $1, 2, \ldots, n$ względem pochodnych drugich funkcyi $U$.

Niezmiennik stopnia pierwszego $\sum_1^n{}_{rs}\, a^{(rs)}\, U_{rs}$ jest parametrem dobrze znanym $\underset{2}{\Delta} U$ Beltrami'ego.

Przyłączmy teraz do naszej formy $\varphi$ układ pojedyńczy $X_r$; wytwarza on niezmienniki rzędu pierwszego, należące do układu algebraicznego trzech form, t. j. $\varphi$, formy liniowej $\sum_1^3{}_r\, X_r\, dx_r$ i formy dwuliniowej, której spółczynniki są elementami pierwszego układu pochodnego układu $X_r$ względem $\varphi$. Pomiędzy temi niezmiennikami wymieniamy niezmiennik:

$$\Theta = \sum_1^n{}_{r,s}\, a^{(rs)}\, X_{rs},$$

występujący często w zastosowaniach. Z tego punktu widzenia może być też interesującą uwaga, że łatwe przekształcenia prowadzą do drugiego wyrażenia na $\Theta$, mianowicie:

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n{}_r \frac{\partial}{\partial x_r} (\sqrt{a}\; X^{(r)}),$$

bardziej dogodnego w rachunkach, gdy wyrażenie poprzedzające nadaje się lepiej do wywodów teoretycznych. Jedynie w przypadku szczególnym dwu zmiennych można zamiast wskazanej formy dwuliniowej wziąć formę kwadratową o spółczynnikach $X_{rs}+X_{sr}$ o ile przyłączamy do niej niezmiennik, otrzymany ze złożenia układu $X_{rs}$ z układem przeciwzmienniczym $E$ (Rozdz. I, § 3); jego wyrażeniem jest:

$$\sum_{1}^{2}{}_{r,s}\,\varepsilon^{(rs)}\,X_{rs} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,(X_{12}-X_{21}),$$

albo, jeżeli chcemy:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right\}.$$

Podobnie dla $n=3$ dość do układu podwójnego symetrycznego $X_{rs}+X_{sr}$ przyłączyć układ pojedyńczy przeciwzmienniczy, który określamy, kładąc:

$$2\mu^{(r)} = \sum_{1}^{3}{}_{s,t}\,\varepsilon^{(rst)}\,X_{st}.$$

Po rozwinięciu tego wyrażenia i uwzględnieniu umowy co do skażników, znajdujemy na $\mu^{(r)}$ wyrażenia:

$$2\mu^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right\},$$

bardzo łatwe do obliczania w zastosowaniach szczególnych.

---

# ROZDZIAŁ IV.

# Zastosowania geometryczne.

---

## § 1.

***Badanie rozmaitości dwuwymiarowych (Geometrya na powierzchni). Rzeczy ogólne. Krzywizna. Kongruencye. Pęki kongruencyj. Niezmienniki pęku. Twierdzenie Beltrami'ego.***

Teorya powierzchni i linij, nakreślonych na powierzchni, utworzona przez Gaussa, rozwinęła się do tego stopnia, iż sama w sobie stanowi rozległą



i płodną dziedzinę naukową. Lecz nawet w najlepszych wykładach tej teoryi nie znajdujemy jednolitej metody: teorya nie występuje w nich jako rozwinięcie naturalne zasad prostych i dobrze określonych. Przeciwnie, Rachunek różniczkowy bezwzględny prowadzi do tego celu bez żadnego wysiłku, nadając teoryi postać możliwie najprostszą. Prowadzi też do racyonalnego rozdziału pomiędzy teoryą rozmaitości dwuwymiarowych, uważanych w sobie, a teoryą powierzchni, uważanych za obdarzone postacią stałą (sztywną) w przestrzeni naszej. Pierwsza teorya wypływa z rozważania formy różniczkowej, wyrażającej $ds^2$ dla danej rozmaitości (pierwszej formy różniczkowej); w drugiej teoryi dość przyłączyć drugą formę kwadratową (drugą formę zasadniczą według Bianchi'ego).

Rozpocznijmy od pierwszej. Niechaj będzie rozmaitość $V_2$, określona przez wyrażenie kwadratu jej elementu liniowego:

$$ds^2 = \sum_{1}^{2}{}_{r,s}\,a_{rs}\,dx_r\,dx_s = \varphi.$$

Zgódźmy się uważać tą formę jako zasadniczą. Jeżeli znika jej niezmiennik Gaussa, wiemy już, że forma jest liniową. Jeżeli ten niezmiennik $G$ nie jest zerem, wtedy przyłączenie niezmiennika $G$ do formy $\varphi$ prowadzi do wszystkich niezmienników właściwych formy, t. j. do wszystkich wyrażeń, związanych z właściwościami wewnętrznemi rozmaitości $V_2$.

Niechaj $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ będą układy spółrzędne spółzmiennicze dwóch jakichkolwiek ortogonalnych kongruencyj linij krzywych, nakreślonych w naszej rozmaitości (kongruencyj [1], [2]). Rozpatrzmy w przypadku $n=2$ twierdzenia ogólne (6) Rozdziału II. Kładąc w nich:

(1) $$\varphi_s = \sum_{1}^{2}{}_{j}\,\gamma_{21j}\,\lambda_{j/s},$$

otrzymujemy:

(2) $$\lambda_{1/rs} = -\lambda_{2/r}\,\varphi_s, \quad \lambda_{2/rs} = \lambda_{1/r}\,\varphi_s.$$

Spółczynniki obrotu pary [1], [2] redukują się w tym przypadku do dwu spółczynników algebraicznie niezależnych; niechaj będą niemi $\gamma_{121}$, $\gamma_{212}$; przedstawiają one krzywizny geodezyjne linij 1, 2.

Jeżeli położymy:

$$\bar{\varphi}_r = \sum_{1}^{2}{}_{s}\,\varepsilon_{rs}\,\varphi^{(s)},$$

to wzór (20) Rozdziału II można będzie zastąpić wzorem:

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\, \overline{\varphi}_{rs} = G\,. \tag{3}$$

W dwóch ostatnich równaniach (2) uważajmy wyrażenia $\lambda_{2/r}$ jako niewiadome i wyobraźmy sobie równocześnie, że wyrażenia $\lambda_{1/r}$ zastąpiliśmy ich wartościami:

$$\lambda_{1/r} = \sum_{1}^{2}{}_{s}\, \varepsilon_{rs}\, \lambda_2^{(s)}\ [1],$$

wyrażenia zaś $\varphi_s$ przez wartości, otrzymane ze związków (1). Równanie (3) stanowi wtedy warunek konieczny i dostateczny na to, aby te równania oraz równanie:

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda_{2/r}\, \lambda_2^{(r)} = 1\,,$$

stanowiły układ zupełnie całkowalny. Jeżeli oznaczymy przez $\lambda_{2/r}$ elementy rozwiązania szczególnego tego układu algebraiczno-różniczkowego, rozwiązanie ogólnie, znajdziemy, kładąc:

$$\lambda_r = \sin\alpha\, \lambda_{1/r} + \cos\alpha\, \lambda_{2/r}\,,$$

gdzie $\alpha$ jest stała.

Dla wartości szczególnej stałej $\alpha$, wyrażenia $\lambda_r$ są elementami układu spółrzędnego spółzmienniczego kongruencyi, której linie tworzą w każdym punkcie rozmaitości $V_2$ kąt $\alpha$ z linią 2.

Wynika stąd, że układ $\varphi_r$ gra jednaką rolę dla wszystkich kongruencyj, które spotykają kongruencyę daną pod kątem stałym $\alpha$, dla jakiejkolwiek wartości $\alpha$.

Taki układ kongruencyj nazywamy **pękiem**, $\varphi_r$ zaś (albo odpowiednio $\varphi^{(r)}$) nazywa się **układem spółrzędnym spółzmienniczym** (albo **przeciwzmienniczym**) **pęku**.

Równanie (3) przedstawia tedy warunek na to, aby układ $\varphi_r$, dany z góry, był układem spółrzędnym spółzmienniczym pęku.

---

[1] Otrzymujemy je, rozwiązując dwa równania:

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda_1^{(r)}\, \lambda_{1/r} = 1, \quad \sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda_1^{(r)}\, \lambda_{2/r} = 0\,.$$



Jeżeli $\varphi_r$ i $\psi_r$ są układami spółzmienniczemi dwóch pęków, wtedy różnice $\varphi_r - \psi_r$ mają godne uwagi znaczenie geometryczne: są one pochodnemi kąta, który tworzą linie jakichkolwiek dwóch określonych, ale dowolnych, kongruencyj dwóch pęków.

Przyjmijmy, że, zgodnie z prawidłami poprzedzającego §-u, utworzyliśmy wszystkie niezmienniki różniczkowe bezwzględne, które otrzymać można przez przyłączenie do formy $\varphi$ układu spółzmienniczego kongruencyi [2]. W ten sposób otrzymujemy równocześnie wszystkie wyrażenia, nadające się do przedstawienia własności wewnętrznych tej kongruencyi, a nawet jakiejkolwiek linii, nakreślonej w rozmaitości $V_2$.

Postępując sposobem wskazanym, znajdujemy jeden tylko niezmiennik algebraiczny (lub rzędu 0), który zgodnie z (4) jest równy jedności.

Ze względu na związki (2), niezmienniki różniczkowe rzędu pierwszego są niezmiennikami algebraicznemi bezwzględnemi, wspólnemi formie zasadniczej i dwóm formom liniowym, mającym za spółczynniki $\lambda_{2/r}$ i $\varphi_r$. Jest ich dwa, np.:

$$J_1 = \sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda_2^{(r)}\, \varphi_r = \gamma_{212}\,; \qquad J_2 = \sum_{1}^{2}{}_{r}\, \varphi^{(r)} = \gamma^2_{121} + \gamma^2_{212}\,.$$

Aby mieć niezmienniki rzędu 2-go, trzeba przyłączyć formę dwuliniową do spółczynników $\varphi_{rs}$, lub—co na jedno wychodzi—niezmiennik $G$ do formy kwadratowej, mającej za spółczynniki $\psi_{rs} = \frac{1}{2}\,(\varphi_{rs} + \varphi_{sr})$. Pomiędzy wypływającemi stąd niezmiennikami podajemy następujący:

$$\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_{r,s}\, a^{(rs)}\, \psi_{rs} = \sum_{1}^{2}{}_{r,s}\, a^{(rs)}\, \varphi_{rs}\,.$$

Wreszcie, aby otrzymać wszystkie niezmienniki jakiegokolwiek rzędu $\mu > 2$, trzeba rozważać jeszcze układy pochodne form $G$ i $\psi_{rs}$ aż do rzędu $\mu - 2$.

Powiedziano już, że niezmienniki właściwe formy zasadniczej przedstawiają własności wewnętrzne rozmaitości $V_2$; te zaś niezmienniki, które zależą od form $\varphi_r$ i $\psi_{rs}$ i ich pochodnych a nie zawierają wyrażeń $\lambda_{2/r}$, odnoszą się do własności wewnętrznych pęku, których $\varphi_r$ jest układem spółzmienniczym. I tak, niezmiennik $J_2$ przedstawia sumę kwadratów krzywizn geodezyjnych dwóch linij, należących do dwóch kongruencyj ortogonalnych, zresztą dowolnych, pęku. Jest to własnością pęku, że ta suma ma jednakową wartość dla jakiejkolwiek pary kongruencyj ortogonalnych.

Podobnież niezmiennik $\vartheta$ poucza nas, że różnica:

$$\frac{\partial \gamma_{212}}{\partial s_2} - \frac{\partial \gamma_{121}}{\partial s_1},$$

nie zmienia się dla różnych par; gdy ona znika (i tylko wtedy), kongruencya pęku jest izotermiczną. Stąd wypływa całkiem naturalne twierdzenie Beltrami'ego: „Jeżeli kongruencya jest izotermiczną, to jest izotermiczną wszelka kongruencya, należąca z nią do jednego pęku.

## § 2.

*Powierzchnie przestrzeni zwykłej. Równania różniczkowe teoryi rozwijalności. Formy szczególne, godne uwagi. Uogólnienie wzorów Gaussa i Codazzi'ego.*

Z § 1 poprzedzającego Rozdziału wypływa, że dla wyznaczenia wszystkich powierzchni, zezwalających na dane wyrażenie kwadratu elementu liniowego, dość wyznaczyć wszystkie układy podwójne $b_{rs}$, czyniące zadość układowi algebraiczno-różniczkowemu:

c) $$b_{rst} = b_{rts},$$

g) $$\frac{b}{a} = G,$$

gdzie $b = b_{11}\, b_{22} - b^2_{12}$.

