SPRAWOZDANIA Z PIŚMIENNICTWA POLSKIEGO

W DZIEDZINIE NAUK MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.

ROK 1899.

I. MATEMATYKA.

1. ***Arvay W. i Komperda H.*** *O pewnych cechach charakterystycznych grupy ruchów euklidesowych.* Prace mat.-fizycz., t. **10**, str. 113—128.

W artykule tym znajdują się analityczne dowody twierdzeń następujących: 1) Nieskończenie małe odkształcenie krzywej płaskiej w jej płaszczyźnie, które nie zmienia długości jej liniowych elementów i kątów pomiędzy jej stycznemi w punktach sąsiednich, należy do grupy ruchów euklidesowych płaszczyzny. 2) Nieskończenie małe odkształcenie krzywej skośnej, które nie zmienia długości jej liniowych elementów, kątów pomiędzy jej stycznemi w punktach sąsiednich i kątów pomiędzy jej płaszczyznami ściśle stycznemi, należy do grupy ruchów euklidesowych przestrzeni. 3) Nieskończenie małe odkształcenie powierzchni, które nie zmienia długości jej liniowych elementów i odległości płaszczyzn stycznych od punktów sąsiadujących z punktem styczności, należy do grupy ruchów euklidesowych przestrzeni.

K. Ż.

2. ***Böttcher Ł.*** *Zasady rachunku iteracyjnego.* Prace mat.-fizycz., t. **10**, str. 66—101.

Jeżeli $T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ przedstawia podstawienie, wykonywane na zmiennych $z_1, z_2, \ldots, z_n$:

$$z_i' = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

to N-krotne wykonanie takiego działania na zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywa się iteracyą o wykładniku N i podstawie T:

$$\underset{T(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\overset{N}{I}} (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Tym sposobem iteracya jest określona dla wykładników dodatnich i całkowitych. Lecz już podstawienia odwrotne doprowadzają do iteracyj o wykładniku ujemnym. Rozważając zaś iteracye podstawień, które już same są iteracyami, otrzymuje się iteracye, których wykładniki są iloczynami, skąd łatwo dojść do określenia iteracyj o wykładniku ułamkowym wymiernym i uogólnić je także do przypadków ułamków niewymiernych. Taka iteracya jest ściśle związana z rozwiązaniem pewnego równania funkcyjnego, które znowu służyć może za określenie iteracyi.

Do iteracyi o wykładniku dowolnym stosuje autor teoryę Liego; wykładnik N ma grać rolę dowolnego parametru grupy jednoparametrowej, przyczem, oczywiście, podstawienie zasadnicze winno należeć do grupy tych podstawień; jest to warunek konieczny i wystarczający na to, aby iteracye o wykładniku dowolnym miały racyę bytu. Zadaniem zatem głównem jest: do danego podstawienia i jego iteracyi o wykładniku całkowitym znaleźć grupę jednoparametrową ciągłą, której podstawienia powyższe tworzą półgrupę nieciągłą.

Zagadnienie to omawia autor w kilku ostatnich ustępach pierwszej części swej pracy, objaśniając twierdzenia Korkina i Farkasa przy pomocy pojęć z teoryi grup Liego.

Część druga pracy jest poświęcona zmienności iteracyj algebraicznych jednej zmiennej. Jeżeli $z_1 = f(z)$, $z_2 = f(z_1) \ldots$ przedstawiają punkty otrzymywane z punktu z, to widoczne jest, że punkty te mogą się grupować około jednego punktu „granicznego“ P, i szereg takich punktów z_i nazywa się wtedy „regularnie zbieżnym“; albo począwszy od pewnego z_i, szereg ten może się rozdzielać na skończoną liczbę szeregów zbieżnych, jest to t. z. szereg „rytmicznie zbieżny“; albo nakoniec otrzymuje się nieskończenie wiele takich szeregów,—wtedy mamy przypadek „przestępnej“ zbieżności. Rozważając dalej otoczenie punktów granicznych i zachowanie się w niem funkcyi $f(z)$, wprowadza autor pewien podział punktów granicznych lub ich grup, a następnie zastanawia się nad obszarami „zbieżności iteracyi“ płaszczyzny zmiennej z, których punkty przy wykonywaniu iteracyj prowadzą do danego punktu granicznego. Tu należą badania Cayley'a, Königsa i innych, które autor bliżej omawia.

S. K.

3. **Böttcher Ł.** *Kilka słów z dziedziny rachunku iteracyjnego.* Lwów. 1889.

4. **Danielewicz B.** *Systemy grupowe obliczania rezerwy od ubezpieczeń na dożycie ze zwrotem premij.* Wiad. mat. **3**, str. 275—287.

