O warunkach niezmienności pewnych równań różniczkowych przy nieskończenie małych przekształceniach.

NAPISAŁ

K. ŻORAWSKI.

W tym artykule zajmiemy się równaniami różniczkowemi zwyczajnemi pierwszego rzędu a drugiego stopnia względem pochodnej. Chodzić nam będzie o zestawienie warunków niezmienności takich równań przy nieskończenie małych przekształceniach punktowych, a obok warunków niezmienności obu rodzin linij krzywych, czyniących zadość równaniu, uwzględnimy także warunki niezmienności tylko jednej z tych rodzin. Z uwagi na zastosowania geometryczne, których przykład przytaczamy w końcu artykułu, przeprowadzimy dyskusyę niezmienności pewnej szczególnej postaci równań pierwszego rzędu a drugiego stopnia.

Uważajmy z jednej strony równanie różniczkowe:

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 = 0, \tag{1}$$

gdzie A, B, C są funkcyami zmiennych x i y, z drugiej strony nieskończenie małe przekształcenie:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}\,. \tag{2}$$

Zapytujemy naprzód, przy zachowaniu jakich warunków równanie różniczkowe (1) zezwala na nieskończenie małe przekształcenie (2).

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

$$(3)\quad \begin{cases} L = U(A) + 2\left(A\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + B\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ M = U(B) + A\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + B\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right) + C\dfrac{\partial\eta}{\partial x}, \\ N = U(C) + 2\left(B\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + C\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right), \end{cases}$$

to można będzie warunki te napisać w kształcie:

$$(4)\qquad L = kA, \quad M = kB, \quad N = kC,$$

gdzie k oznacza dowolną funkcyę zmiennych x i y. Gdy C nie równa się zeru, to można warunkom (4) nadać kształt:

$$(5)\qquad CL - AN = 0, \quad CM - BN = 0.$$

Jeżeli zaś $C = 0$, ale B jest odmienne od zera, to mamy warunki:

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \quad BL - AM = 0.$$

Gdy wreszcie $C = 0$ i $B = 0$, to równanie (1) zezwala na nieskończenie małe przekształcenie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0.$$

Równanie (1) określa dwie rodziny krzywych całkowych. Może się zdarzyć, że nieskończenie małe przekształcenie (2) pozostawia bez zmiany tylko jednę z tych rodzin; zapytujemy tedy, w jakich warunkach to ma miejsce. Gdy naprzód C nie równa się zeru, to można równanie różniczkowe napisać w postaci:

$$(6)\qquad y' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}.$$

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że:

$$U(y') = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial\xi}{\partial y} y'^2,$$

to znajdziemy bez trudności, że jedna z dwu rodzin (6) pozostaje bez zmiany, gdy ma miejsce warunek:

$$(7)\qquad C(CL - AN) + 2(-B \pm \sqrt{B^2 - AC})(CM - BN) = 0.$$

We wzorach (6) i (7) należy uwzględnić albo górne, albo też dolne znaki. Jeżeli warunek (7) ma zachodzić dla obu znaków, to otrzymujemy poprzednie warunki (5). Jeżeli dalej $C = 0$, to równanie (1) rozpada się na dwa równania:

$$dx = 0, \quad A\,dx + 2B\,dy = 0$$

i w przypadku, gdy B jest odmienne od zera, równania te są równaniami niezmiennemi, gdy są spełnione odpowiednio warunki:

$$(8)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \quad BL - AM + \frac{1}{2} A^2 \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0.$$

Jeżeli zaś i $B = 0$, to przypadek ten redukuje się do poprzedniego, bo wówczas mamy tylko jednę rodzinę krzywych. Jeżeli wreszcie podwójna rodzina krzywych ma miejsce w przypadku, gdy C nie równa się zeru, t. j. gdy mamy $B^2 - AC = 0$, to należy uwzględnić warunki (5) i łatwo okazać, że wystarczy uwzględnić drugi z tych warunków.

Te wzory zastosujemy teraz do rozwiązania następującego zagadnienia.