Spółrzędne $y_1, y_2, y_3$ punktów powierzchni względem jakiegokolwiek układu spółrzędnych ortogonalnych kartezyańskich będą tedy całkami układu:

i) $$a_{rs} = \sum_1^3{}_h\, y_{h/r}\, y_{h/s},$$

j) $$y_{h/rs} = z_h\, b_{rs}, \qquad (h=1,2,3; \quad r,s=1,2)$$

gdzie wyrażenia $z_h$ są określone przez równania:



$$\sum_1^3{}_h\, z_h\, y_{h/r} = 0, \quad (r=1,2); \qquad \sum_1^3{}_h\, z_h^2 = 1.$$

Rozumie się, że $y_{h/r}$, $y_{h/rs}$ oznaczają pochodne spółzmiennicze funkcyj niewiadomych $y_h$. Układ i), j) jest odtąd zupełnie całkowalny (gdyż równania całkowalności sprowadzają się dokładnie do równań c) i g); jego całka ogólna zależy od sześciu stałych dowolnych, ustalających położenie osi spółrzędnych względem powierzchni, lub—jeżeli chcemy—położenie powierzchni względem osi, jeżeli uważamy osi jako dane i mamy znaleść postać powierzchni.

Widzimy tedy, że każdej całce szczególnej układu i), j) odpowiada jedyna powierzchnia, określona zupełnie aż do przemieszczenia sztywnego, dla której $\varphi$ jest wyrażeniem kwadratu jej elementu liniowego. Równania i), j) nazwać można **równaniami wewnętrznemi** powierzchni. Równania te wraz z równaniami c) i g) (które nazwać by można **równaniami zasadniczemi teoryi powierzchni**) nadają się do badania własności powierzchni, określając je lepiej, niż równanie w wyrazach skończonych, w którem występują elementy obce samej powierzchni.

Równania c), g), zarówno jak i i), j), przekształcamy (Rozdz. II, § 1), kładąc:

(5) $$b_{rs} = \sum_1^2{}_{hk}\, \omega_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s},$$

gdzie $\omega_{hk} = \omega_{kh}$ są trzema niezmiennikami, zaś $\lambda_{1/r}$ i $\lambda_{2/r}$ są układami spółzmienniczemi jakiejkolwiek pary ortogonalnej.

Dowodzi się, że $\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{12}$ wyrażają—aż do znaków—krzywizny normalne i skręcenie geodezyjne linij 1, 2.

Jeżeli zgodzimy się chwilowo, aby skaźników, różniących się od siebie wielokrotnością liczby 2, za różne nie uważać, wtedy wzory c) i g) będą równoważne następującym:

c₁) $$\frac{\partial \omega_{ii}}{\partial s_{i+1}} - \frac{\partial \omega_{ii+1}}{\partial s_{i+2}} = \sum_1^2{}_h \{\omega_{ih}\, \gamma_{ii+2h} + \omega_{i+1h}\, \gamma_{h\,h+1\,h+1}\} \qquad (i=1,2),$$

g₁) $$\omega_{11}\, \omega_{22} - \omega^2_{12} = G.$$

Jeżeli wprowadzimy sześć nowych niewiadomych $\xi_1, \xi_2, \xi_3$; $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ i pisać będziemy wprost $(y, \zeta)$ zamiast któregokolwiek z układów $(y_h, \zeta_h)$, wtedy równania i), j) przybiorą postać:

$$\mathrm{i}_1)\quad \begin{cases} \sum_1^3{}_h \xi_h^2 = 1, \quad \sum_1^3{}_h \eta_h^2 = 1, \quad \sum_1^3{}_h \xi_h \eta_h = 0, \\ y_r = \xi \lambda_{2/r} + \eta \lambda_{1/r}; \end{cases}$$

$$\mathrm{j}_1)\quad \begin{cases} \xi_r = \eta \varphi_r + \zeta \sum_1^2{}_h \omega_{2h} \lambda_{h/r}, \\ \eta_r = -\xi \varphi_r + \zeta \sum_1^2{}_h \omega_{1h} \lambda_{h/r}, \end{cases}$$

gdzie $\zeta = \sqrt{1-\xi^2-\eta^2}$. Niewiadome $\xi_1, \xi_2, \xi_3$; $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ są dostawami kierunku stycznych do linij 1, 2; $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ są dostawami kierunkowemi normalnej, rozumie się, zawsze w odniesieniu do osi $y_1, y_2, y_3$.

Powiedziano w Rozdziale II, że istnieje para $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}$, dla której wyrażenia (5) przybierają postać bardzo prostą, która jest ich postacią kanoniczną. Para ta odpowiada liniom krzywizny powierzchni. Mamy wtedy $\omega_{12} = 0$, co daje nam twierdzenie znane, iż linie krzywiznowe mają skręcenie geodezyjne równe zeru; $\omega_{11}, \omega_{22}$ ze znakiem zmienionym są krzywiznami głównemi. Równania $\mathrm{c}_1$) i $\mathrm{g}_1$) sprowadzają się wtedy do dobrze znanych wzorów Codazzi'ego i Gaussa.

Można też przyjąć $\omega_{22} = 0$ (co wolno, w przypadku wszakże kongruencyj rzeczywistych jedynie wtedy, gdy $G \leqslant 0$). Linie kongruencyj [2] są wtedy ich liniami asymptotycznemi; równanie $\mathrm{g}_1$) określa nam $\omega_{12}$, a równania $\mathrm{c}_1$) sprowadzają się do związków, podanych już przez p. Raffy[1]).

Czytelnika, pragnącego zdać sobie dokładnie sprawę z tego, w jaki sposób z wskazanych wzorów wypływają najważniejsze twierdzenia teoryi, odsyłamy do wielokrotnie cytowanej książki „Lezioni etc."; my zaś zatrzymamy się tu na chwilę nad ważną teoryą rozwijalności, w której Rachunek różniczkowy bezwzględny pozwala dotrzeć do podstaw. Będzie to przedmiot następnego §-u.

[1]) „Sur un problème général de la déformation des surfaces". Comptes rendus, 13 czerwca, 1892.



## § 3.

### *Powierzchnie o własnościach z góry danych. Kwadryki.*

Niechaj będzie daną forma $\varphi$. Starajmy się zbadać, czy pomiędzy powierzchniami, dla których $\varphi$ jest wyrażeniem kwadratu ich elementu liniowego, są powierzchnie, czyniące zadość warunkom z góry danym. Wystarczy w tym celu do równań $\mathrm{c}_1$), $\mathrm{g}_1$); $\mathrm{i}_1$), $\mathrm{j}_1$) przyłączyć te, które wyrażają analityczne własności dane. Wszystko sprowadza się wtedy do wyznaczenia warunków całkowalności takiego układu. Jeżeli można mu zadość uczynić, wtedy dostajemy równanie, od których zależy zbadanie powierzchni niewiadomych. Jest to metoda klasyczna, pozwalająca naprzykład rozstrzygnąć, czy pomiędzy powierzchniami o danem określonem wyrażeniu elementu liniowego istnieją powierzchnie prostoliniowe, powierzchnie o krzywiźnie średniej stałej i t. p. Ograniczamy się tu jedynie na wzmiance, że metody nasze pozwalają na najprostsze i samorzutne znalezienie znanych twierdzeń o odkształcaniu tych kategoryj powierzchni.

Posługiwaliśmy się zwłaszcza temi metodami[1]), by zbadać, czy istnieją i wyznaczyć, skoro istnieją, powierzchnie stopnia drugiego nierozwijalne, mające dany element liniowy. Zagadnienie to, które było rozwiązane w zupełności jedynie dla kuli, jest obecnie wyczerpane dla każdej kwadryki. Można tym sposobem za pomocą prostych działań w wyrazach skończonych rozstrzygnąć, czy forma dana $\varphi$ może należeć jako kwadrat elementu liniowego do powierzchni. Istnieje co najwyżej jedna kwadryka—jeżeli nie uwzględniamy jej ruchów—mająca tę własność. Jeżeli zaś istnieje jedna faktycznie, to zarazem i wyznaczyć się daje.

## § 4.

### *Uogólnienie teoryi powierzchni na przestrzenie liniowe $n$-wymiarowe.*

Rozważania ogólne, o których była mowa w §§ poprzedzających, rozciągają się łatwo na rozmaitości $n$-wymiarowe, zawarte w przestrzeni liniowej $S_{n+1}$. Wydaje się właściwem nadać takim rozmaitościom nazwą nad-

[1]) Rici: „Sulla teoria intrinseca delle superficie ed inspecie di quelle di secondo grado". Istt. del'Ist. Ven., 1895; „Lezioni etc." Część II. Rozdz. VI.

powierzchni (hypersurfaces). Zdajemy sobie z tego sprawę, pamiętając, że wzory c) i g) tego rozdziału są przypadkiem szczególnym ($n=2$) wzorów, które podano w rozdziale poprzedzającym celem wyrażenia, że forma $\varphi$ jest klasy pierwszej.

Można z tych wzorów wyprowadzić, że nadpowierzchnia $n$-wymiarowa, dla której znamy wyrażenie $ds^2$, jest wyznaczona co do postaci (bez uwzględnienia jej położenia w przestrzeni $S_{n+1}$) przez drugą formę kwadratową różniczkową. Jeżeli spółczynnikom $b_{rs}$ tej drugiej formy nadamy wyrażenia analogiczne do wyrażeń (5), otrzymamy równania zasadnicze:

C) $$\frac{\partial \omega_{hl}}{\partial s_j} - \frac{\partial \omega_{hj}}{\partial s_l} = \sum_1^n{}_k\, \omega_{hk}\,(\gamma_{kjl}-\gamma_{klj}) + \sum_1^n{}_k\, (\omega_{jk}\,\gamma_{khl}-\omega_{lk}\,\gamma_{khj}),$$

G) $$\omega_{hk}\,\omega_{ij} - \omega_{hj}\,\omega_{ik} = \sum_1^n{}_{r,s,t,u}\, a_{rs,tu}\, \lambda_h^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,\lambda_i^{(t)}\,\lambda_j^{(u)}.$$

Obok spółrzędnych kartezyańskich $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ punktów nadpowierzchni, wprowadzamy jeszcze, jako niewiadome posiłkowe, dostawy kierunku linij kongruencyj odniesienia. Oznaczywszy przez $\xi_{ih}$ dostawy kąta, jaki linia $i$ tworzy z osią spółrzędnych $y_h$, będziemy mogli równania wewnętrzne nadpowierzchni przedstawić w ten sposób:

I) $$\sum_1^{n+1}{}_h\, \xi_{ih}\,\xi_{jh} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i=j \\ 0 & \text{„ } i \lessgtr j \end{cases} \quad (i,j=1,2,\dots,n)\,; \qquad y_r = \sum_1^n{}_i\, \xi_i\, \lambda_{i/r}\,;$$

II) $$\xi_{i/r} = \sum_1^n{}_j \Big(\zeta\omega_{ij} + \sum_1^n{}_l\, \gamma_{ijl}\,\xi_l\Big)\,\lambda_{j/r}, \quad (i,r=1,2,\dots,n),$$

gdzie zamiast $\xi_i$ należy rozumieć kolejno każde z wyrażeń $\xi_{ih}$ ($h=1,2,\dots,n+1$) i gdzie, dla krótkości, napisano $\zeta$ zamiast $\sqrt{1-\sum_1^n{}_h\, \xi_h^2}$. Jest jasnem, że $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$ przedstawiają dostawy kierunkowe normalnej do nadpowierzchni; wyrażenia zaś $\gamma$ są spółczynnikami obrotu względem $n$ kongruencyj odniesienia.

Niezmienniki $\omega$ mają też znaczenie analogiczne do tych, które wskazano w przypadku $n=2$. Jeżeli weźmiemy wyrażenia $b_{rs}$ w ich postaci



kanonicznej, to odpowiednie kongruencye tworzą się, jak w przypadku $n=2$, z linij krzywiznowych nadpowierzchni. Rozumie się, że w tym przypadku równania C), G); I), II) znacznie się upraszczają.

---

## § 5.

### *Grupy ruchów w rozmaitości jakiejkolwiek* [1]).

Niechaj $\varphi$ będzie wyrażeniem kwadratu elementu liniowego rozmaitości $V_n$. Rozważmy ruch nieskończonostkowy, który nadaje punktom rozmaitości przemieszczenie nieskończenie małe $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$, t. j. sprawiający, że każdy punkt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ przechodzi do położenia sąsiedniego $(x_1+\xi_1^{(1)}, x_2+\xi_2^{(2)}, \dots, x_n+\xi_n^{(n)})$. Nazwiemy ten ruch sztywnym, lub ruchem bez odkształcenia, jeżeli forma $\varphi$ zezwala na przekształcenie nieskończonostkowe:

$$Xf = \sum_1^n{}_{(r)}\, \xi^{(r)}\, \frac{\partial f}{\partial x_r}.$$

Killing [2]) podał warunki, które spełniać winny wielkości $\xi^{(r)}$, aby temu stało się zadość.