Autor podaje wzory, odnoszące się do następującego zagadnienia: Niechaj x oznacza wiek, jaki w chwili zawierania umowy posiada osoba ubezpieczona, tak, że otrzyma kapitał k, gdy przeżyje n lat; w razie zaś jej wcześniejszej śmierci, mające do tego prawo osoby otrzymają bezzwłocznie wszystkie premie brutto, wniesione przez osobę ubezpieczoną ratami rocznemi aż do chwili jej śmierci. Autor podaje najprzód wyrażenie na rezerwę, jaką towarzystwo ubezpieczeń powinnoby odłożyć na rachunek tej osoby po upływie n lat ubezpieczeniowych; następnie wyprowadza stąd wyrażenie sumy takich rezerw dla rowieśników, zapisanych na jednym i tym samym rachunku w księdze rezerwowej, t. j. dla osób, urodzonych w tym samym roku, bez względu na to, w jakim wieku, na jaki kapitał i z jakim terminem zawierają ubezpieczenie, i dochodzi do żądanego wzoru ogólnego. W podobny sposób postępując, wyprowadza wzór na rezerwę zbiorową od ubezpieczeń, zawartych przez wpłacenie premij jednorazowych. Wzorom otrzymanym nadaje nową postać, rozkładając ubezpieczenia na dożycie ze zwrotem premij na dwie części: na ubezpieczenie samego kapitału na dożycie bez zwrotu premij i na ubezpieczenie samego zwrotu premij wrazie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej, i wyprowadzając dla każdej z tych dwóch części oddzielnie wzór na obliczanie rezerwy.

S. D.

5. **Dickstein S.** *Przyczynek do historyi zasad rachunku nieskończonostkowego.* (Krytycy „Teoryi funkcyj analitycznych“ Lagrange'a). Prace mat.-fizycz., t. **10**. 178—192.

Praca ta odnosi się do pewnego bardzo ważnego momentu w historyi matematyki. Zasady rachunku nieskończonostkowego pozostawiały w końcu XVIII go i na początku XIX-go stulecia pod względem jasności i ścisłości bardzo wiele do życzenia. Chciano założyć fundamenty tej nauki bez uciekania się do pojęcia wielkości nieskończenie małych. „Théorie des fonctions analytiques“ Lagrange'a (1797) jest właśnie dziełem, wywołanem przez to dążenie. Wywarło ono znaczny wpływ na późniejszy rozwój umiejętności matematycznych i może być słusznie uważane za pierwszą podwalinę nauki, którą dziś nazywamy teoryą funkcyj analitycznych. Niemniej jednak spotkało się ono z krytyką spółczesnych i ich następców. Praca, o której mowa, poświęcona jest właśnie historycznemu przeglądowi krytyk teoryi funkcyj Lagrange'a, ze szczególnem uwzględnieniem krytyków najwcześniejszych. Do nich należą Burja, Wroński, Śniadecki i Bolzano. Burja (1801) podnosi, że założenia Lagrange'a o rozwinięciu funkcyj sprawdzają się wprawdzie dla funkcyj najprostszych, ale kwestya, czy sprawdzają się dla bardziej złożonych; widzi on trudność w uzasadnieniu możliwości rozwinięcia. Wroński (1811), którego poglądy autor omawia najobszerniej, powstaje przeciwko opieraniu zasad rachunku nieskończonostkowego na rozwinięciu pewnego określonego kształtu; powiada, że z takiem samem prawem możnaby oprzeć rachunek nieskończonostkowy na rozwinięciach innej formy; widzi trudność także w uzasadnieniu możliwości rozwinięcia, które Lagrange bierze za podstawę swych rozważań; wreszcie czyni ważną uwagę, że należy odróżniać samą funkcyę od jej rozwinięcia na szereg nieskończony. Mniej głęboką jest krytyka Śniadeckiego (1815), który w teoryi Lagrange'a nie widzi znacznej różnicy z teoryą poprzednią, i wypowiada zdanie, że w przedstawieniu Lagrange'a rachunek różniczkowy byłby tylko sztuką przybliżenia. Natomiast ważnemi są w tej dziedzinie prace czeskiego matematyka Bolzano (1817), który—być może—pierwszy subtelniej traktował zasadnicze kwestye teoryi funkcyj i szeregów nieskończonych. W końcu pracy mniej obszernie omawia autor późniejszych znanych krytyków Lagrange'a i te kierunki wiedzy nowoczesnej, które stoją w blizkim związku z dziełem wielkiego geometry.

K. Ż.

6. ***Huber M. T.*** *O sumowaniu liczb waryacyj.* Wiad. mat., 3, str. 39—42.

Autor wprowadza kilka wzorów na sumę liczb waryacyj różnych klas z n elementów. W tomie **4** „Wiad. mat." str. 93 znajduje się sprostowanie pewnego rachunkowego błędu w tych wzorach, dostrzeżonego przez p. B. Danielewicza.