Wyprowadzić warunki, którym musi czynić zadość funkcya $P(x, y)$, ażeby równanie różniczkowe:

$$(9)\qquad (a - P)\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + (c - P)\,dy^2 = 0,$$

gdzie a, b, c są danemi funkcyami zmiennych x i y:

1) określało dwie rodziny niezmienne przekształcenia Uf;

2) ażeby tylko jedna rodzina tego równania była niezmienną.

Przystępując naprzód do traktowania pierwszej części tego zadania, musimy zastosować wzory (3) i (4). Otrzymujemy warunki:

$$(10)\quad \begin{cases} U(P) - kP + 2\dfrac{\partial\xi}{\partial x} P + ak = l, \\ \left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) P + bk = m, \\ U(P) - kP + 2\dfrac{\partial\eta}{\partial y} P + ck = n, \end{cases}$$

gdzie przez l, m, n oznaczono wartości:

$$
(11)\qquad \left\{
\begin{aligned}
l &= U(a) + 2\left(a\frac{\partial\xi}{\partial x} + b\frac{\partial\eta}{\partial x}\right),\\
m &= U(b) + a\frac{\partial\xi}{\partial y} + b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + c\frac{\partial\eta}{\partial x},\\
n &= U(c) + 2\left(b\frac{\partial\xi}{\partial y} + c\frac{\partial\eta}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Z warunków tych wynikają równania:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)P + bk = m,\\
&2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)P + (c-a)\,k = n -
\end{aligned}
$$

i jeżeli jeszcze wprowadzimy oznaczenia:

$$
(13)\qquad \left\{
\begin{aligned}
D_0 &= (c-a)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) - 2b\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right),\\
D_1 &= (c-a)\,m - b\,(n-l),\\
D_2 &= (n-l)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) - 2m\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right.
$$

to w przypadku, gdy D_0 jest odmienne od zera, otrzymamy wartości:

$$
(14)\qquad P = \frac{D_1}{D_0}, \qquad k = \frac{D_2}{D_0}.
$$

Podstawiając te wartości w pierwsze i trzecie z równań (10), otrzymujemy:

$$
(15)\qquad U(P) - kP = \frac{D_3}{D_0},
$$

gdzie

$$
D_3 = l\,D_0 - 2\frac{\partial\xi}{\partial x}D_1 - aD_2 = nD_0 - 2\frac{\partial\eta}{\partial y}D_1 - cD_2.
$$

Ażeby dla otrzymanej wartości funkcyi P równanie (9) istotnie było równaniem niezmiennem, muszą równości (14) i (15) być ze sobą w zgodzie, t. j. otrzymujemy warunek konieczny i wystarczający:

$$
(16)\qquad U\left(\frac{D_1}{D_0}\right) - \frac{D_2}{D_0}\,\frac{D_1}{D_0} = \frac{D_3}{D_0}.
$$

Jeżeli zaś $D_0=0$, to muszą mieć miejsce i równości $D_1=0$ i $D_2=0$. Można pokazać, że ten przypadek najzupełniej scharakteryzowany jest przez równości:

$$
(17)\qquad D_0 = 0, \qquad D_1 = 0,
$$

t. j. że z tych równości zawsze wynika $D_2 = 0$. W istocie, gdy wielkości $c-a$ i b nie są obie równe zeru, to z (17) na mocy wzorów (13) wynika, że i $D_2 = 0$; jeżeli zaś $c=a$ i $b=0$, można to sprawdzić bezpośrednio. Ażeby i dla przypadku (17) rachunki były bardziej przejrzyste, wprowadzimy jeszcze oznaczenia następujące:

$$
\begin{aligned}
bn - cm &= r, &\qquad 2b\frac{\partial\eta}{\partial y} - c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) &= \varrho,\\
cl - an &= s, &\qquad 2\left(c\frac{\partial\xi}{\partial x} - a\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) &= \sigma,\\
am - bl &= t, &\qquad a\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) - 2b\frac{\partial\xi}{\partial x} &= \tau.
\end{aligned}
$$