Używając znakowań Rachunku różniczkowego bezwzględnego, możemy warunki te napisać w ten sposób:

k) $$\xi_{rs} + \xi_{sr} = 0.$$

Niechaj $\xi_r = \varrho\lambda_r$ będą wyrażeniami kanonicznemi wielkości $\xi_r$. Kongruencya, dla której $\lambda_r$ jest układem spółrzędnym spółzmienniczym, tworzy się z trajektoryj ruchu sztywnego, powstałego przez przekształcenie nieskończonostkowe $Xf$. Jeżeli w równaniach k) zamiast $\xi_r$ napiszemy ich

---

[1]) Ricci: „Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni". Mem. della Soc. Ital. delle scienze, (3), XII, 1899. Wyniki tej rozprawy są streszczone w dwóch notach w Comptes rendus, 16 i 22 sierpnia, 1898.

[2]) Patrz rozprawę: „Ueber die Grundlagen der Geometrie", Crelle's Journ., t. CIX, 1892.

wyrażenia kanoniczne, znajdziemy twierdzenie, będące naturalnem uogólnieniem twierdzenia, odnoszącego się do powierzchni:

Aby kongruencya dana $C$ w jakiejkolwiek rozmaitości $V_n$ składała się z trajektoryj ruchu bez odkształcenia, potrzeba i wystarcza:

a) by każdy układ $n-1$ kongruencyj ortogonalnych do siebie i do $C$ był kanoniczny (względem tej ostatniej kongruencyi);

b) by każda kongruencya normalna do $C$ była geodezyjną, lub taką, że jej krzywizna geodezyjna jest w każdym punkcie prostopadła do linii, należącej do kongruencyi $C$ i przechodzącej przez tenże punkt;

c) by kongruencya $C$ była normalna, a rodzina $\infty^1$ nadpowierzchni izotermiczną.

Gdy $n=3$, wtedy stosując układ spółzmienniczy $E$ (Rozdz. I, § 3), możemy równania k) zastąpić następującemi:

$$\text{k}_0)\qquad \xi_{rs} = \sum_1^3{}_t\, \varepsilon_{rst}\, \mu^{(t)},$$

gdzie $\mu^{(r)}$ są niewiadomemi posiłkowemi, tworzącemi oczywiście układ przeciwzmienniczy.

W rozważanej rozmaitości $V_3$ weźmy jakikolwiek układ potrójny ortogonalny [1], [2], [3], zamiast $\xi_r$ i $\mu_r$ wprowadźmy niezmienniki $\eta_i$ i $\vartheta_i$, określone równaniami:

$$\eta_i = \sum_1^3{}_{(r)}\, \xi^{(r)} \lambda_{i/r}, \qquad \vartheta_i = \sum_1^3{}_r\, \mu^{(r)} \lambda_{i/r}.$$

Równania $\text{k}_0$) przybierają postać:

$$\text{k}'_0)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \eta_i}{\partial s_i} = \sum_1^3{}_h\, \gamma_{ihi}\, \eta_h, \\[2ex] \dfrac{\partial \eta_i}{\partial s_{i+1}} = \sum_1^3{}_h\, \gamma_{ihi+1}\, \eta_h + \vartheta_{i+2}, & (i=1,2,3), \\[2ex] \dfrac{\partial \eta_i}{\partial s_{i+2}} = \sum_1^3{}_h\, \gamma_{ihi+2}\, \eta_h - \vartheta_{i+1}, \end{cases}$$



a warunki całkowalności przedstawią się w ten sposób (Rozdz. II, § 2):

$$\text{h})\qquad \frac{d\vartheta_i}{\partial s_j} = \sum_1^3{}_h\, \gamma_{ihj}\, \vartheta_h + \gamma_{jj+2}\, \eta_{j+1} - \gamma_{jj+1}\, \eta_{j+2}, \qquad (i, j=1, 2, 3).$$

---

## § 6.

***Badanie zupełne grup ruchów dla rozmaitości $V_3$ o trzech wymiarach. Rozwiązanie zagadnienia: zbadać, czy rozmaitość $V_3$ zezwala na daną grupę ruchów i wyznaczyć tę grupę, gdy istnieje.***

**Grupy nieprzechodnie.** W rozmaitosci $V_3$ rodzinę $\infty^1$ powierzchni $V_2$ można przedstawić (Rozdz. II, § 3) przez ten sam układ (naprzykład spółzmienniczy), który przedstawia kongruencyę jej trajektoryj ortogonalnych. Niechaj więc będzie dany taki układ i starajmy się zbadać, czy w rozmaitości $V_0$ istnieją ruchy sztywne, przekształcające każdą rozmaitość $V_2$ na siebie samą. Należy przedewszystkiem zauważyć, że według tego, co powiedziano wyżej, można będzie zagadnienie uważać za rozwiązane, skoro wyznaczone będą trajektorye szukanego ruchu; będzie to miało miejsce dla grup jednoparametrowych.

To założywszy, uważajmy w równaniach $\text{k}'_0$), h) §-u poprzedzającego jako kongruencyę [3] kongruencyę trajektoryj ortogonalnych do powierzchni $V_2$. Będzie:

$$(1)\qquad \eta_3 = 0,$$

a równania $\text{k}'_0$) dla $i=3$ dadzą:

$$(2)\qquad \sum_1^3{}_h\, \gamma_{3h3}\, \eta_h = 0,$$

$$(3)\qquad \vartheta_1 = \sum_1^3{}_h\, \gamma_{3h2}\, \eta_h, \qquad \vartheta_2 = -\sum_1^3{}_h\, \gamma_{3h1}\, \eta_h.$$

Jeżeli równanie (2) nie jest tożsamością, to wraz z równaniem (1) daje nam stosunki wielkości $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, a więc trajektorye szukanego ruchu, skoro tylko jest możliwy, t. j. skoro spełnione są warunki, dane przez twierdzenie §-u 5-go.

Jeżeli zaś, przeciwnie, równanie (2) sprawdza się tożsamościowo, wtedy

$$\gamma_{313} = \gamma_{323} = 0, \tag{4}$$

co wyraża (Rozdz. II, § 3), że kongruencya [3] jest geodezyjną. Widzimy tedy, że:

A b y  r o z m a i t o ś ć  $V_3$  z e z w a l a ł a  n a  g r u p ę  r u c h ó w  s z t y w n y c h  w i ę c e j  n i ż  o  j e d n y m  p a r a m e t r z e,  k t ó r a  p o z o s t a w i a  n i e z m i e n n ą  k a ż d ą  p o w i e r z c h n i ę  r o d z i n y  $\infty^1$  p o w i e r z c h n i,  t r z e b a,  b y  t e  p o w i e r z c h n i e  b y ł y  r ó w n o l e g ł e m i.

Zauważmy teraz, że z przyczyny równań (1) i (3) funkcye niewiadome redukują się do trzech tylko, t. j. do $\eta_1$, $\eta_2$ i $\vartheta_3$. Ponieważ dalej równania k$'_0$), pozostające do rozważania, i równania h) dają wszystkie pochodne pierwsze tych trzech funkcyj, wyrażone przez te funkcye i przez wielkości znane, przeto:

G r u p a  r u c h ó w  s z t y w n y c h,  p o z o s t a w i a j ą c a  n i e z m i e n n ą  k a ż d ą  p o w i e r z c h n i ę  r o d z i n y  $\infty^1$  p o w i e r z c h n i,  z a l e ż y  n a j w y ż e j  o d  t r z e c h  p a r a m e t r ó w.

Aby wyczerpać nasze badanie, należy roztrząsnąć w sposób zupełny układ jednoczesny (1), (3), (4), k$'_0$), h). Odpowiedni wybór pary [1], [2] czyni rozbiór ten łatwym, ale nie możemy go tu podawać i przytaczamy tylko jeden z wyników, do których prowadzi:

J e ż e l i  r o z m a i t o ś ć  z e z w a l a  n a  g r u p ę  o  t r z e c h  p a r a m e t r a c h  r o z w a ż a n e g o  d o p i e r o  c o  g a t u n k u,  w t e d y  w  j a k i m k o l w i e k  p u n k c i e  r o z m a i t o ś c i  $V_3$  k i e r u n k i  g ł ó w n e  d a n e  s ą  p r z e z  n o r m a l n ą  i  p r z e z  s t y c z n e  d o  p o w i e r z c h n i  $V_2$,  p r z e z  t e n  p u n k t  p r z e c h o d z ą c e j;  n i e z m i e n n i k i  g ł ó w n e  r o z m a i t o ś c i  $V_3$,  z  k t ó r y c h  d w a  z l e w a j ą  s i ę,  s ą  n i e z m i e n n i k a m i  g r u p y  i  z a c h o w u j ą  p r z e t o  j e d n a k o w ą  w a r t o ś ć  d l a  k a ż d e j  p o w i e r z c h n i  $V_2$.

**Grupy przechodnie.** Oto wyniki, otrzymane dla tego przypadku, skoro wyjdziemy z równań k$'_0$) i h) §-u poprzedzającego. Gdy $V_3$ zezwala na grupę $G$ więcej niż o jednym parametrze, wtedy niezmienniki główne rozmaitości $V_3$ są niezmiennikami grupy.

Aby ta grupa była przechodnią, trzeba, by niezmienniki główne były stałemi. Przyjmijmy, że tak jest; oznaczmy te niezmienniki przez $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Należy odróżnić trzy przypadki:



1⁰. $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$;

2⁰. $\omega_2 = \omega_3, \qquad \omega_1 \neq \omega_2$;

3⁰. $\omega_2 \neq \omega_3, \qquad \omega_3 \neq \omega_1, \qquad \omega_1 \neq \omega_2$.

W przypadku pierwszym rozmaitość $V_3$ ma krzywiznę stałą, a grupa $G$ sześć parametrów.

W przypadku drugim niezmiennikowi $\omega_1$ odpowiada kongruencya główna [1] jedyna i określona; niezmiennikom $\omega_2$ i $\omega_3$ odpowiadają wszystkie kongruencye ortogonalne do kongruencyi [1]. Grupa $G$ będzie przechodnią i o czterech parametrach, o ile spełnione będą jeszcze następujące warunki:

a) kongruencya [1] jest geodezyjną; dla każdej kongruencyi ortogonalnej [2] krzywizna geodezyjna jest prostopadła równocześnie do linij 1, 2;

b) spółczynniki obrotu $\gamma_{132}, \gamma_{123}$ mają wartości równe i znaków przeciwnych.

W przypadku trzecim, trójka [1], [2], [3] kongruencyj głównych rozmaitości $V_3$ jest zupełnie określoną. Aby grupa $G$ była przechodnią, trzeba jeszcze (i wystarcza), aby spółczynniki obrotu trójki były wszystkie stałemi. Gdy ten warunek jest spełniony, grupa ma dokładnie trzy parametry.

## § 7

### *Związki wyników poprzednich z badaniami Lie'go i Bianchi'ego.*

Rozważania powyższe wiążą się ściśle z badaniami L i e'go nad zagadnieniem R i e m a n n a-H e l m h o l t z a i z badaniami B i a n c h i'ego nad przestrzeniami trójwymiarowemi, zezwalającemi na grupę ciągłą ruchów [1]).

B i a n c h i, obrawszy odpowiednie spółrzędne, wyznaczył wszystkie typy grup ruchów możliwych w rozmaitości $V_3$ i odpowiadające im elementy liniowe (wyrażone przez te zmienne).

[1]) Patrz Memorie della Soc. Ital. delle scienze, (3), XI, 1897.

Zajmiemy się pytaniem następującem:

Dany jest element liniowy jakiejkolwiek rozmaitości $V_3$ w spółrzędnych ogólnych; zbadać, czy istnieją ruchy sztywne możliwe w tej rozmaitości, i skoro istnieją, wyznaczyć grupę, jaką tworzą, za pomocą określających ją równań.

Ustalamy w ten sposób kryterya, pozwalające rozstrzygnąć, czy dany element liniowy należy do jednego z typów Bianchi'ego. Te cechy natury niezmienniczej przybierają niekiedy formę geometryczną, bardzo pouczającą.

Rezultaty nasze dają nowy przyczynek do zagadnienia, które Lie nazywa zagadnieniem Riemanna-Helmholtza.

