

znajdujemy, że wszystkie nasze przekształcenia, przy których linie krzywiznowe są krzywymi spółzmiennymi, mogą być utworzone z przekształceń przez promienie odwrotne i z rozsunieć.

Jeżeli będziemy, idąc za Kleinem uważali, geometryę kul lub prostych, opartą na spółrzędnych X, Y, Z, H , jako geometryę metryczną o czterech zmiennych, to łatwo widzieć, że moje liniowe przekształcenie kul identyczne jest z ogółem wszystkich zachowujących podobieństwo cząsteczkowe przekształceń punktowych tej przestrzeni kulistej ¹⁾.

Zresztą mam zamiar te ostatnie teorie przedstawić wyczerpująco w innej rozprawie, poświęconej w ogóle geometrii przestrzeni wielowymiarowych ²⁾.

ksztalceniach biegunowych względem kompleksów liniowych mogą być dane dowolnie 1° pary biegunowych wzajemnych, które określają ós kompleksu, i 2° prosta kompleksu, p zostająca przy przekształceniu bez zmiany. Zważywszy to możemy przejście od (I,2,3,4,5) do (I,II,III,IV,V) odbyć stopniowo, t j: a) proste (1,2,3,4,5) przechodzą na (I',2',3',4',5'); b) drugi kompleks określony tak, by (I) była jego prostą i proste (I,2',3',4',5') przechodziły na (I,2'',III,4'',V): c) trzeci kompleks określony tak, by proste (2'',4'') przeszły na (II,IV): ponieważ zaś proste (I,III,V) przecinają pary biegunowych wzajemnych (2''-II) i (4''-IV), więc pozostaną one przy tem przekształceniu bez zmiany. Tak więc w końcu otrzymamy transformację dualistyczną: (1,2,3,4,5) na (I,2',III,4',V),

Przyp. tórn.

²⁾ Odpowiednie twierdzenie dla geometrii o n wymiarach podałem w r. 1871 w Göttinger Nachrichten N° 7. Następnie zauważyłem jeszcze, że wszystkie przekształcenia przestrzeni R_n , zachowujące podobieństwo cząsteczkowe, mogą być utworzone z przesunięć, przekształceń zachowujących podobieństwo i przekształceń przez promienie odwrotne ^{*)}. W związku z powyższem jest twierdzenie, polegające na tem, że jeżeli $x, \dots, x_n$ są takimi funkcjami-zmiennymi $y_1, y_2, \dots, y_n$, że

$$\sum dx^2 = \Phi(y_1, \dots, y_n) \sum dy^2,$$

to zachodzi równanie postaci:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) = \Pi(y_1, \dots, y_n) \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2.$$

Przyp. aut.

^{*)} Por. Lie, Theorie d. Transformationsgruppen, t. III, str. 351; pierwszy dowód tego ogólnego twierdzenia podał Darboux. Stosuje się on do przestrzeni o jakiegokolwiek liczbie wymiarów z wyjątkiem $n=2$. Przyp. tórn.

O RÓWNANIU O POCHODNYCH CZĄSTKOWYCH

$$\Delta u + \xi u + f = 0$$

I O FUNKCYACH HARMONICZNYCH.

NAPISAZ

S. ZAREMBA.

I. Wstęp.

1. Wiadomo, że różne pytania fizyki matematycznej prowadzą do zagadnienia następującego:

Niechaj $f(x, y, z)$ będzie funkcją daną spółrzędnych prostokątnych x, y, z punktu zmiennego, określoną w obszarze (D) , ograniczonym powierzchnią zamkniętą (S) , ξ zaś — parametrem zespolonym; wyznaczyć funkcję u zmiennych x, y, z , czyniącą zadość w całym obszarze (D) równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$(1) \quad \Delta u + \xi u + f(x, y, z) = 0,$$

gdzie:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

i gdzie nadto na ograniczeniu spełnia się warunek:

$$(2) \quad \frac{du}{dN} = hu,$$

w którym $\frac{du}{dN}$ oznacza pochodną funkcji u , wziętą według normalnej wewnętrznej, h zaś oznacza stałą rzeczywistą i nieujemną.

Zagadnienie to rozwiązał ściśle Poincaré¹⁾ w przypadku szczególnym, w którym $h = \infty$, t. j. gdy warunek (2) zastępuje następujący:

$$(3) \quad (u)_i = 0,$$

gdzie $(u)_i$ oznacza wartość funkcji u na powierzchni (S) . Znakomity geometra wykazał, że w tym przypadku funkcja u , uważana za funkcję parametru ξ , istnieje w całej rozciągłości płaszczyzny tej zmiennej zespolonej i że jest funkcją meromorficzną, mającą tylko bieguny pojedyncze, położone wszystkie na dodatniej części osi rzeczywistej; pozostałościami (rezyduami) są funkcje godne uwagi zmiennych x, y, z , należące do kategorii funkcji, które nazywał harmonicznymi.