K. Ż.

7. ***Kępiński S.*** *O całkach rozwiązań równań różniczkowych z sobą sprzężonych rzędu 2-go, posiadających trzy punkty osobliwe.* Rozpr. Akad. Um. w Krakowie, **37**, 112—138.

W pracy dawniejszej p. t.: O całkach rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych liniowych jednorodnych rzędu 2-go (Rozpr. Akad., 25, 264—328, porówn. referat w „Pracach mat.-fiz.", **6**, 199—203) badał autor pewne funkcye przestępne, które przy pomocy rozwiązań równania różniczkowego ze sobą sprzężonego o trzech punktach osobliwych, znajdujących się w odległości skończonej:

$$A_2 y'' + A_2 y' + A_0 y = 0$$

dają się sprowadzić do postaci analogicznej z postacią całek hypereliptycznych gatunku 3-go, a mianowicie do postaci (porówn. referat wyżej wspomniany):

$$Q_{ik} = \int\limits_y^x \int\limits_\eta^\zeta \frac{y_i\, v_k}{(z-\zeta)^3} \left[F_A{}^3 + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 F_h{}^s \right] dz\, d\zeta\,.$$

Zadaniem głównem pracy niniejszej jest dalsze badanie własności tych całek. W tym celu wprowadza autor w sposób analogiczny „całki gatunku 1-go":

$$w_i^{xy} = \int\limits_g^\infty y_i\, dz \qquad (i = 1, 2),$$

oraz „całki gatunku 2-go":

$$Z_t^{xy}(t) = \int\limits_y^x \frac{y_i}{(z-t)^3} \left[F_A^3 + \frac{1}{2} (z-t)^2 F_h^t \right] dz$$

i bada zachowanie się tych całek przy dowolnych obiegach jednego z krańców np. punktu x. Dowodzi między innemi twierdzenia, że różnica dwóch całek $Z_i(t)$ i $Z_i(t')$ z różnemi punktami nieskończonościowemi t i t' daje się wyrazić liniowo i jednorodnie przez funkcye y_i i y_i', skąd wynika bezpośrednio, że t. zw. moduły peryodyczności całek gatunku 2-go $Z_i(t)$ są od parametru t niezależne. Wskazuje następnie drogę do znalezienia związków dwuliniowych, zachodzących pomiędzy całkami gatunku 1-go i całkami gatunku 2-go, i przeprowadza rachunki dla pewnych peryodów częściowych. Okazuje się, że otrzymane związki są z pewnemi zmianami identyczne ze znanemi związkami dwuliniowemi L. Fuchsa, podanemi w rozprawie: „Ueber Relationen u. sw" (Crelle's Journal, t. **76**). Rezultaty i metody, podane przez autora, dają się z małemi zmianami zastosować i do równań różniczkowych, posiadających ilekolwiek punktów osobliwych.

S. D.

8. ***Klein F.*** *Odczyty o matematyce,* miane w Evanston od 28 sierpnia do 9 września 1893 dla członków Kongresu matematycznego, odbytego w czasie wystawy wszechświatowej w Chicago, spisane przez A. Ziveta, przełożył za upoważnieniem autora S. Dickstein. Z portretem F. Kleina. Warszawa. Wydawnictwo Redakcyi „Wiadomości matematycznych", 1899, 8°, str. II, 109.

W „Odczytach tych daje autor obraz kierunków rozwoju matematyki współczesnej, omawiając szerzej badania własne. Obraz ten ujęty jest w 12 odczytów o tytułach następujących: Clebsch, Sophus Lie (dwa wykłady), O postaci krzywych i powierzchni algebraicznych, Teorya funkcyj i Geometrya, O charakterze matematycznym intuicyi przestrzeniowej i o związku matematyki czystej z naukami stosowanemi, Przestępność liczb e i π, Liczby idealne, Rozwiązywanie równań algebraicznych stopni wyższych, O niektórych najnowszych postępach w teoryi funkcyj hypereliptycznych i abelowych, Najnowsze badania w Geometryi nieeuklidesowej, O studyach matematycznych w Getyndze. Dodatek: O rozwoju matematyki w uniwersytetach niemieckich.

Komperda H. Patrz Arvay W. i Komperda H..

9\. ***Krygowski Z.*** *Z teoryi funkcyj analitycznych.* Wiad. mat., **3**, str. 147—154.

W pracy tej zajmuje się autor szeregami kształtu:

(1) $$\sum_\nu \frac{c_\nu}{(z-a_\nu)^{m_\nu}}\,, \qquad z = re^{\theta i}\,.$$

W badaniach nad temi szeregami przyjmowano, że Σc_ν ma wartość skończoną. Autor zajmuje się przypadkiem, kiedy $\Sigma c_\nu = \Sigma\, \Phi(r, \theta; a_\nu)$ jest szeregiem rozbieżnym. Okazuje się, że jeszcze i wtedy szeregi (1) mogą być zbieżne i przedstawiać funkcye analityczne, że te funkcye posiadają obszary osobliwe i t. d. W dowodzie tych twierdzeń posługuje się autor pewnym szeregiem Tannery'ego $\psi(z)$, który dla $|z| < 1$ ma wartość -1 dla $|z| > 1$ wartość $+1$.