Przypomnijmy w tym celu, że w § poprzedzającym rozważaliśmy dwa układy pojedyncze $\xi^{(r)}$ i $\mu^{(r)}$. Gdy rozmaitość $V_3$ jest euklidesową, zaś $x_1, x_2, x_3$ są spółrzędnemi kartezyańskiemi ortogonalnemi, wtedy wielkości $\xi$ są składowemi przesunięcia, wielkości $\mu$ składowemi obrotu, odpowiadającego rozważanemu nieskończenie małemu ruchowi sztywnemu. Według § 4 Rozdz. I-go możemy bezpośrednio wyrazić składowe tych wektorów w przestrzeni euklidesowej przez spółrzędne ogólne. Też same wyrażenia stosują się do jakiejkolwiek rozmaitości $V_3$, skoro ograniczymy się do obszaru (rzędu 1-go) punktu danego, gdyż stanowi on zawsze część przestrzeni liniowej stycznej.

W tem założeniu, równania, określające grupę ruchów rozmaitości danej, uczą nas, że:

W rozmaitościach o krzywiznie stałej, i tylko w tym przypadku, istnieje ruch nieskończenie mały, dla którego składowe przesunięcia i składowe obrotu mają w punkcie danym wartości początkowe, z góry ustalone.

Znajdujemy tu dokładną interpretacyę kinematyczną słów Riemanna[1]), zawierających jego rozwiązanie zagadnienia, o którem mówimy. Są to słowa następujące, powtórzone też w dziele Liego[2]):

Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung (tu—czyni Lie uwagę — należy dodać: beliebig) bewegen lassen[3]).

[1]) Gesammelte Werke, str. 264.

[2]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Dritte Abschnitt, str. 289 i następne.

[3]) „Cechą wspólną tych rozmaitości, których miarą krzywizny jest stała, można jeszcze tak wyrazić, że figury w nich dają się w nich poruszać [dowolnie] bez rozciągania.



Jeżeli zwrócimy się teraz do rozmaitości $V_3$, posiadających grupę ruchów $G$ przechodnią, ale jedynie o czterech parametrach, wtedy przesunięcie można wybrać dowolnie, obrót wszakże musi odbywać się naokoło osi określonej; skoro grupa jest trójparametrowa, wtedy żaden obrót nie jest możliwy, przesunięcie zaś pozostaje dowolnem.

Kończąc, zauważmy, że rezultaty przez nas podane, odpowiadają w zupełności przynajmniej co do rozmaitości trójwymiarowych zadaniu konkursowemu Towarzystwa im. Jabłonowskiego za rok 1901[1]).

Zaznaczmy wreszcie, że w badaniu powyższem możnaby było, nie narażając się na niedogodności, obyć się bez teoryi grup; przyjęliśmy wszakże jej język, aby umożliwić czytelnikowi łatwiejsze wniknięcie w ducha naszych wyników i związek ich z wynikami znanemi.

## ROZDZIAŁ V.

## Zastosowania mechaniczne.

### § 1.

***Całki pierwsze równań dynamiki. Całki liniowe (zwyczajne i uszczególnione).***

Rozważmy układ materyalny o połączeniach niezależnych od czasu z $n$ stopniami swobody. Niechaj:

$$2T = \sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs}\, x'_r\, x'_s\,,$$

będzie wyrażeniem siły żywej układu. (Oznaczamy, jak zwykle, za pomocą akcentu pochodne względem czasu).

Równania Lagrange'a, określające ruch układu pod działaniem sił danych, są:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dx'_h}\right) - \frac{dT}{dx_h} = X_h\,, \qquad (h=1, 2, \ldots, n)$$

[1]) Patrz np. tom L, 1898, str. 601 dziennika „Mathem. Annalen".

gdzie wielkości $X_h$ są z siłami bezpośrednio przyłożonemi połączone dobrze znanemi związkami.

Łatwo widzieć, że skoro zmieniamy parametry $x_n$, wielkości $X_h$ przekształcają się spółzmienniczo. Wprowadźmy także układ odwrotny $X^{(h)}$, ze względu na formę zasadniczą, którą tu jest oczywiście:

$$2\,T\,dt^2 = \sum_1^n{}_{r,s}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

Rozwiązawszy równania Lagrange'a względem pochodnych drugich spółrzędnych, będziemy mieli:

$$x_i'' = X^{(i)} - \sum_1^n{}_{r,s} \left\{ {r\,s \atop i} \right\} x'_r\, x'_s \quad [1]; \tag{1}$$

forma ta najlepiej odpowiada naszemu celowi.

Niechaj $f$ będzie pewną funkcyą ilości $x$ i $x'$. Aby $f =$ const. było całką pierwszą równań, potrzeba i wystarcza, by pochodna $\frac{df}{dt}$, t. j.:

$$\sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}\, x_i' + \frac{\partial f}{\partial x_i'}\, x_i'' \right\},$$

znikała tożsamościowo, skoro pochodne $x_i''$ zastąpimy ich wartościami (1). Warunek ten napisać można tak:

$$\frac{df}{dt} = \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial x_i'}\, X^{(i)} + \sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i'}\, x_i' - \frac{\partial f}{\partial x_i'} \sum_1^n{}_{r,s} \left\{ {r\,s \atop i} \right\} x'_r\, x'_s \right\} \equiv 0. \tag{2}$$

Wiadomo [2]), że każdej całce algebraicznej (względem ilości $x'$) ruchu układu pod wpływem sił danych odpowiada całka jednorodna (zawsze względem ilości $x'$) dla ruchu naszego układu bez sił.

Tym sposobem badanie tego przypadku jest szczególnie ważnem. W owej postaci geometrycznej odpowiada on całkom jednorodnym linij geodezyjnych, gdyż trajektorye ruchu, gdy nie ma sił, są liniami geodezyjnemi rozmaitości $V_n$, dla której $2\,T\,dt^2$ jest wyrażeniem kwadratu elementu liniowego.

[1]) Tu $\left\{ {r\,s \atop i} \right\}$ są symbolami Christoffela gatunku drugiego. Patrz Rozdz. I, § 5.

[2]) Patrz naprzykład Levi-Civita: „Sugli integrali algebraici delle equazioni dinamiche". Alti della R. Acc. delle sc. di Torino, XXXI, 1896.



Zastosujmy tedy najprzód wzór (2) do tego, aby wyrazić, że forma jednorodna:

$$f = \sum_1^n{}_{r_1, r_2, \ldots, r_m}\, c_{r_1 r_2 \ldots r_m}\, x'_{r_1}\, x'_{r_2} \ldots x'_{r_m},$$

stopnia $m$, przyrównana do stałej, daje całkę pierwszą linij geodezyjnych. Z uwagi, że spółczynniki formy $f$ tworzą układ spółzmienniczy symetryczny rzędu $m$ i uwzględniając wzory (20) Rozdziału I-go, przechodzimy bezpośrednio od wzoru (2) (gdzie przyjmujemy $X^{(i)} = 0$) do wzoru:

$$\sum_1^n{}_{r_1, r_2, \ldots, r_m, r_{m+1}}\, c_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}\, x'_{r_1}\, x'_{r_2} \ldots x'_{r_m}\, x'_{r+m+1} \equiv 0. \tag{3}$$

Pierwszy układ pochodny układu $c_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ wprowadził się sam przez się. Już teraz można przewidzieć uproszczenie, które w tego rodzaju badaniach sprawia tworzenie spółzmiennicze układów pochodnych.

Jeżeli założymy, że nie wszystkie wielkości $X$ znikają równocześnie, wtedy warunki na to, aby $f \equiv$ const. ($f$ jest formą dopiero co rozważoną) było całką układu (1), składają się z wzorów (3) i z wzoru:

$$\sum_1^n{}_{r_1, r_2, \ldots, r_m}\, c_{r_1 r_2 \ldots r_m}\, X^{(r_1)}\, x'_{r_2} \ldots x'_{r_m} \equiv 0. \tag{4}$$

Można to wywnioskować z równań (2), zważając, że wyrazy różnego stopnia powinny znikać osobno, i nadto, że spółczynniki $c_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ są symetrycznemi względem $m$ skaźników. Z tejże uwagi wypływa, że przyrównawszy do zera spółczynniki każdego wyrazu we wzorze (4), otrzymamy:

$$\sum_1^n{}_{r_1}\, c_{r_1 r_2 \ldots r_m}\, X^{(r_1)} = 0, \qquad (r_2, r_3, \ldots, r_m = 1, 2, \ldots, n). \tag{4'}$$

Objaśnijmy te rozważania ogólne, rozważając warunki istnienia całek:

$$\sum_1^n{}_r\, c_r\, x'_r = \text{const.},$$

liniowych (można powiedzieć, względem składowych prędkości). Tożsamość (3) staje się w tym przypadku:

$$\sum_1^n {}_{r,s}\, c_{rs}\, x'_r\, x'_s = 0\,,$$

lub, po rozwinięciu:

(5) $$c_{rs} + c_{sr} = 0, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Jeżeli idzie o linie geodezyjne, to niema innych warunków; wogóle zaś należy uwzględniać także i związki (4′), zależące od sił działających. Związki te w przypadku naszym redukują się do:

(6) $$\sum_1^n {}_r\, c_r\, X^{(r)} = 0\,.$$

Z układem (5) spotkaliśmy się już poprzednio (Rozdz. IV, § 5); wyraża on, że element liniowy $\sqrt{2\,T}\,dt$ rozmaitości $V_n$ zezwala na przekształcenie nieskończonostkowe $\sum_1^n c^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}$. Ten związek pomiędzy całkami liniowemi linij geodezyjnych a ruchami bez odkształcenia odpowiedniej rozmaitości jest zbyt dobrze znany, abyśmy potrzebowali się tu nad nim zatrzymywać.

Jeżeli układ $c_r$ przyjmiemy w jego postaci kanonicznej $c_r = \varrho \lambda_r$, otrzymamy z niego zaznaczoną w § 5 Rozdziału IV-go interpretacyę geometryczną równań (5). Warunek (6) otrzymuje również bardzo proste znaczenie geometryczne: wyraża on, że k o n g r u e n c y a k a n o n i c z n a c a ł k i l i n i o w e j p o w i n n a b y ć n o r m a l n a d o l i n i j s i ł. Gdy te ostatnie są pochodnemi potencyału $U$, t. j. gdy $X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$, kongruencya kanoniczna musi być równopotencyalna.

Ze względu na ważność całek kwadratowych $\sum_1^n {}_{r,s}\, c_{rs}\, x'_r\, x'_s = \text{const.}$ zajmiemy się niemi w § następnym. Obecnie powiemy kilka słów o c a ł k a c h u s z c z e g ó l n i o n y c h lub r ó w n a n i a c h n i e z m i e n n i c z y c h. Rozumiemy przez to równanie:

$$f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\;\; x_1', x_2', \ldots, x'_n) = 0,$$



któremu staje się zadość dla każdej wartości $t$, jeżeli staje się mu zadość dla wartości początkowej. Znaczy to, że warunek $\frac{df}{dt} = 0$ powinien wynikać sam przez się z równań (1) i z równania $f = 0$. Dochodzimy tym sposobem do nierówności:

(7) $$\sum_1^n {}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}\, x_i' + \frac{\partial f}{\partial x_i'}\, x_i'' \right\} = Mf,$$

gdzie $x''$ zastępujemy ich wartościami (1), a mnożnik $M$ jest funkcyą a p r i o r i nieoznaczoną wielkości $x$ i $x'$.

Ograniczmy się do przypadku prostego, w którym $f$ jest funkcyą liniową wielkości $x'$. Wolno wtedy przyjąć, że równaniem niezmienniczem jest

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_{n/r}\, x_r' = 0,$$

gdzie $\lambda_{n/r}$ jest układem spółzmienniczym kongruencyi [$n$] w rozmaitości $V_n$

Pierwsza strona równania (7) jest ta sama, co w przypadku całek właściwych. Mamy tedy:

$$\sum_1^n {}_{r,s}\, \lambda_{n/rs}\, x_r'\, x_s' + \sum_1^n {}_r\, X^{(r)}\, \lambda_{n/r} = M \sum_1^n {}_r\, \lambda_{n/r}\, x_r'\,.$$

Wnosimy stąd, że mnożnik $M$ może być tylko postaci $\sum_1^n {}_s\, \nu_s\, x_s'$, gdzie spółczynniki $\nu$ są jeszcze nieoznaczone, ale są funkcyami samych zmiennych $x$. Tożsamość przechodzi na równania:

(8) $$\sum_1^n {}_r\, X^{(r)}\, \lambda_{n/r} = 0,$$

(9) $$\lambda_{n/rs} + \lambda_{n/sr} = \nu_r\, \lambda_{n/s} + \nu_s\, \lambda_{n/r}\,. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Równanie (8) orzeka, że linie sił i linie kongruencyi [$n$] przecinają się pod kątem prostym. Jak dopieroco dla sił zachowawczych, oznacza to, że kongruencya [$n$] jest równopotencyonalną. Aby roztrząsnąć układ (9), należy, rozumie się, wyobrazić sobie, że do kongruencyi [$n$] przyłączyliśmy

$n-1$ kongruencyj, uzupełniających kongruencyę $[n]$, i położyć $\omega_i = \sum_1^n {}_r\, \nu_r\, \lambda_i^{(r)}$.