Z pomocą tych oznaczeń można równości (17) napisać w formie:

$$
(18)\qquad r + t = 0, \qquad \varrho + \tau = 0.
$$

W przypadku, określonym przez te równości, równania (12) sprowadzają się do jednego równania. Jeżeli $c - a$ jest odmienne od zera, to eliminacya wielkości k daje związek:

$$
(19)\qquad (c-a)\,U(P) + 2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)P^2 + (\sigma - n + l)\,P - s = 0,
$$

a jeżeli b jest odmienne od zera, to mamy związek:

$$
(20)\qquad b\,U(P) + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)P^2 + (\varrho - m)\,P - r = 0,
$$

który możemy także napisać w postaci:

$$bU(P) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) P^2 - (\tau + m) P + t = 0 \,. \tag{20'}$$

Zatem P określa się jednem równaniem cząstkowem przytoczonego kształtu.

Jeżeli wreszcie

$$c - a = 0\,, \qquad b = 0\,,$$

to musi być także:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \tag{21}$$

gdyby bowiem chociaż jeden z tych związków nie był spełniony, to byłoby $P = a$ i równanie (9) byłoby identycznością. To wynika z równań (12) przy uwzględnieniu wartości:

$$l = U(a) + 2a \frac{\partial \xi}{\partial x}\,, \quad m = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \quad n = U(a) + 2a \frac{\partial \eta}{\partial y}\,.$$

Jeżeli związki (21) istotnie są spełnione, to można P wybrać dowolnie i wówczas równanie (9) sprowadza się do postaci:

$$dx^2 + dy^2 = 0,$$

co zgadza się z tem, że warunki (21) określają nieskończenie małe odwzorowanie podobne.

W ten sposób zadanie 1) jest rozwiązane.

Zadanie 2) rozwiązuje się wogóle za pomocą warunku (7). Zwróćmy mianowicie uwagę na to, że w naszym przypadku L, M, N mają wartości:

$$L = l - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} P - U(P),$$

$$M = m - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) P,$$

$$N = n - 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} P - U(P),$$

to z warunku (7) otrzymamy związek:

$$\begin{aligned}&(c-P)\left\{(c-a)\,U(P) + 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) P^2 + (\sigma - n + l) P - s\right\} - 2\,(-b \\ &\pm \sqrt{b^2 - (a-P)(c-P)})\left\{bU(P) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) P^2 + (\varrho - m) - r\right\} = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Jeżeli zatem ma tylko jedna rodzina równania (9) pozostawać bez zmiany, to P musi czynić zadość temu równaniu i nie spełniać poprzednich warunków. Warunek ten jest fałszywy, gdy $P = c$ i gdy równanie (9) określa podwójną rodzinę krzywych. W pierwszym z tych przypadków mamy pierwszy albo drugi z warunków (8), które możemy napisać w postaci:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad bU(c) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) c^2 - (\tau + m)\, c + t - \frac{\partial \xi}{\partial y}\,(c-a)^2 = 0. \tag{23}$$

W drugim trzeba powrócić do warunków niezmienności dwu rodzin równania (9).

Zajmiemy się szczegółowiej tym ostatnim przypadkiem.

Załóżmy naprzód, że D_0 nie równa się zeru i że P obliczone z pierwszego ze wzorów (14) czyni zadość równaniu:

$$b^2 - (a - P)(c - P) = 0, \tag{24}$$

t. j. że mamy tożsamościowo:

$$b^2 D_0^2 - (aD_0 - D_1)(cD_0 - D_1) = 0. \tag{25}$$

Zbadamy, czy wówczas zawsze odnośne równanie (9) jest równaniem niezmiennem, t. j. czy zawsze spełniony jest warunek (16).