S. K.

10\. ***Lerch M.*** *Uwagi o równaniu Gaussa w teoryi funkcyi gamma.* Prace mat.-fiz., **10**, str. 1—7 i Dodatek do tego artykułu, tamże, str. 269—270.

Autor uważa funkcyę:

$$R(w, s) = \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{(w+n)^s}\,,$$

argumentu zespolonego s. Jej rozwinięcia w okolicy $s=0$ i $s=1$ są:

(1) $$R(w, s) = \left(\frac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}\, s + a_2 s^2 + \ldots$$

(2) $$R(w, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + A_1(s-1) + A_2(s-1)^2 + \ldots$$

Z szeregu (1) autor wyprowadza wzór Gaussa:

$$\Gamma\left(\frac{w}{m}\right) \Gamma\left(\frac{w+1}{m}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{w+m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\, m^{\frac{1}{2}-w}\, \Gamma(w).$$

Następnie z tego wzoru Gaussa wyprowadza wzór:

$$\lim_{\varrho=0} \left(-\frac{1}{\varrho} + \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{(w+n)^{1+\varrho}}\right) = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\,,$$

będący z innej strony bezpośrednim wynikiem szeregu (2).

Wreszcie z szeregu (2) dochodzi do całki:

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(w)\, dw = a \log a - a + \log \sqrt{2\pi}\,.$$

W dodatku znajduje się pewne uproszczenie poprzednich wywodów oraz uwaga, że autor przekonał się, iż wzory (1) i (2) były dawniej już podane, pierwszy przez H. Kinkelina, drugi przez E. Schrödera.

K. Ż.

11\. ***Lewicki W.*** *Kilka uwag o wzorze interpolacyjnym Lagrange'a.* Wiad. mat., **3**, str. 264—274.

Jeżeli dla $n+1$ danych, różnych od siebie, wielkości, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ zmiennej x wielomian całkowity y stopnia n przyjmuje wartości dane: $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, to y można przedstawić albo znanym interpolacyjnym wzorem Lagrange'a, albo też wyznaczyć z równania:

$$\begin{vmatrix} y & , 1, & x & , \ldots, & x^n \\ y_1 & , 1, & x_1 & , \ldots, & x_1{}^n \\ . & . & . & . & . \\ y_{n+1} & , 1, & x_{n+1} & , \ldots, & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Autor zajmuje się przypadkami, w których wielkości dane doprowadzają do wielomianu niższego stopnia, niż n-ty. Obszerne wywody autora można, zdaniem naszem, zastąpić widoczną uwagą, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wielomian y nie zawierał potęgi x^k, jest, żeby ilość dołączona do wyrazu x^k w podanym wyznaczniku była tożsamościowo równa zeru; stąd zaś bezpośrednio wynikają warunki, aby wielomian był nie stopnia n, ale np. stopnia $\lambda < n$. Zaznaczyć też winniśmy i niektóre błędy rozumowania. W ostatnim ustępie autor zamiast wielkości y_ν wprowadza do wzoru Lagrange'a wielkości $\bar{y}_\nu$, związane z poprzedniemi podstawieniem liniowem i jednorodnem; jeżeli wogóle był jakikolwiek interes wykonywania tego tak łatwego przekształcenia, to można było pisać o tem o wiele krócej.

K. Ż.

12. ***Meyer Fr.*** *O stanie obecnym teoryi niezmienników.* Przełożył za upoważnieniem autora S. Dickstein. (Dokończenie). Prace mat-fizycz. **10**, str. 193—268.

Zawiera ciąg dalszy części drugiej: „Pokrewieństwo form", a mianowicie: C. Metodykę, symbolikę i procesy niezmiennicze; Przypisy oraz Dopełnienia, w których jest mowa o przekształceniach wyższych, o niezmiennikach rozszerzonej grupy rzutowej, o niezmiennikach różniczkowych rzutowych, występujących w teoryi krzywizny, o parametrach różniczkowych, o specyalnych grupach podstawień i formach; o kombinantach i apolarności o wypadkowych, wyróżnikach, o zastosowaniu teoryi form do teoryi grup przekształceń skończonych ciągłych.

13. ***Meyer Fr.*** *O stanie obecnym teoryi niezmienników.* Przełożył za upoważnieniem autora S. Dickstein. Warszawa, 1899, 8-a wiel., str. II—185.

Praca ta drukowana częściami w tomach VII—X „Prac mat.-fizycznych", wydaną została jako całość w osobnej broszurze i opatrzona skorowidzem nazwisk.