Otrzymamy wtedy z równań (9) warunki równoważne:

(9′) $$\gamma_{nij} + \gamma_{nji} = \varepsilon_{jn}\,\omega_i + \varepsilon_{in}\,\omega_j\,, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie zamiast nieoznaczonych spółczynników $\nu$ występują spółczynniki $\omega$.

Dla $n = 2$ równań (9′) jest trzy; dwa z nich służą do wyznaczenia spółczynników $\omega_1$, $\omega_2$, trzecie redukuje się do $\gamma_{211} = 0$, co oznacza, że kongruencya $[1]$ jest geodezyjną. Lecz z przyczyny równań (8) kongruencya $[1]$ jest kongruencyą linij sił, a zatem: zagadnienia o dwóch stopniach swobody posiadają całkę liniową uszczególnioną wtedy tylko, gdy linie sił są geodezyjnemi. Całka ta wyraża, że prędkość i siła są jednego kierunku.

Nie byłoby rzeczą pozbawioną interesu ustanowienie warunków, przy których i zagadnienia o jakiejkolwiek liczbie stopni swobody zezwalają na równanie liniowe niezmiennicze.

## § 2.

***Całki kwadratowe układów nie poddanych siłom. Postać wewnętrzna warunków istnienia. Hypoteza szczególna, prowadząca do sił żywych p. Stäckela.***

Aby układ nie poddany siłom, t. j. aby geodezyjne odpowiedniej rozmaitości $V_n$ posiadały całkę kwadratową:

$$\mathbf{H}_1 = \sum_1^n {}_{r,s}\, c_{rs}\, x_r'\, x_s' = \text{const.}\,;$$

potrzeba i wystarcza według (3), aby forma pochodna $\sum_1^n {}_{r,s,t}\, c_{rst}\, x_r'\, x_s'\, x_t'$ była tożsamościowo zerem. Mamy tym sposobem warunki:

(10) $$c_{rst} + c_{str} + c_{trs} = 0, \qquad (r, s, t = 1, 2, \ldots, n).$$



Aby je zbadać, dość, oczywiście, wprowadzić zamiast spółczynników $c_{rs}$ ich wyrażenia kanoniczne (Rozdz. II, § 5):

(11) $$c_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \varrho_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s}\,,$$

gdzie spółczynniki $\varrho_h$ są, jak wiadomo, pierwiastkami równania:

$$\| c_{rs} - \varrho\, a_{rs} \| = 0.$$

Znajdujemy tym sposobem:

I) $$(\varrho_h - \varrho_i)\,\gamma_{hij} + (\varrho_i - \varrho_j)\,\gamma_{ijh} + (\varrho_j - \varrho_h)\,\gamma_{jhi} = 0; \qquad (h, i, j = 1, 2, \ldots, n;\ h \mathrel{=}\!\!|\, i \mathrel{=}\!\!|\, j),$$

II) $$\frac{\partial \varrho_h}{\partial s_i} = 2\,(\varrho_h - \varrho_i)\,\gamma_{ihh}\,, \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n),$$

co nadaje postać wewnętrzną pytaniu o wyznaczeniu wszystkich typów sił żywych, których geodezyjne mają conajmniej jedną całkę kwadratową. Dla otrzymania tych typów, trzeba od równań I), II) przejść do wyrażeń elementów liniowych rozmaitości $V_n$, w których mieć można $n$-kę kongruencyj, przez te równania scharakteryzowanych. Wielkości $\varrho$ występują w nich jako nieoznaczone pomocnicze. Jeżeli przyjmiemy, że wszystkie wielkości $\varrho$ są równe, wtedy równania I) spełniają się tożsamościowo, a równania II) stają się: $\frac{\partial \varrho_h}{\partial s_i} = 0$, co pokazuje, że wartość wspólna wielkości $\varrho$ musi być stała. Niezmienniki $\gamma$ nie są bynajmniej tą hypotezą związane. Istnieje przeto, niezależnie od $n$-ki, a więc i dla każdej rozmaitości $V_n$, całka kwadratowa.

Należało tego oczekiwać; jest to całka sił żywych. Istotnie, z równań (11), czyniąc w nich $\varrho_h = C$, otrzymujemy $c_{rs} = C \sum_h \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s} = C\, a_{rs}$, a całka $\mathbf{H}_1 = \text{const.}$ jest tem samem, co $\sum_1^n {}_{r,s}\, a_{rs}\, x_r'\, x_s' = \text{const.}$

Na podobieństwo tego widocznego przypadku zdaje się rzeczą właściwą w badaniu rozwiązań układu I), II) odróżniać rozmaite przypadki co do wielkości $\varrho$. Trzeba tedy będzie rozważać osobno przypadek, w którym wszystkie wielkości $\varrho$ są równe; przypadek, w którym jest tylko $n-1$ wielkości $\varrho$ różnych i t. d., bacząc nadto, aby w każdym przypadku odróżniać jeszcze grupowania w tem możliwem zlewaniu się wielkości $\varrho$. Nie podjęto dotąd w całej ogólności podobnego badania. Jest rzeczą wielkiej wagi, aby to zagadnienie zostało wyczerpane; dziś wszakże zdaje się ono być jeszcze dość trudnem.

Posiadamy rozwiązania szczególne naszego układu; odpowiadają one siłom żywym, odkrytym przez Stäckela[1]) (obejmującym w sobie jako przypadek szczególny przykłady klasyczne Hamiltona i Liouville'a). Odnajdujemy je łatwo, wychodząc z równań I), II) przy hypotezie szczególnej, że kongruencye $n$-ki odniesienia są normalnemi[2]).

Ze względu na wielką ogólność tej klasy sił żywych, możnaby mniemać, że obejmują one wszystkie rozwiązania układu I), II). Tak jest rzeczywiście w przypadku $n=2$ (gdyż każdą kongruencyę można w tym przypadku uważać za normalną); lecz skoro przechodzimy do większej liczby zmiennych, poznajemy łatwo istnienie nowych typów rozwiązań[3]). Istotna trudność polega na utworzeniu wszystkich. Pierwszy krok, jaki należałoby uczynić na tej drodze, stanowiłoby całkowanie układu I), II) w przypadku, zbliżonym do tego, w którym wszystkie $\varrho$ zlewają się i całkowanie uskutecznia się z pierwszego wejrzenia. Byłby to właśnie przypadek, w którym tylko dwie z pomiędzy wielkości $\varrho$ są różne. Polecamy czytelnikom to zadanie, które—po uczynieniu wszelkiej redukcyi—przedstawia się dość prosto.

---

## § 3.

### *Powierzchnie, których geodezyjne mają całkę kwadratową (powierzchnie Liouville'a). Klasyfikacya powierzchni według liczby całek różnych*[4]).

W przypadku $n=2$ równania I), dopiero co rozważane, nie stosują się, i pozostaje tylko druga grupa, która w tym przypadku ma postać:

[1]) Patrz w „Comptes rendus" dwie ważne noty tego autora (9 marca, 1893 i 7 paźdz., 1895). Porówn. Di Pirro: „Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica", Annali di Mat. (2), XXIV, 1896: Stäckel: „Ueber die quadratischen Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik", tamże, XXV, 1897; Painlevé, „Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique" (Comptes rendus, 1 luty 1897).

[2]) Dla dokładności należy zwrócić uwagę na to, że przyjmujemy z góry normalność wszystkich kongruencyj $n$-ki tylko w tym przypadku, gdy wszystkie $\rho$ są różne. Jeżeli jest kilka wielkości $\rho$ zlewających się, wtedy hypoteza jest nieco ścieśniającą. Porówn. Levi-Civita, „Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique" Comptes rendus, 22 lutego 1897.

[3]) Levi-Civita, „Sur une classe de $ds^2$ à trois variables". Comptes rendus, 21 czerwca 1897.

[4]) Ricci, „Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville", Atti dell'Ist. Veneto, 1894: „Lezioni etc.". Część I. Rozdz. VI, VII.



$$
\text{II}') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial s_1} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial s_2} = 0; \\ & \frac{\partial \varrho_1}{\partial s_2} = 2\,(\varrho_1 - \varrho_2)\,\gamma_{211}\,, \qquad \frac{\partial \varrho_2}{\partial s_1} = 2\,(\varrho_2 - \varrho_1)\,\gamma_{122}. \end{aligned} \right.
$$

Stąd, przy założeniu $\varrho_1 \neq \varrho_2$, znajdujemy warunki całkowalności:

$$
\text{III}) \qquad \frac{\partial \gamma_{211}}{\partial s_1} = \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = -\,3\gamma_{211}\,\gamma_{122}.
$$

Każda para [1], [2], dla której sprawdza się warunek III), daje całkę kwadratową $\mathsf{H}_1 = \text{const.}$ (różną od całki sił żywych) równań linij geodezyjnych powierzchni. Oznaczmy przez $\vartheta$ kąt, który linie 2 tworzą z liniami jakiejkolwiek kongruencyi geodezyjnej. Można łatwo poznać, że całka $\mathsf{H}_1 = \text{const.}$ jest równoważna z następującą własnością geometryczną. Wzdłuż jednej i tej samej linii geodezyjnej jest:

$$
\varrho_1 \sin^2\vartheta + \varrho_2 \cos^2\vartheta = \text{const.}
$$

Z równań III) znajdujemy:

$$
\frac{\partial \gamma_{211}}{\partial s_1} - \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = 0,
$$

co wyraża (Rozdz. IV, § 1), że para [1], [2] należy do pęku izotermicznego.

Z równań II') wypływa bez trudności, że jeżeli linie pary [1], [2] weźmiemy za spółrzędne, będzie można przez odpowiedni wybór ich parametrów $u$, $v$, nadać formie zasadniczej wyrażenie:

$$
\varphi = (\varrho_2 - \varrho_1)\,(du^2 + dv^2)\,.
$$

Ponieważ równania II') mówią jeszcze, że $\varrho_1$ i $\varrho_2$ zależą tylko odpowiednio od $u$ i $v$, przeto $\varphi$ jest formą Liouville'a. Z drugiej strony zauważmy, że każdej formie Liouville'a odpowiada para [1], [2] (kongruencye utworzone przez linie spółrzędne), czyniąca zadość warunkom III). A zatem, aby geodezyjne powierzchni posiadały całkę pierwszą kwadratową, potrzeba i wystarcza, by element liniowy powierzchni dał się sprowadzić do formy Liouville'a.

Teraz nasuwa się samo przez się pytanie: zbadać, czy element, z góry dany, może być i iloma różnemi istotnie sposobami sprowadzony do formy Liouville'a; wyznaczyć te formy zredukowane, gdy istnieją. Poszukiwanie to jest oczywiście równoważne z poszukiwaniem liczby i wyrażeń całek kwadratowych różnych, należących do geodezyjnych danej formy dwójkowej.

Oto rezultaty tego poszukiwania w ich pierwszej postaci:

1) Tylko powierzchnie o krzywiznie stałej posiadają $\infty^4$ układów izotermicznych Liouville'a. (Oznaczamy tem mianem, dla skrócenia, każdą parę [1], [2], czyniącą zadość warunkom III)).

2) Powierzchnie o krzywiznie zmiennej mają najwyżej $\infty^2$ układów izotermicznych Liouville'a. Istnieje, w samej rzeczy, klasa powierzchni, mających tę własność. Są to powierzchnie, dające się rozwinąć na powierzchnie obrotowe i mające nadto linie krzywiznowe równoległe.

3) Istnieją powierzchnie o $\infty^1$ układach Liouville'a i inne powierzchnie, posiadające jeden tylko taki układ.

Koenigs w rozprawie, uwieńczonej przez Akademię Nauk w Paryżu [1]), zajmuje się pytaniem, ściśle związanem z naszem, ale nie identycznem. Stara się on wyznaczyć wszystkie typy elementów liniowych, mające najmniej dwa układy Liouville'a. Tą drogą dają się otrzymać niektóre z wyników poprzedzających (te mianowicie, które dotyczą liczby możliwych układów Liouville'a). Koenigs podał te rezultaty równocześnie z Riccim.

---

## § 4.

### *Przekształcenia równań Dynamiki.*

Zagadnienie to (aż po przekształcenie form różniczkowych kwadratowych) przedstawia się według Painlevégo [2]) w formie następującej:

Mając dany układ dynamiczny $(A)$, którego siły nie zależą od prędkości, poznać, czy zezwala on

[1]) „Mémoire sur les lignes géodesiques", „Mémoires des Savants étrangers" t. XXXI, 1894.