Odróżnimy dwa przypadki, zależnie od tego, czy wyznacznik

$$\Delta = (c-a)^2 + 4b^2,$$

jest odmienny od zera, czy też jest równy zeru. Niech naprzód Δ nie równa się zeru. Przez wykonanie działania Uf na związku (25) otrzymujemy dla wyrażenia $U\left(\frac{D_1}{D_0}\right)$ związek:

$$\left(a + c - 2\frac{D_1}{D_0}\right) U\left(\frac{D_1}{D_0}\right) + U(a+c)\frac{D_1}{D_0} + 2b\,U(b) - aU(c) - cU(a) = 0, \tag{26}$$

w którym spółczynnik wspomnianego wyrażenia, na mocy założenia o wyznaczniku Δ, jest odmienny od zera. Podstawiając wartość (16) w (26), a także stosując wzór:

$$\frac{D_3}{D_0} = \frac{l+n}{2} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{D_1}{D_0} - \frac{a+c}{2} \frac{D_2}{D_0},$$

i związek (25), otrzymujemy naprzód:

$$2b\, U(b) - a\, U(c) - c\, U(a) + \frac{1}{2}(a+c)(l+n) + 2(b^2-ac)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$
$$+ \left[U(a+c) - (l+n) + (a+c)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right] \frac{D_1}{D_0} - \frac{1}{2} \Delta \frac{D_2}{D_0} = 0.$$

Jeżeli zaś w dalszym ciągu zwrócimy uwagę na to, że ze wzorów (13) wynika wzór:

$$\Delta \frac{D_2}{D_0} = 4\, bm + (c-a)(n-l) - 2\left[(c-a)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + 2b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] \frac{D_1}{D_0},$$

oraz wyzyskamy odpowiednio wzory (11), to otrzymamy związek tożsamościowy. Zatem w przypadku, gdy Δ nie równa się zeru i gdy spełnione jest równanie (25) odnośne równanie (9) jest zawsze równaniem niezmiennem. Inaczej się rzeczy mają, gdy $\Delta = 0$, t. j. gdy

$$b = \pm \frac{c-a}{2} i.$$

Wówczas mamy wartość:

$$D_0 = (c-a)\left[\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \mp \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) i\right],$$

a równanie (9) spełnia się dla rodziny:

$$dx \mp i\, dy = 0.$$

Ponieważ zaś warunkiem niezmienności tej rodziny jest:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \mp \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) i = 0,$$

więc otrzymujemy $D_0 = 0$, t. j. przy założeniu $\Delta = 0$, niezmienność obu rodzin możliwą jest tylko wtedy, gdy zarazem $D_0 = 0$.

Pozostaje rozważyć ogólnie przypadek $D_0 = 0$. Łatwo sprawdzić, że jeżeli przytem $D_1 = 0$, to oba pierwiastki równania (24) spełniają związki (19), (20), t. j. że każdemu pierwiastkowi odpowiada niezmienne równanie (9). Z innej strony wiadomo, że jeżeli oba równania, odpowiadające dwóm funkcyom P, mają być niezmienne, to musi zachodzić przypadek uważany, t. j. tych równań niezmiennych musi być nieskończenie wiele. Wyjątkowym jest tu tylko przypadek $b = 0$ i $c = a$, bo w tym przypadku pierwiastek podwójny równania (24) doprowadza równanie (9) do tożsamości.

Powyższym rachunkom łatwo nadać znaczenie geometryczne.

Uważajmy powierzchnię, której element liniowy ma postać:

$$ds^2 = E\,(dx^2 + dy^2),$$

t. j. powierzchnię, na której x, y są spółrzędnemi izometrycznemi.

Jeżeli przez D, D', D'' nazwiemy wielkości zasadnicze drugiego rzędu, to wiadomo, że iloraz:

$$\frac{D\, dx^2 + 2\, D'\, dx\, dy + D''\, dy^2}{E\,(dx^2 + dy^2)} = \frac{1}{R}, \tag{27}$$

jest krzywizną przecięcia normalnego, którego kierunek określony jest wartością stosunku $\frac{dy}{dx}$. Jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

$$\frac{D}{E} = a, \quad \frac{D'}{E} = b, \quad \frac{D''}{E} = c, \quad \frac{1}{R} = P,$$