Poincaré dowiódł nadto, — mowa tu zawsze o przypadku szczególnym, w którym warunek (2) redukuje się do warunku (3) — że funkcja dowolna $f(x, y, z)$, której pochodne sześciu pierwszych rzędów są skończonymi w całej rozciągłości obszaru (D) i która równa jest zeru, wraz z wielkościami Δf i $\Delta \Delta f$ na ograniczeniu (S) , daje się rozwinąć na szereg według funkcji harmoniczných.

Dla przypadku ogólnego Poincaré dał cenne wskazówki; lecz, jak sam powiada, doszedł do rezultatów niezupełnie ścisłych.

Zamierzam, korzystając z rozprawy zasadniczej Poincarégo, podać rozwiązanie zupełnie ściśle zagadnienia, postawionego na czele tego ustępu; ustanowić w przypadku ogólnym istnienie funkcji, nazwanych przez Poincarégo harmonicznymi; wykazać wreszcie, że funkcja $f(x, y, z)$ daje się rozwinąć na szereg, postępujący według funkcji harmoniczných, jeżeli tylko funkcja ta ma pochodne drugie ciągłe i jeżeli mamy nadto

$$\frac{df}{dN} = hf.$$

Zamiast oprzeć się na teorii równania Laplace'a, wyjdę z równania ogólniejszego $\Delta v + \xi v = 0$. Pozwoli mi to nie tylko uniknąć trudności, które zatrzymały Poincarégo, ale i dać zarazem dowód bardzo prosty i bardzo ogólny zasady Dirichleta oraz innego interesującego twierdzenia, odnoszącego się do równania Laplace'a.

Miałem już sposobność wskazania krótko głównych rezultatów pracy niniejszej w nocie, ogłoszonej w r. 1899 w Sprawozdaniach Akademii nauk w Paryżu, oraz w innych artykułach w r. 1899 w „Rocznikach naukowych Szkoły normalnej wyższej“ i w r. 1900 w dzienniku „Journal de mathématiques pures et appliquées“. Lecz zdawało mi się rzeczą nie pozbawioną interesu poddać to pytanie nowemu badaniu, a to w celu zaprowadzenia większej

¹⁾ Sur les équations de la Physique mathématique. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1894.

jedności w metodach dowodzenia, oraz w celu zupełniejszego traktowania różnych punktów, zaledwie dotkniętych w pracach poprzednich, mianowicie punktów, dotyczących równania Laplace'a.

Dodaję, że w pracy późniejszej zamierzam zbadać zagadnienie analogiczne, odnoszące się do przypadku, w którym są tylko dwie zmienne niezależne.

II. Dowód różnych nierówności.

2. Poświęcam ustęp niniejszy definicyom pewnych oznaczeń i wysłowięniom założeń, które utrzymamy w całej tej pracy. Używać będziemy symboli (D) i (S) w znaczeniu, które im nadałismy we Wstępie; przyjmujemy, że powierzchnia (S) , która może zresztą składać się z kilku powłók zamkniętych, zupełnie oddzielonych, ma w każdym ze swych punktów płaszczyznę styczną ściśle oznaczoną i posiada nadto własność, dającą się wysławić w ten sposób:

Umieścimy początek O współrzędnych w jakimkolwiek punkcie powierzchni, skierujemy oś z według normalnej wewnętrznej i oddzielimy przy pomocy krzywej zamkniętej (Σ') mały kawałek (S') powierzchni (S) od reszty (S'') tej powierzchni. Otóż przyjmujemy, że, niezależnie od położenia punktu O na powierzchni (S) , możemy rozporządzić krzywą (Σ') w ten sposób, aby jednocześnie zachodziły okoliczności następujące; Kawałek (S') będzie jednoznaczny i zawierać będzie punkt O ; równoległa do osi z może przecinać (S') tylko w jednym punkcie; rzutem prostokątnym krzywej (Σ') na płaszczyznę (x, y) jest koło (Σ) , o środku O i o promieniu R , niezależnym od położenia punktu O na powierzchni (S) ; jeżeli $z = f(x, y)$ jest równaniem kawałka (S) powierzchni, to funkcja $f(x, y)$ ma pochodne skończone aż do rzędu 2-go włącznie; wreszcie, jeżeli $f_2(x, y)$ oznacza którąkolwiek z pochodnych drugich funkcji $f(x, y)$, będzie:

$$(1) \quad |f_2(x, y) - f_2(x', y')| < A_3 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

gdzie A_3 jest stałą, niezależną od położenia punktu O na powierzchni (S) ¹⁾

Oznaczmy przez A_1 granicę wyższą bezwzględnych wartości pochodnych pierwszych funkcji $f(x, y)$, przez A_2 granicę wyższą bezwzględnych wartości pochodnych drugich i załóżmy, że na liczby A_1, A_2 wybrano wartości dość wielkie, aby można je było uważać za stałe, niezależne od położenia punktu O na powierzchni (S) .