[2]) „Sur la transformation des équations de la Dynamique", Journ. Liouville'a, (5), X, 1894.



na odpowiadające mu układy $(A_1)$, i w razie, gdy tak jest, wyznaczyć te układy.

Nazywamy układami odpowiadającemi układowi $(A)$ wszystkie układy $(A_1)$, których siły nie zależą też od prędkości i które mają te same trajektorye, co $A$.

O układach odpowiadających dowodzi się przedewszystkiem, że gdy siły są zerami dla układu, to są też zerami dla układów mu odpowiadających. W tem założeniu zagadnienie o przekształceniu przyjmuje następującą postać geometryczną:

Wyznaczyć wszystkie rozmaitości $V_n$, które można odwzorować na danej z zachowaniem linij geodezyjnych; mianowicie w ten sposób, aby każdej linii geodezyjnej rozmaitości $V_n$ odpowiadała w odwzorowaniu także linia geodezyjna.

Zagadnienie to badał R. Liouville w rozprawie „O równaniach dynamiki" [1]). Otrzymał on wyniki ogólne godne uwagi, ale nie dał ostatecznej odpowiedzi na pytanie. Być może, że nie było to możliwem bez pomocy Rachunku różniczkowego bezwzględnego. Podamy tu zarys postępowania, którem posługiwaliśmy się przy rozwiązaniu zagadnienia za pomocą tej metody [2])

Niechaj będzie:

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

wyrażeniem na $ds^2$ w danej rozmaitości $V_n$;

$$\psi = \sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{rs}\, dx_s\, dx_s\,,$$

takiemże wyrażeniem dla którejkolwiek z rozmaitości, dających się odwzorować na rozmaitości $V_n$ z zachowaniem linij geodezyjnych. Ustanawiamy przedewszystkiem równania, którym mają czynić zadość spółczynniki; są niemi:

$$2\mu\, a_{rst} + 2\mu_t\, a_{rs} + \mu_s\, a_{rt} + \mu_r\, a_{st} = 0,$$

[1]) Acta mathematica, XIX, 1895.

[2]) Levi-Civita: „Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche", Annali di mat. (2), XXIV, 1896.

gdzie $\mu$ jest niewiadomą posiłkową; $\varphi$ uważamy, rozumie się, za formę zasadniczą ($\mu_r$ i $\alpha_{rst}$ są układami pochodnemi według $\varphi$ wyrażenia $\mu$ i układu $\alpha_{rs}$). Oznaczmy przez $a$ i $\alpha$ wyróżniki form $\varphi$ i $\psi$ i połóżmy:

$$A_{rs} = \mu^2 \alpha_{rs}.$$

Z równań poprzedzających wyprowadzamy łatwo:

$$\mu = C\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

gdzie $C$ jest stałą, oraz:

$$A_{rst} + A_{str} + A_{trs} = 0;$$

równania te orzekają (§ 2), że

$$\sum_1^n {}_{rs} A_{rs}\, x_r'\, x_s' = \text{const.}$$

jest całką kwadratową dla geodezyjnych rozmaitości $V_n$. Podstawmy teraz zamiast wielkości $\alpha_{rs}$ ich wyrażenia kanoniczne:

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \varrho_h\, \lambda_{h/s}\, \lambda_{h/s};$$

równania, wyrażające warunki, zamienią się na następujące:

$$\text{E)}\quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{a)} & (\varrho_h - \varrho_i)\,\gamma_{hij} = 0, & (h \neq i \neq j), \\ \text{b)} & 2(\varrho_i - \varrho_j)\,\gamma_{iji} = \dfrac{\partial \varrho_i}{\partial s_j}, & (i \neq j), \\ & & \qquad (h, i, j = 1, 2, \ldots, n), \\ \text{c)} & \dfrac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial s_j} = 0, & (i \neq j), \\ \text{d)} & \dfrac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial s_i} + \varrho_i \dfrac{\partial \mu}{\partial s_i} = 0. & \end{array} \right.$$

To postać układu uprzedza nas już o tem, że liczba i natura składających go równań zależą od liczby pierwiastków różnych równania $\|\alpha_{rs} - \varrho a_{rs}\| = 0$ i od rzędów ich wielokrotności.



Załóżmy najprzód, że wszystkie pierwiastki $\varrho$ są różne. Wtedy $n$-ka odniesienia jest określoną i z przyczyny równań a) spółczynniki obrotu o trzech skaźnikach różnych muszą wszystkie znikać.

Wynika stąd (Rozdz. II, § 3), że wszystkie kongruencye $n$-ki są normalne, co nas prowadzi naturalnie do przyjęcia odpowiednich rozmaitości ortogonalnych za spółrzędne. W takim układzie spółrzędnych $ds^2$ powinno być postaci:

$$\varphi = \sum_1^n {}_i\, \mathsf{H}_i^2\, dx_i^2,$$

równania a) zamieniają się na tożsamości, równania zaś b), c) i d) na następujące:

$$\text{b}_1)\qquad 2(\varrho_i - \varrho_j)\frac{\partial \log \mathsf{H}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial x_j} = 0, \qquad (i \neq j),$$

$$\text{c}_1)\qquad \frac{\partial(\mu\varrho_1)}{\partial x_j} = 0, \qquad (i \neq j), \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\text{d}_1)\qquad \frac{\partial(\mu\varrho_1)}{\partial x_i} + \varrho_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0.$$

Całkowanie tego układu jest łatwe. Dochodzimy do następującego wyniku:

Oznaczmy przez $\psi_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) jakąkolwiek funkcyę jednej zmiennej $x_i$, przez $C$ i $c$ dwie stałe dowolne. Każdy element liniowy, mający wyrażenie postaci:

$$\text{T)}\qquad ds^2 = \sum_1^n {}_i \left(\prod_{j=1}^{j=n} |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2,$$

ma odpowiadające sobie elementy

$$ds_i^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)(\psi_2 + c)\ldots(\psi_n + c)} \sum_1^n {}_i \frac{1}{\psi_i + c}\left(\prod_{j=1}^{j=n} |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2$$

i tylko te. (W czynnikowych $\prod\limits_{j=1}^{j=n}$ należy wyłączyć czynnik, w którym $j$ przybiera wartość $i$).

Przejdźmy teraz do drugiego przypadku krańcowego, w którym wszystkie pierwiastki $\varrho$ są równe. Równania a) spełniają się tożsamościowo, pozostałe zaś równania wymagają jedynie, aby wielkości $\mu$ i wartość wspólna $C$ pierwiastków $\varrho$ była stała. Wyrażenia kanoniczne wielkości $a_{rs}$ są $a_{rs} = Ca_{rs}$, skąd wynika, że forma $\psi$ różni się od formy $\varphi$ tylko czynnikiem stałym. Było a priori widocznem, że każda forma $\varphi$ takie odpowiadające sobie posiada, i dlatego Painlevé[1]) nazwał je odpowiadającemi zwyczajnemi. Nas obchodzą jedynie odpowiadające niezwyczajne.

Jest rzeczą jasną, że po za tym przypadkiem założenia możliwe o pierwiastkach $\varrho$ prowadzą do odpowiadających niezwyczajnych. Każde z tych założeń prowadzi do typów dobrze określonych, które obliczamy bez trudności, całkując równania E), do nich należące. Jak to było dla pierwszego typu, interpretacya geometryczna ujawnia wybór zmiennych, najlepiej nadających się do całkowania układu.

Wracając na chwilę jeszcze do przypadku pierwszego, zauważymy, że całka kwadratowa, której istnienie stwierdziliśmy ogólnie, przybiera postać:

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} (\psi_1+c) \ldots (\psi_{i-1}+c)(\psi_{i+1}+c) \ldots (\psi_n+c) \left(\prod_{j=1}^{j=n} |\psi_j - \psi_i|\right) x_i'^2 = \text{const.}$$

z powyższem zastrzeżeniem co do czynnikowej.

Ponieważ wartość strony pierwszej powinna być stałą, bez względu na wartość $c$, przeto każdy ze spółczynników przy rozmaitych potęgach stałej $c$ daje nam osobno całkę kwadratową. Całki te w liczbie $n$ (włączając i całkę sił żywych) są wszystkie różne.

W ogólności liczba całek równa się liczbie różnych pierwiastków $\varrho$.

Podobnie, jak to uczyniono (§ 2) dla $n=2$, byłoby rzeczą ważną określić przynajmniej dla $n=3$ cechy niezmiennicze rozmaitości, dla których wyrażenie elementu liniowego daje się sprowadzić do typu T) (forma uogólniona Liouville'a).

Ogólniej mówiąc, nie należy zapominać o tem, że problemat o przekształceniu, postawiony na początku tego §, t. j. dla sił nieznikających, oczekuje jeszcze rozwiązania. Painlevé podał bardzo ważne przyczynki do tego zagadnienia, wyczerpujące tę kwestyę w przypadku $n=2$ [2]).

[1]) Loco cit.

[2]) Sur les transformations des équations de la Dynamique. Comptes Rendus, 24 sierpnia, 1895. Patrz też dwie noty Viterbi'ego, „Sulla trasformazione delle equazioni della Dinamica a due variabili". Rend. dell'Accad. dei Lincei, 4 i 18 lutego, 1900.



Czy Rachunek różniczkowy bezwzględny będzie mógł kwestyę tę wyczerpać do gruntu? W tej chwili możemy w tym względzie wyrazić tylko nadzieję.

Zresztą w zagadnieniach tego rodzaju otwarte jest szerokie pole poszukiwań.

Wystarcza rozszerzyć wraz z Stäckelem[1]) wysłowienie zagadnienia o przekształceniach, żądając już nie tego, aby dwa układy dynamiczne $(A)$, $(A_1)$ miały wszystkie trajektorye wspólne, lecz aby miały tylko część ich wspólną, t. j. zbiór trajektoryj, zależących od pewnej liczby $k$ $(<2n-1)$ parametrów.

P. Malipiero w rozprawie, mającej niezadługo się ukazać, zajmuje się liniami geodezyjnemi z tego punktu widzenia i podaje niektóre spostrzeżenia, nie pozbawione interesu.

---

## ROZDZIAŁ VI.

# Zastosowania fizykalne.

### § 1.

***Przypadek, w których równanie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ sprowadzić się daje do dwóch zmiennych. (Potencyały dwójkowe).***

Jeżeli w równaniu Laplace'a w spółrzędnych kartezyańskich:

$$\Delta_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

założymy, że funkcya $u$ nie zależy od $z$, otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

określające bardzo rozległą klasę potencyałów, zachowujących tę samą war-

[1]) „Ueber Transformationen von Bewegungen". Göttinger Nachr., 1898.

tość wzdłuż prostych równoległych do osi $z$ (potencyałów logarytmowych według C. Neumanna).

Podobnież w równaniu Laplace'a w spółrzędnych biegunowych $\varrho$, $\vartheta$, $\varphi$, będzie można przyjąć, że $u$ jest niezależne od $\varphi$, bez wielkiego ścieśnienia ogólności rozwiązania. W samej rzeczy, jeżeli przyjmiemy $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ w wyrażeniu

$$\frac{1}{\varrho^2 \sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2 \sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\} = 0,$$

nie pozostanie śladu funkcyi $\varphi$ w spółczynnikach. Otrzymujemy w ten sposób klasę bardzo ważną całek równania $\underset{2}{\Delta} u = 0$, mianowicie potencyały symetryczne, znane z badań Beltrami'ego [1]). Są one stałemi na okręgach $\varrho = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$.

Można jeszcze przyjąć w równaniu powyższem, że $u$ nie zależy od $\varrho$. Potencyały, odpowiadające równaniu:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

(także ogólne, jakkolwiek mniej ważne od poprzedzających), mają jako linie równopotencyonalne, proste, wychodzące z początku.

Nie wolno uczynić tego samego względem $\vartheta$, albowiem, jeżeli przyjmiemy, że $u$ jest niezależne od $\vartheta$, będziemy mieli oddzielnie:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

a całki tego układu jednoczesnego (t. j. $u = \left(c_1 + \frac{c_2}{\varrho}\right)\varphi + \left(c_3 + \frac{c_4}{\varrho}\right)$, gdzie $c$ są ilości stałe) nie mają tej ogólności, co poprzednie.

Spostrzeżenia te prowadzą nas do następującego pytania, które postawił Volterra [2]).

Niechaj będzie równanie $\underset{2}{\Delta} u = 0$, przekształcone w spółrzędnych krzywoliniowych jakichkolwiek $x_1$, $x_2$, $x_3$. Jeżeli położymy $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ po stronie

[1]) Patrz np. rozprawę: „Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche" (Mem. dell'Acc. di Bologne (4), IV, 1881).