to związek (27) można będzie napisać w postaci (9):

$$(a-P)\, dx^2 + 2b\, dx\, dy + (c-P)\, dy^2 = 0$$

i traktując ten związek jako równanie różniczkowe, w którem P jest funkcyą zmiennych x, y, możemy powiedzieć, że równanie to określa dwie rodziny linij krzywych na powierzchni, które są w każdym punkcie styczne do przecięć normalnych, których krzywizny wyrażają się funkcyą P. Dla krótkości rodziny te można wprost nazwać rodzinami P i na mocy poprzednich rachunków można wprost odczytać warunki niezmienności tych rodzin przy nieskończenie małych przekształceniach na powierzchni.

Zwróćmy uwagę na to, że równanie (24):

$$b^2 - (a-P)(c-P) = 0.$$

przy założeniu, że Δ nie równa się zeru, określa krzywizny przecięć normalnych głównych, a odpowiednie rodziny P są rodzinami linij krzywiznowych.

W przypadku $\Delta = 0$ mamy rzeczywistą powierzchnię tylko wtedy, gdy $a=c$ i $b=0$, t. j. mamy albo kulę, albo płaszczyznę i krzywe (9) istnieją tylko wówczas gdy P nie równa się a, a wówczas mają postać:

$$dx^2 + dy^2 = 0,$$

t. j. są krzywemi minimalnemi. W dalszym ciągu mówić będziemy tylko o przypadkach, w których istnieją linie krzywiznowe.

Warunek, któremu ma czynić zadość funkcya P, ażeby jedna rodzina, P nie będąca rodziną linij krzywiznowych, pozostawała bez zmiany przy przekształceniu Uf, określa się jednem z równań (22), (23) i tym przypadkiem bliżej zajmować się nie będziemy.

Jeżeli zaś obie rodziny P mają pozostawać bez zmiany, ale nie mają pozostawać bez zmiany żadne pary rodzin do innych funkcyj P należące, to muszą mieć miejsce warunki (14) i (16), a należy zauważyć, że jeżeli warunek (14) daje którąkolwiek z krzywizn normalnych głównych t. j. jednę z rodzin linii krzywiznowych, to warunek (16) przez to samo jest spełniony.

Jeżeli wreszcie więcej niż jedna para rodzin P mają być rodzinami niezmiennemi, to nieskończenie małe przekształcenie Uf musi spełniać warunki (17). Gdy jednakowoż warunki te są spełnione, to pozostaje bez zmiany nieskończenie wiele par rodzin P, określonych równaniem cząstkowem (19) lub (20), a pomiędzy temi rodzinami zawsze znajdują się rodziny linij krzywiznowych.

METODY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO BEZWZGLĘDNEGO I ICH ZASTOSOWANIA.[1]

NAPISALI

G. RICCI i LEVI-CIVITA.

Przedmowa.

P. Poincaré[2]) napisał, że w naukach matematycznych dobre znakowanie jest tak samo ważnem filozoficznie, jak dobra klasyfikacya w naukach przyrodniczych. Oczywiście, a nawet z większą słusznością, można to samo powiedzieć o metodach; albowiem właśnie od wyboru metod zależy możliwość zmuszenia (że użyjemy tu znowu słów znakomitego geometry francuskiego) mnóstwa faktów, nie pozostających w żadnej widocznej łączności, do ugrupowania się według ich pokrewieństw naturalnych.

Można też powiedzieć, że twierdzenie, udowodnione na drogach krętych, przy pomocy sposobów sztucznych i rozważań, nie mających z niem łączności istotnej, jest często prawdą odkrytą tylko w połowie; albowiem zdarza się prawie zawsze, że to samo twierdzenie przedstawia się w sposób

1) Przekład, upoważniony przez Autorów, pracy Ich, ogłoszonej w t. 54 dziennika „Mathematische Annalen". S. D.

2) Przedmowa do dzieł Laguerre'a (Oeuvres de Laguerre), wydawanych przez Akademię Nauk w Paryżu.