14. ***Pierpont J.*** *O arytmetyzacyi matematyki.* Wykład miany na zgromadzeniu amerykańskiego Towarzystwa matematycznego. Przekład z Buletynu tegoż Towarzystwa (maj. 1899). Wiad. mat., **3**, 249—263.

Autor ma na celu wykazanie, że jedynie metody arytmetyczne stanowią zupełnie pewną podstawę Analizy w dzisiejszym stanie nauki. W tym celu wypowiada uwagi krytyczne o pojęciach: wielkości i liczby, linii krzywej, ruchu, ciągłości, o rektyfikacyi linii krzywych, kwadraturze, i stara się stwierdzić, że rozważania, na samej intuicyi geometrycznej oparte, nie wystarczają do uzasadnienia powyższych pojęć oraz odnośnych metod analizy.

15. ***Puzyna J.*** *O twierdzeniu upraszczającem obliczanie czynników wykładniczych w Weierstrassowskiej teoryi funkcyj eliptycznych.* Prace mat.-fizyczne, **10**, 8—15.

Uproszczenie rzeczone polega na następującem twierdzeniu. Funkcya całkowita $\gamma(u)$, posiadająca własność:

$$\gamma(u+2\omega) - \gamma(u) = c$$

redukuje się do funkcyi wymiernej całkowitej stopnia 1-go: $\gamma(u) = \frac{c}{2\omega}u + c''$, gdzie c'' jest stałą dowolną. Okazawszy to twierdzenie, stosuje je autor w dowodach dwu następujących twierdzeń z teoryi funkcyj eliptycznych:

1) Funkcyę Weierstrassa $\sigma(u)$ można przedstawić przez:

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2w_1}} \sin\frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2w_1}}{\sin^2 \frac{\nu\pi w_3}{w_1}}\right).$$

2) Każda funkcya peryodyczna o peryodach $2\omega_1$, $2\omega_3$ posiada tyle zer $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, co biegunów $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ i pozwala się przedstawić w formie:

$$\varphi(u) = c\,\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_\nu)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_\nu)}\,e^{c''};$$

stałą c'' można wyznaczyć z warunków peryodyczności. *SK.*

61. ***Rudzki T.*** *O kwadraturach krzywych, utworzonych ruchem posuwistym figury niezmiennej.* Wiad. mat., **3**, 1—39.

Zadaniem tej rozprawy jest treściwe przedstawienie wyników dotychczasowych badań nad teoryą kwadratury rulet, która powstała i rozwinęła się dzięki pracom Steinera, Gilberta, Williamsona, Holditscha, Amslera, Darboux'a i wielu innych, oraz podanie niektórych uogólnień i zastosowań. Nie możemy tu wymienić szczegółowo wszystkiego, o czem mowa w tej rozprawie; powiemy tylko krótko, że w § **1**, po wyprowadzeniu wzoru na wielkość pola opisanego przez promień wodzący OM, gdzie O jest punkt dowolnie obrany na płaszczyźnie figury F, M zaś punkt dowolny z figurą związanej, podaje autor między innemi twierdzenie Steinera o polu opisanem przez t. zw. środek pól rulet, oraz pewien przykład ruchu posuwistego t. zw. dwukąta (wzięty z Reuleaux'a). W § 2 rozważa pole, opisane przez odcinek prostej, łączącej punkt M ze środkiem chwilowym P obrotu figury F i stosuje to rozważanie do wielokątów zamkniętych. W § 3, idąc za Darboux'em i Schumannem, rozważa pola krzywych, obwiedzionych przez linie proste figury F, i wyprowadza odnoszące się tu twierdzenia Ribaucoura i Darboux'a. W § 4 bierze pod uwagę układ krzywych algebraicznych o m parametrach i bada prawo zmienności pola lub łuku powłóczących tych linij krzywych w zależności od zmiany parametrów a_k lub od zmiany prawa ruchu figury F. W § 5, przechodząc do uogólnienia poprzednich wywodów na konfiguracye punktów, które podczas ruchu zmieniają się według pewnego prawa, np. według prawa przekształcenia rzutowego, wyprowadza wzory dla hodografów punktów figury F, poruszającej się z określoną w każdej chwili prędkością kątową. W § 6 rozważa figurę, biorącą równocześnie udział w dwóch ruchach posuwistych, gdy przy każdym z nich pole rulety punktu M ma wielkość inną; wyjaśnia to na przykładzie czworoboku stawowego $ABCD$, w którym boki AB, CD wykonywają jednocześnie około punktu A i D obroty całkowite. Kończy pracę twierdzenie Koenigsa, odnoszące się do przypadku, w którym krzywa (p) toczy się najprzód po jednej, potem zaś po drugiej stronie innej krzywej (π).

S. D.

17. **Rudzki T.** *O objętościach brył, utworzonych ruchem przestrzennym figury niezmiennej.* Wiad. mat., **3**, 215—248.