[2]). „Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale", Annali della Scuola Normale di Pisa, 1883.



pierwszej równania, nie będziemy mogli wogóle uwolnić równania zredukowego od zmiennej $x_3$ (inaczej mówiąc, równania $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ nie utworzą układu zupełnego). Istnieją wszakże przypadki (napotkaliśmy przypadki bardzo proste), w których to się zdarza. Należy wyznaczyć je wszystkie. Każdemu z nich odpowiada klasa potencyałów, zależnych od dwóch spółrzędnych (potencyałów dwójkowych). Prowadzą one w zastosowaniach do tych samych uproszczeń, co potencyały logarytmowe i symetryczne. Volterra w cytowanej rozprawie przeprowadził ogólnie to badanie. Pozostaje tu zbadać jeszcze, czy oprócz typów znanych, niema innych i jakiemi są one mianowicie. Jest to tożsamo pytanie, które rozwiązał Riemann [1]) dla równania przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\underset{2}{\Delta} u = 0, \quad (k \text{ jest stała}).$$

Nie można było wszakże myśleć o zastosowaniu metody Riemanna z powodu wielkiej komplikacyi wzorów. Należało zrobić wyłom, aby uwolnić się od materyałów zawadzających. Rachunek różniczkowy bezwzględnych dostarczył na to środków. Wskażemy tu tylko wyniki badania [2]).

Zauważmy w tym celu, że klasę potencyałów dwójkowych charakteryzuje zasadnicza jej kongruencya równopotencyonalna, t. j. kongruencya $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, utworzona przez linie, wzdłuż której wszystkie indywidua klasy zachowują wartość stałą. W samej rzeczy, skoro znamy tę kongruencyę, dość do rodzin $x_1(x, y, z) = \text{const}$, $x_2(x, y, z) = \text{const}$ przyłączyć jakąkolwiek trzecią rodzinę niezależną $x_3$ $(x, y, z) = \text{const}$. Równanie, określające odpowiednie potencyały, otrzymamy łatwo, przekształcając $\underset{2}{\Delta} u = 0$ na spółrzędne $x_1$, $x_2$, $x_3$ i kładąc $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$. (Założenie, że kongruencya jest równopotencyonalna, jest równoważne z założeniem, że można uczynić $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ w równaniu $\underset{2}{\Delta} u = 0$, nie zwracając uwagi na $x_3$). Zagadnienie sprowadza się tedy do wyznaczenia wszystkich kongruencyj równopotencyonalnych naszej przestrzeni.

Kongruencye te (przyjmujemy, że są rzeczywiste) dzielą się na cztery kategorye:

[1]) „Commentatio mathematica, qua etc.", Ges. Werke, p. 370.

[2]) Levi-Civita, „Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due coordinate". Mem. delle Acc. di Torino (2), XLIX, 1899.

1) Kongruencye prostoliniowe izotropowe (według Ribaucoura [1]).
2) Kongruencye kół, mających jednę oś.
3) Kongruencye helis.
4) Kongruencye spiralnych.

Wyprowadzamy stąd odpowiednią klasyfikacyę potencyałów dwójkowych. Są one mianowicie: izotropowemi, symetrycznemi, helisoidalnemi albo spiralnemi.

---

## § 2.

### *O polach wektoryalnych* [2].

W obszarze przestrzeni istnieje pole wektoryalne wtedy, gdy każdemu punktowi $P$ obszaru odpowiada wektor $(R)$, mający początek w punkcie $P$.

Niechaj $y_1, y_2, y_3$ będą spółrzędne kartezyańskie punktu $P$; $Y_1, Y_2, Y_3$ składowe wektora $(R)$ według osi spółrzędnych. Prawo odpowiedniości pomiędzy punktami a wektorami pola wyraża się faktem, że składowe $Y_1, Y_2, Y_3$ wektora $R$ są funkcyami spółrzędnych $y_1, y_2, y_3$ punktu przyłożenia. Zakładamy, rozumie się, że mamy do czynienia z funkcyami ciągłemi i mającemi wszystkie pochodne, które rozważać będzie potrzeba.

Przy rozważaniu pola wektoryalnego wprowadzamy wielkość skalarną:

$$\Theta = \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \frac{\partial Y_3}{\partial y_3}. \tag{1}$$

Nazywamy ją rozbieżnością pola w punkcie $P$ i oznaczamy przez $\Theta = \mathrm{Div}\,(R)$. Odgrywa ona ważną rolę w zagadnieniach fizykalnych. Tak np. gdy wektor $(R)$ oznacza przemieszczenie punktu w odkształ-

[1] Patrz Bianchi, Geom. differenziale, Rozdz. X, lub Levi-Civita, „Sulle congruenze di curve". Rend. dell'Acc. dei Lincei, 5 marca, 1899.

[2] Wiadomości ogólne o polach wektoryalnych ze stanowiska, jakie zajmujemy w tej pracy, znaleść można (prócz w znanem dziele Taita) w rozprawie nieodżałowanego Ferrarisa „Teoria geometrica dei campi vettoriali", Mem. dell'Acc. di Torino, XLVII' 1897, ogłoszonej po śmierci autora i w nowszej pracy Donati'ego „Sulle proprietà caratteristiche dei campi vettoriali". Mem. dell'Acc. di Bologna. (5), VII, 1898.



ceniu sprężystem, $\Theta$ jest rozszerzalnością sześcienną cząsteczki, ten punkt otaczającej. Ogólniej, gdy $(R)$ jest przepływem jakiejkolwiek natury, zgęszczenie w punkcie $P$ mierzy się wielkością $\Theta$.

Jeżeli składowe $Y_r$ są pochodnemi jednej funkcyi $U$ (w tym przypadku rozmieszczenie wektoryalne jest potencyalnem), mamy oczywiście:

$$\Theta = \Delta_2 U. \tag{1'}$$

Istnieje jeszcze jeden wektor, ściśle z polem związany, mianowicie wir $2\,(\omega)$ (curl anglików) wektora $(R)$. Jego składowe $2\nu_1, 2\nu_2, 2\nu_3$ dane są przez wzory:

$$2\nu_1 = \frac{\partial Y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial y_3}; \quad 2\nu_2 = \frac{\partial Y_1}{\partial y_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial y_1}; \quad 2\nu_3 = \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial y_2}. \tag{2}$$

Aby mieć interpretacyę fizykalną, uważajmy np. obraz hydrodynamiczny. Niechaj $(R)$ będzie prędkością cieczy w ruchu, wtedy obrót cząsteczek określa się wektorem $(\omega)$. Jest on tożsamościowo zerem dla rozmieszczeń potencyonalnych.

Przyjmijmy teraz, że przestrzeń jest odniesiona do jakichkolwiek spółrzędnych krzywoliniowych $x_1, x_2, x_3$.

Pytanie o przedstawieniu pola wektoryalnego i jego elementów nasuwa się samo przez się [1]).

Można bardzo łatwo określić pole za pomocą układu pojedyńczego spółzmienniczego $X_r$, którego elementy redukują się w spółrzędnych kartezyańskich do składowych wektora $(R)$. Wiemy już (Rozd. I, § 4) w jaki sposób składowe i rzuty wektora $(R)$ według linij spółrzędnych wyrażają się przez wielkości $X_r$. Ale dla otrzymania wielkości $\Theta$ i $(\omega)$ nie potrzeba przechodzić przez te rzuty (i przekształcenia całek), jak to się czyni zwykle. Zasady Rachunku różniczkowego bezwzględnego pozwalają otrzymać wielkości te odrazu [2]). Wystarczy do tego położyć:

$$\Theta = \sum_{r,s}^{3}{}_{1}\, a^{(rs)} X_{rs}; \tag{3}$$

$$2\mu^{(r)} = -\sum_{s,t}^{3}{}_{1}\, \varepsilon^{(rst)} X_{st}; \quad (r = 1, 2, 3). \tag{4}$$ [3]

[1] P. Abraham w świeżo ogłoszonym artykule (Math. Ann.. LII, 1899, str. 81) zajmuje się także przedstawieniem pól wektoryalnych w spółrzędnych krzywoliniowych, ale ogranicza się do spółrzędnych ortogonalnych i w wywodach wzorów stosuje metody zwykłe.

[2] Taż sama metoda prowadzi prawie bezpośrednio do przekładu pewnych związków całkowych na spółrzędne jakiekolwiek Ma to miejsce np. dla znanych wzorów Green i Stokesa. Patrz co do ostatniego: Ricci, „Del teorema di Stokes in uno spazio qualunque a tre dimensioni e in coordinate generali", Atti doll'Istr. Ven., 1897.

[3] Co do określenia symboli patrz Rozdz. I, § 5.

Dowodzimy tego, zważając, że $\Theta$ jest niezmiennikiem i że jego wartość w spółrzędnych kartezyańskich $y_1, y_2, y_3$ $\left(a_{rs}=\varepsilon_{rs},\ X_{rs}=\frac{\partial Y_r}{\partial y_s}\right)$, redukuje się ściśle do (1). Dla rozmieszczeń potencyalnych $\left(X_r=\frac{\partial U}{\partial x_r}=U_r\right)$ jest $\Theta=\sum_{r,s}^{3} a^{(rs)}\, U_{rs}$, co jest formą ogólną parametru $\Delta_2 U$. Należało tego oczywiście oczekiwać według (1').

Podobnież wektorem, określonym przez układ przeciwzmienniczy $\mu^{(r)}$ (albo wzajemny $\mu_r$), jest $(\omega)$, gdyż elementy $\mu^{(r)}$ dla spółrzędnych kartezyańskich są właśnie wielkościami $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ wzorów (2). (Porówn. Rozd. IV, § 9).

Zauważyliśmy już (Rozdz. III, § 2), że wyrażeniom (3) i (4) można nadać postać:

$$(3')\quad \Theta=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{r}^{3}\frac{\partial(\sqrt{a}\,X^{(r)})}{\partial x_r};\qquad (4')\quad 2\mu^{r}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right\},\ (r=1,2,3),$$

(gdzie, rozumie się, należy uważać za identyczne wartości $r$, różniące się o wielokrotności liczby 3). Wyrażenia te są niekiedy dogodne w rachunkach.

W teoryi sprężystości, a zwłaszcza w elektrodynamice, napotykamy wektor $(\Omega)$, związany z wektorem zasadniczym pola za pomocą związku:

$$\Omega=-\operatorname{Curl}\operatorname{Curl}(R)=-2\operatorname{Curl}(\omega).$$

Łatwo byłoby obliczyć układ przeciwzmienniczy $\mathbf{M}^{(r)}$ przez reiteracyę wzoru (4), lecz prościej jest zwrócić się na chwilę do spółrzędnych kartezyańskich. Elementy $\mathbf{N}^{(r)}=\mathbf{N}_r$ uważanego układu (składowe wektora $(\Omega)$) są według (2):

$$\mathbf{N}_r=2\left\{\frac{\partial\nu_{r+1}}{\partial y_{r+2}}-\frac{\partial\nu_{r+2}}{\partial y_{r+1}}\right\}=\frac{\partial}{\partial y_{r+2}}\left\{\frac{\partial Y_r}{\partial y_{r+2}}-\frac{\partial Y_{r+2}}{\partial y_r}\right\}-\frac{\partial}{\partial y_{r+1}}\left\{\frac{\partial Y_{r+1}}{\partial y_r}-\frac{\partial Y_r}{\partial y_{r+1}}\right\},$$

co można tak napisać:

$$(5)\qquad \mathbf{N}_r=\sum_{p}^{3}\frac{\partial^2 Y_r}{\partial y_p^2}-\frac{\partial}{\partial y_r}\sum_{p}^{3}\frac{\partial Y_p}{\partial y_p}=\sum_{p}^{3}\frac{\partial^2 Y_r}{\partial y_p^2}-\frac{\partial\Theta}{\partial y_r}.$$

Jeżeli teraz położymy:



$$(5')\qquad \mathbf{M}_r=\sum_{p,q}^{3} a^{(pq)}\,X_{rpq}-\frac{\partial\Theta}{\partial x_r},$$

to widać odrazu, że wielkości $\mathbf{M}_r$ dla spółrzędnych kartezyańskich są identyczne z wielkościami $\mathbf{N}_r$. Układ (5') jest spółzmienniczy, jest to tedy układ szukany.

## § 3.

*Różne przykłady. Równania elektrodynamiki, teoryi ciepła i sprężystości w spółrzędnych ogólnych.*

**Elektrodynamika.** Niechaj w polu elektromagnetycznem $(F_e)$ i $(F_m)$ będą wektorami, przedstawiającemi siłę elektryczną i magnetyczną w punkcie $P$ pola.