W artykule niniejszym podaje autor niektóre własności ruchów w przestrzeni, stanowiące niejako uogólnienie własności ruchów posuwistych na płaszczyźnie, rozważonych przezeń w pracy poprzedzającej.

Rozpoczyna (§ 1) od twierdzenia Koenigsa (Leçons de Cinématique, p. 437), stanowiącego uogólnienie znanego twierdzenia Pappusa-Guldina a wyrażającego objętość V, utworzoną obrotem powierzchni jakiejkolwiek S, ograniczonej krzywą zamkniętą C. Oblicza objętość bryły V_{AB}, opisanej przez trójkąt ABO, w którym AO i BO są wektorami, łączącemi dwa punkty figury danej A, B z punktem nieruchomym O (początkiem układu nieruchomego) i wyprowadza stąd związek pomiędzy objętościami brył opisanych przez pewną liczbę odcinków $\overline{A_k B_k}$ figury F, mianowicie związek liniowy $\Sigma \gamma_k V_{\overline{A_k B_k}} = 0$, w którym spółczynniki γ_k są jedynie funkcyami wzajemnych odległości punktów A_k, B_k. Bada własności środka układu powierzchni stopnia 2-go, dających rozkład objętości, które odpowiadają rozmaitym poruszającym się punktom. Rozważa wartość pewnej całki, wyrażającej objętość V stożka, którego wierzchołek jest początkiem układu prostokątnego ruchomego, podstawę zaś stanowi część powierzchni, odniesionej do układu spółrzędnych krzywoliniowych u, v. Przechodzi do ruchów przestrzennych, badanych przez Mannheima, gdzie położenia figury

ruchomej F są funkcyami dwóch parametrów niezależnych (u, v), tak że każdy punkt podczas swego ruchu pozostaje wogóle na pewnej powierzchni, zwanej powierzchnią torową tego punktu. Podaje i roztrząsa wzór, podany przez Darboux'a na objętość stożka, którego podstawę tworzy część tej powierzchni torowej, wierzchołek zaś jest początkiem układu nieruchomego. Oblicza dla ruchów dwuparametrowych objętość W, zawartą pomiędzy pewną częścią torową danego punktu, ograniczającemi ją normalnemi, oraz centrodyą (π). Podaje niektóre zastosowania otrzymanych rezultatów do teoryi krzywych płaskich. Wyprowadza związek, zachodzący pomiędzy objętościami, odpowiadającemi punktom prostej, poruszającej się jakimkolwiek sposobem względem układu nieruchomego. Przedstawia w krótkości rezultaty, otrzymane przy rozważaniu powierzchni powłóczonych przez płaszczyzny figury F przy ruchu przestrzennym.

S. D.

18. **Sochocki J.** *O równaniach stopnia trzeciego.* Wiad. mat., **3**, 119—137.

19. „ *O równaniach stopnia trzeciego i czwartego.* Prace mat.-fiz., **10**, 136—177.

Artykuł pierwszy stanowi wyjątek z rozprawy drugiej.

Dla równania stopnia trzeciego postaci $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$, po wprowadzeniu t. zw. modułu równania, określonego wzorem:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2,$$

oraz mnożnika:

$$\frac{1}{e_1 - e_3} = \lambda,$$

gdzie e_1, e_2, e_3 są pierwiastkami równania, ustanawia autor t. zw. równanie rozwiązujące modułowe stopnia 6-go, i wyraża pierwiastki równania danego za pomocą pierwiastków równania modułowego. W podobny sposób ustanawia równanie stopnia 6-go, którego pierwiastkami są wartości mnożnika λ, t. j. równanie rozwiązujące mnożnikowe i wyraża pierwiastki e_1, e_2, e_3 przez pierwiastki równania mnożnikowego. Następnie podaje szczegółowszemu badaniu zależność parametrów g_2, g_3, wyróżnika $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$ i pierwiastków e_1, e_2, e_0 od modułu i mnożnika, uważanych za zmienne niezależne (jak to dzieje się w teoryi funkcyj eliptycznych), a mianowicie: określa znaki niezmienników pierwszego g_2 i drugiego g_3 w zależności od modułu i bada przebieg tych dwóch niezmienników, oraz t. zw. niezmiennika „bezwzględnego“ $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$, uważanych za funkcye ilości k^2.

Równanie modułowe 6 go stopnia, przez wprowadzenie nowej rozwiązującej pomocniczej, przekształca na równanie stopnia 3-go postaci:

$$4z''^3 - 27\,Jz'' + 27\,J = 0$$

i wyprowadza związek pomiędzy odpowiedniemi pierwiastkami równania danego i tego ostatniego.

Dla równania stopnia czwartego postaci:

$$T = p_0\,t^4 + 4p_1\,t^3 + 6p_2\,t^2 + 4p_3\,t + p_4 = 0$$

o pierwiastkach t_0, t_1, t_2, t_3, autor, wziąwszy za punkt wyjścia rozwiązującą **Lagrange'a**:

$$z = t_0\,t_3 + t_1\,t_2\,,$$

idzie drogą, wskazaną przez Lagrange'a, przez wprowadzenie atoli niektórych zmian upraszcza skomplikowane w tej metodzie rachunki i doprowadza je do końca. W tym celu rozwiązującą z zastępuje rozwiązującą x, określoną wzorem $\frac{4}{p_0}x = \frac{2p_2}{p_0} - z$ i ze znanego równania stopnia trzeciego na z otrzymuje na wyznaczenie ilości x równanie stopnia 3-go postaci:

$$X = 4\,x^3 - g_2\,x - g_3 = 0,$$

gdzie g_2 i g_3 są pewnemi wielomianami: pierwszy stopnia 2-go, drugi stopnia 3-go spółczynników p równania danego. Moduł i mnożnik tego równania stopnia 3-go, uważane za funkcye pierwiastków $t_0, t_1, \ldots$ danego równania stopnia 4-go, nazywa modułem i mnożnikiem tego ostatniego. Łatwo okazać, że stosunek anharmoniczny czterech pierwiastków funkcyi T równa się stosunkowi anharmonicznemu czterech pierwiastków funkcyi $X = 0\,x^4 + 4\,x^3 - g_2\,x - g_3$, t. j. że funkcye $T(t)$ i $X(x)$ otrzymują się jedna z drugiej przez podstawienie liniowe postaci:

$$t = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\,.$$

Opierając się na pewnych, łatwych do sprawdzenia, związkach pomiędzy pochodnemi funkcyi T, autor znajduje takie podstawienie:

$$t = t_0 + \frac{6\,T'(t_0)}{24\,x - T'''(t_0)}\,,$$

gdzie t_0 oznacza którykolwiek z pierwiastków pojedyńczych równania $T=0$.

Przekształcenie to daje się zarazem zastosować do redukcyi całki:

$$\int f\,(t, \sqrt{T(t)})\,\frac{dt}{\sqrt{T}}\,,$$

gdzie f oznacza funkcyę wymierną. W dalszym ciągu badania, zakładając $p_0=1$ i wprowadzając nowe dwa parametry:

$$x_0 = p_1^{\,2} - p_2,\quad y_0 = 2p_1^{\,3} - 3p_1\,p_2 + p_3$$

wyraża wszystkie cztery parametry x_0, y_0, g_2, g_3 przez pierwiastki równania danego, bada przebieg i własności krzywej stopnia 3-go:

$$y^2 = 4\,x^3 - g_2\,x - g_3\,,$$

którą nazywa rozwiązującą geometryczną danego równania $T(t) = 0$, i podaje nową prostą metodę przekształcenia całki eliptycznej:

$$\int f\,(\sqrt{T})\,\frac{dt}{\sqrt{T}}\,,$$

na całkę ze zmienną x:

$$\int F\,(x, \sqrt{X})\,\frac{dx}{\sqrt{X}}\,,$$

gdzie F jest również funkcyą wymierną. Przechodząc nakoniec do ogólnego rozwiązania równania stopnia czwartego, i oznaczając, jak zwykle, pierwiastki odpowiedniej rozwiązującej stopnia 3-go:

$$4x^3 - g_2\,x - g_3 = 0$$

przez e_1, e_2, e_3 wyprowadza wzór ogólny postaci:

$$t = \sqrt{x_0 - e_1} + \sqrt{x_0 - e_2} + \sqrt{x_0 - e_3}\,,$$

w którym dwa pierwiastniki mogą przyjmować znaki dowolne, a znak trzeciego określa się z warunku:

$$\sqrt{x_0 - e_1}\,.\,\sqrt{x_0 - e_2}\,.\,\sqrt{x_0 - e_3} = -\frac{1}{2}\,y_0\,.$$

Wreszcie roztrząsa zachodzące tu przypadki szczególne. *S. D.*

20. ***Vivanti G.*** *O pojęciu pochodnej w teoryi elementarnej funkcyj analitycznych.* Przekład z „Rendinconti del Circolo matematico di Palermo" (1899). Wiad. mat., **3**, str. 138—147.

Pochodną szeregu potęgowego, przedstawiającego funkcyę analityczną $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, wprowadza autor na podstawie określenia jej przez szereg $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\, a_{i+1} z^i$ i wyprowadza stąd twierdzenia zasadnicze teoryi pochodnych.

21. ***Wierzbicki E.*** *Odwzorowania nie zmieniające pól powierzchni, jako przykład do teoryi niezmienników różniczkowych.* Prace matem.-fizyczne, **10**, str. 129—134.