Siły te zmieniają się wogóle z czasem. Oznaczmy, jak zwykle, przez $\frac{(F_e)}{\partial t}$ wektor, którego składowemi są pochodne składowych siły $(F_e)$ względem czasu; i podobnie dla $(F_m)$. Przy tych założeniach, równania nieoznaczone dla dielektryka jednorodnego, izotropowego w spoczynku, są, według Hertza, postaci:

$$(6)\qquad A\mu\frac{\partial F_m}{\partial t}=-\operatorname{Curl}(F_e);\qquad (7)\qquad A\varepsilon\frac{\partial(F_e)}{\partial t}=-\operatorname{Curl}(F_m),$$

gdzie $A$, $\mu$, $\varepsilon$ są stałe.

Możemy nadać tym równaniom formę wyraźną, przyjąwszy jakiekolwiek spółrzędne krzywoliniowe $x_1, x_2, x_3$. Dość zwrócić się do wzorów paragrafu poprzedzającego. W tym celu wprowadźmy układy spółzmiennicze $X_r$ i $L_r$ dwóch wektorów $(F_e)$ i $(F_m)$. Równania (6) i (7), po rozwinięciu, przybierają postać:

$$(6')\qquad A\mu\frac{\partial L_r}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right\};$$

$$(7')\qquad A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right\}.$$

Może być rzeczą użyteczną (np. w badaniu drgań) mieć osobno prawa zmienności każdego z wektorów $(F_e)$ i $(F_m)$. Można je otrzymać przez skombinowanie równań (6) i (7) i kolejną eliminacyę wielkości $(F_e)$ i $(F_m)$. Znajdujemy tym sposobem:

$$A^2 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 (F_m)}{\partial t^2} = A\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Curl}(F_e) = A\varepsilon \operatorname{Curl} \frac{\partial (F_e)}{\partial t} = -\operatorname{Curl}.\operatorname{Curl}(F_m),$$

podobnież:

$$A^2 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 (F_e)}{\partial t^2} = -\operatorname{Curl}.\operatorname{Curl}(F_e),$$

kładąc:

$$\theta_e = \operatorname{Div}(F_e), \qquad \theta_m = \operatorname{Div}(F_m),$$

dochodzimy z wzorów (5′) do związków:

$$(6'') \qquad A^2 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 L_r}{\partial t^2} = \sum_1^3{}_{p,q}\, a^{(pq)} L_{rpq} - \frac{\partial \theta_m}{\partial x_r},$$

$$(7'') \qquad A^2 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 X_r}{\partial t^2} = \sum_1^3{}_{p,q}\, a^{(pq)} X_{rpq} - \frac{\partial \theta_e}{\partial x_r}.$$

Dla eteru jest w szczególności:

$$\mu = \varepsilon = 1; \qquad \theta_m = \theta_e = 0.$$

Należałoby teraz wyrazić w spółrzędnych ogólnych warunki graniczne, a następnie wprowadziwszy polaryzacye i prąd, rozważać przypadek dielektryków izotropowych i konduktorów.

Podobnież byłoby rzeczą interesującą podać kilka zastosowań wzorów ogólnych, przez nas podanych. Lecz to zaprowadziłoby nas zbyt daleko i dlatego ograniczamy się tu na prostych wskazówkach, oryentujących czytelnika.

**Ciepło.** Ruch ciepła w przewodnikach, gdy pominiemy tak zjawisko absorbcyi, jak i pracę mechaniczną, wyraża równanie:

$$(8) \qquad C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{Div}(\mathfrak{F}),$$



gdzie $C$ jest ciepłem właściwem, $\varrho$, gęstością $T$-temperaturą, $(\mathfrak{F})$ przepływem ciepła w punkcie danym przewodnika w momencie $t$.

Wektor $(\mathfrak{F})$ jest określony w ciałach izotropowych przez to, że jego składowa w jakimkolwiek kierunku jest prostopadła do pochodnej temperatury w tymże kierunku. Jeżeli wprowadzimy spółrzędne kartezyańskie $y_1, y_2, y_3$ i odpowiednie składowe $Y_1, Y_2, Y_3$ wektora $(\mathfrak{F})$, będzie:

$$(9) \qquad Y_r = c \frac{\partial T}{\partial y_r},$$

gdzie czynnik $c$ może zależeć od spółrzędnych $y_1, y_2, y_3$.

Przejdźmy teraz do spółrzędnych jakichkolwiek; będzie dla układu spółzmienniczego $X_r$ wektora $(\mathfrak{F})$:

$$X_r = c \frac{\partial T}{\partial x_r} = c\, T_r,$$

a zatem, posługując się wzorami (3′), będziemy mieli:

$$(8') \qquad C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{Div}(\mathfrak{F}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left(c\sqrt{a}\, \frac{\partial T}{\partial x_r}\right).$$

Gdy $c$ jest stałe, mamy:

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = c \underset{2}{\Delta} T;$$

jest to rezultat znany.

Rozważajmy ogólniej przypadek konduktora jakiegokolwiek. Związki (9) pomiędzy składowemi przepływu i pochodnemi temperatury należy zastąpić związkami:

$$(9') \qquad Y^{(r)} = \sum_1^3{}_p\, c^{(rp)} \frac{\partial T}{\partial y_p},$$

gdzie $c^{(rp)} = c^{(pr)}$ (spółczynniki przewodnictwa) mogą być funkcyami jakiemukolwiek zmiennych $y$.

I tu łatwo przełożyć równanie (8) na spółrzędne ogólne. W samej rzeczy, określmy układ przeciwzmienniczy podwójny $c^{(rs)}$ za pomocą warunku, aby elementy jego sprowadzały się dokładnie do spółczynników przewodnictwa dla zmiennych $y$.

System przeciwzmienniczy wektora $(\mathfrak{F})$ będzie można wyrazić przez:

$$X^{(r)} = \sum_{1}^{3}{}_{p} \, c^{(pr)} \, T_p \,,$$

(zawsze z tego samego powodu: układ jest przeciwzmienniczy i zlewa się z $Y^{(r)} = Y_r$ dla spółrzędnych $y$).

Weźmy teraz Div $(\mathfrak{F})$ w postaci (3′), to będzie:

$$(8'') \qquad C\varrho \, \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{3}{}_{r} \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \sqrt{a} \sum_{1}^{3}{}_{p} \, c^{(pr)} \, \frac{\partial T}{\partial x_p} \right\},$$

jest to rozwinięcie wyrażenia (8) w przypadku najogólniejszym.

Jeżeli założymy, że przewodnik jest jednorodny, to spółczynniki przewodnictwa będą stałemi, lecz nie będzie to miało wogólności miejsca ze spółczynnikami $c^{(pr)}$, odnoszącemi się do przypadku ogólnego; nie mogą one przeto wyjść z pod znaku pochodnej po stronie drugiej związku (8″). Należy przeto wrócić do wyrażenia, że tak powiemy, teoretycznego na Div $(\mathfrak{F})$, t. j. do $\sum_{1}^{3}{}_{r,s} \, a_{rs} \, X^{(rs)}$.

Ponieważ z przyczyny jednorodności znikają równocześnie pochodne względem $y$ spółczynników przewodnictwa, przeto toż samo mieć będzie miejsce i dla pochodnych przeciwzmienniczych wyrażeń $c^{(pr)}$. Biorąc pochodne wyrażenia:

$$X^{(r)} = \sum_{1}^{3}{}_{p} \, c^{(rp)} \, T_p \,,$$

otrzymujemy:

$$X^{(rs)} = \sum_{1}^{3}{}_{p,q} \, c^{(rp)} \, a^{(qs)} \, T_{pq} \,,$$

skąd:

$$\text{Div} \, (\mathfrak{F}) = \sum_{1}^{3}{}_{r,s,p,q} \, a_{rs} \, a^{(qs)} \, c^{(rp)} \, T_{pq} = \sum_{1}^{3}{}_{p,q} \, c^{(pq)} \, T_{pq} \,,$$



i wreszcie:

$$C\varrho \, \frac{\partial T}{dt} = \sum_{1}^{3}{}_{p,q} \, c^{(pq)} \, T_{pq} \;{}^{1)},$$

**Sprężystość**. Jeżeli $u_r$ są składowemi przemieszczenia punktu ośrodka sprężystego według osi $y_r$, wtedy wynikające stąd odkształcenie zależy, jak wiadomo, od sześciu ilości:

$$(10) \qquad 2a_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial y_s} + \frac{\partial u_s}{\partial y_r}, \qquad (r, s = 1, 2, 3),$$

($a_{rs}$ jest rozciągnięciem liniowem dla kierunku $y_r$, $a_{r+1, r+2}$ jest ślizganiem się, albo, jeżeli chcemy, rozciągnięciem kątowem dwóch kierunków $y_{r+1}, y_{r+2}$).

Potencyał sił sprężystych jest funkcyą $2\Pi$ ilości $a_{rs}$ kwadratową i jednorodną.

Połóżmy:

$$2\Pi = \sum_{1}^{3}{}_{r,s,p,q} \, c^{(rspq)} \, a_{rs} \, a_{pq},$$

gdzie spółczynniki sprężystości $c^{rspq}$ ($= c^{srpq} = c^{pqrs}$ i ich wyniki) mogą zależeć od spółrzędnych $y$.

Jeżeli oznaczymy przez $Y_r$ (albo $Y^{(r)}$) składowe siły $(F)$, działającej na jednostkę masy, przez $\varrho$ gęstość, i położymy nadto:

$$(11) \qquad \Pi^{(rs)} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_{rs}} = \sum_{1}^{3}{}_{p,q} \, c^{(rspq)} \, a_{pq},$$

wtedy równania nieoznaczone równowagi sprężystej przybiorą postać:

$$(12) \qquad \sum_{1}^{3} \frac{\partial \Pi^{(rs)}}{\partial y_s} = \varrho \, Y^{(s)} \,, \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Łatwo przedstawić je w postaci przydatnej dla spółrzędnych jakichkolwiek $x_1, x_2, x_3$. Uważajmy w tym celu $u_r$, $c^{(rspq)}$ jako elementy dwóch

---

1) **Można usprawiedliwić ten wynik prostą uwagą, że obie strony są niezmiennikami a ich równość (według (8″)) i jednorodności przewodnika, jest widoczną w odniesieniu do spółrzędnych kartezyańskich.**

układów: pojedyńczego przeciwzmienniczego i przeciwzmienniczego rzędu 4-go, w spółrzędnych obranych.

Jeżeli uczynimy:

$$2\,a_{rs} = u_{rs} + u_{sr}\,, \tag{10'}$$

wtedy równania (11) określą nam układ podwójny przeciwzmienniczy $\Pi^{(rs)}$.

Jeżeli przedstawimy jeszcze przez $X^{(r)}$ układ przeciwzmienniczy siły $(F)$, wtedy szukanemi równaniami będą:

$$\sum_1^3{}_{js}\, a_{j3}\, \Pi^{(rsj)} = \varrho X^{(r)}\,, \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{11'}$$

Jest to widocznem, gdyż sama postać pokazuje nam ich naturę niezmienniczą; z drugiej zaś strony, znajdujemy znów równania (12), skoro założymy, że spółrzędne są kartezyańskiemi ortogonalnemi.

Nie możemy tu dłużej rozwodzić się nad tym przedmiotem, ale godzi się nie zamilczać o tem, że teorya sprężystości jest może jedną z tych, w których metody Rachunku różniczkowego bezwzględnego mogą oddać najlepsze usługi [1]).

[1]) Porówn. **Ricci**: „Lezioni sulla teoria dell' elasticità".



# SPIS RZECZY.

Str.

ROZDZIAŁ IV.

**Zastosowania geometryczne.**



ROZDZIAŁ V.

**Zastosowania mechaniczne.**



ROZDZIAŁ VI.

**Zastosowania fizykalne.**



# ZASADY RACHUNKU ITERACYJNEGO.

NAPISAŁ

Ł. E. BÖTTCHER.

## Część trzecia.[1]

## Zastosowanie teoryi zbieżności iteracyj do rozwiązywania elementarnych równań funkcyjnych.

### *I. Uwagi wstępne.*

§ 1. Zajmijmy się dyskusyą równania funkcyjnego typu:

$$\Phi\,\{z,\ F(z),\ Ff(z)\} = 0. \tag{1}$$

Chodzi tu o zbadanie takiej funkcyi $F(z)$, któraby uczyniła zadość warunkowi (1), przyczem zakładamy, że funkcya $f(z)$ jest znaną nam już funkcyą algebraiczną, wymierną; funkcya zaś $\Phi$ jest również funkcyą algebraiczną wymierną, całkowitą.

Na razie ograniczymy się tylko do czterech typów najprostszych:

1⁰. $$Ff(z) = F(z) + r.$$

[1]) Patrz „Prace matematyczno-fizyczne", t. X, str. 64—101.