W artykule tym za pomocą metody właściwej teoryi niezmienników różniczkowych ciągłych grup przekształceń udowodnione są znane twierdzenia o takich odwzorowaniach dwóch powierzchni, że odpowiadające sobie nieskończenie małe pola są sobie równe. *K. Ż.*

22. ***Żorawski K.*** *Przyczynek do geometryi nieskończenie małych przekształceń.* Rozpr. Ak. Um. w Krakowie, **37**, str. 154—175.

W pracy tej autor zajmuje się pewnemi przypadkami zmienności funkcyj przy punktowych przekształceniach płaszczyzny. Chodzi tu mianowicie o zmiany, którym podlegają funkcye zależne od x, y i $\frac{dy}{dx}$ przy przekształceniach grup jednoczęściowych zmiennych x i y. Jeżeli $\frac{dy}{dx}$ należy do pewnej określonej rodziny linij krzywych, to każdą zmianę wartości uważanej funkcyi można wyrazić w zależności tylko od spółrzędnych x, y i parametru grupy t. Uważając różne przypadki takiej zmienności, autor zwraca przedewszystkiem uwagę na zmienność, którą nazywa równomierną.

Niech uważana funkcya będzie $H\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, to:

$$\frac{\delta}{\delta t} H\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = w\,(x, y)\,, \tag{1}$$

będzie pewnem równaniem różniczkowem zwyczajnem rzędu 1-go. Jeżeli temu równaniu (1) można uczynić zadość, biorąc:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{2}$$

i jeżeli (2) jest niezmiennem równaniem grupy, to H zmienia się wzdłuż rodziny (2) równomiernie z szybkością w. Jeżeli zaś równanie (1) jest niezmiennem, to równomierność taką autor nazywa doskonałą. Gdy H jest styczną kąta krzywych rodziny z torami grupy, autor przeprowadza rachunki, prowadzące do odróżnienia wszystkich przypadków równomierności doskonałej i ilustruje je przykładem z zakresu trwałego ruchu cieczy po prostych równoległych do osi x. *S. K.*

23. ***Żorawski K.*** *O zbieżności szeregów odwracających.* Rozpr. Ak. Um, **37**, str. 139—153.

Szereg tak zwany odwrotny równania

$$f\,(z) = \zeta, \tag{1}$$

gdzie $f\,(z)$ jest funkcyą analityczną, t. j. szereg:

$$z = z_{\zeta=\gamma} + \sum_1^{\infty} {}_n \frac{(\zeta-\gamma)^n}{n!} \left(\frac{d^n z}{d\zeta^n}\right)_{\zeta=\gamma} \tag{2}$$

można rozważać z dwojakiego punktu widzenia. Albo szereg taki określa element funkcyi z jako funkcyi zmiennej ζ w obszarze punktu γ, albo, gdy się w nim uważa $\zeta=\zeta_0$ za stałe a $\gamma = f(c)$ za zmienne, szereg:

$$z\,(c) = c + \sum_1^{\infty} \frac{[\zeta_0 - f\,(c)]^n}{n!} \left(\frac{d^n\, z}{d\zeta^n}\right)_{z=c}, \tag{3}$$

o ile jest zbieżny, określa pierwiastki równania $f\,(z) = \zeta_0$. Ta druga interpretacya stanowi główny przedmiot tej pracy. Idzie tu mianowicie o wyznaczenie obszarów zbieżności szeregu (3). Dla wszystkich wartości c takiego obszaru szereg przedstawia jeden i ten sam pierwiastek. Obszary te zbieżności oznacza autor naprzód na powierzchni Riemanna, należącej do funkcyi $z\,(\zeta)$, a następnie odwzorowuje je na płaszczyznę z. (Gdy $f\,(z)$ jest wielomianem, obszary te są ograniczone stelloidami). Teorya powyższa jest objaśniona kilku przykładami. *S. K.*

24. **Żorawski K.** *O pewnych prądach matematyki spółczesnej.* Wiadomości matem., t. **3**, str. 48—53.

W artykule tym autor, zastanawiając się nad metodami matematyki, rozróżnia metody formalne i rzeczowe. Pierwsze odnoszą się do ogólnego podania działań i wzorów. rozwiązujących zagadnienie, drugie do badania możliwości rozwiązania i jego natury. W różnych działach matematyki, które autor przebiega w niewielu wyrazach, znajdujemy przewagę bądź jednej, bądź drugiej kategoryi metod. *S. K.*

25. **Żorawski K.** *O działalności naukowej Sophusa Liego.* Wiadom. matem., **3**, str 85—119.

W treściwym wykładzie przedstawia autor życie i prace zmarłego niedawno matematyka Sophusa Liego. Z pośród różnorodnych dziedzin działalności tego wielkiego uczonego, autor omawia przedewszystkiem podstawowe pojęcia teoryi przekształceń oraz metodę zastosowania tych pojęć do różnych zagadnień z innych działów matematyki. *S. K.*

(Dok. nast.).