¹⁾ Łatwo widzieć, że założenia, jakie tu czynimy o powierzchni (S) , różnią się tylko co do formy od założeń naszych w rozprawie, ogłoszonej w r. 1899 w „Annales de l'Ecole Normale supérieure“.

Przy opisanym dopiero co układzie osi rozważmy punkt P , umieszczony na osi z i niechaj będzie $[OP] \leq R$. Jest widocznym, że gdy długość R jest dość mała, wtedy każdy punkt powierzchni (S) różny od punktu O będzie bardziej oddalony od punktu P niż punkt O ; nadto minimum odległości od punktu P punktu zmiennego, mającego pozostawać na kawałku (S') powierzchni (S) nie będzie mniejsze od R . Załóżmy, że tak jest; tym sposobem unikniemy niepotrzebnych powikłań.

Uwidocznimy część rzeczywistą i czysto urojoną parametru ξ , znajdującego się w równaniu (1) Wstępu, t. j. położmy:

$$(2) \quad \xi = \alpha + i\beta,$$

i oznaczmy przez μ tę z wartości wyrażenia $\sqrt{-\xi}$, której część rzeczywista jest dodatnia. Niechaj b będzie współczynnikiem jedności urojonej w wyrażeniu μ , tak że

$$(3) \quad \mu = \alpha + bi; \quad \mu^2 = (\alpha + bi)^2 = -\xi = -\alpha - \beta i,$$

$$(4) \quad \alpha > 0;$$

oznaczmy wreszcie przez m moduł liczby μ . Będzie:

$$(5) \quad m^2 = \alpha^2 + b^2 = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

3. Położmy:

$$(6) \quad r = +\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Wiadomo, że wyrażenie $\frac{e^{-\mu r}}{r}$, uważane za funkcję ilości x, y, z czyni zadanie równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$(7) \quad \Delta v + \xi v = 0,$$

skąd wynika, że tożsamo stosuje się do każdej pochodnej jakiegokolwiek rzędu względem ilości x, y, z, x', y', z' tego samego wyrażenia.

Oto, co wypływa z uwag poprzedzających. Jeżeli założymy, że punkt (x', y', z') pozostaje na powierzchni (S) , jeżeli oznaczmy przez ds element tej powierzchni w punkcie uważanym i jeżeli σ jest funkcją ciągłą położenia punktu (x', y', z') na powierzchni, to każda z funkcji:

$$(8) \quad \Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

$$(9) \quad \Psi = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

—gdzie skażnik (S) oznacza, że całkowanie rozciąga się na całą powierzchnię (S) i gdzie $\frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r}$ przedstawia pochodną funkcji $\frac{e^{-\mu r}}{r}$, jako funkcji zmiennych x', y', z' względem normalnej wewnętrznej—czyli będzie zadose równaniu (7) w każdym punkcie, położonym wewnątrz powierzchni (S) .

Metody całkowania, stanowiące przedmiot tej pracy, polegają na własnościach funkcji Φ i Ψ , określonych przez wzory (8) i (9). Własności te są zupełnie analogiczne do własności klasycznych potencjału warstwy pojedynczej i warstwy podwójnej, rozpostartej na powierzchni. Mimo to, dla ustanowienia tych własności z całą pożądaną ogólnością i w postaci dokładnej, dla nas niezbędnej, rozwiniemy rachunki szczegółowo.

4. Dojdziemy łatwo do celu, po zbadaniu funkcji, którą zaraz określimy. Weźmy za początek współrzędnych punkt O , położony na powierzchni (S) , skierujmy oś z według normalnej wewnętrznej i niechaj, jak wyżej, $z=f(x, y)$ będzie równaniem kawałka (S') powierzchni (S) . W wyrażeniu (6) na r , położmy $z'=f(x', y')$ i oznaczmy przez $g(x', y')$ funkcję ciągłą zmiennych x', y' ; otóż kładziemy:

$$(10) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{4\alpha} \iint_{(S_0)} g \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy',$$

gdzie skażnik (S_0) oznacza, iż całkowanie powinno rozciągać się na cały obszar (S_0) , ograniczony kołem (Σ) , mającym za równanie $x^2 + y^2 = R^2$ i będącym rzutem na płaszczyznę (x, y) ograniczenia kawałka (S') powierzchni (S) .

Położmy:

$$\varphi_1(r) = \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$(2k-3) \varphi_k(r) = \frac{1}{r} \frac{d\varphi_{k-1}}{dr}, \quad (k=3, 4, 5 \dots);$$

przyjmijmy, że w r uczyniono $x=y=0$ i rozważmy całkę:

$$(11) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} F(x', y') \varphi_k d\omega' dy',$$

w której $F(x', y')$ jest funkcją taką, że

$$(12) \quad F(x', y') = (x'^2 + y'^2)^{\frac{j}{2}} F_1(x', y'),$$

gdzie $F_1(x', y')$ jest funkcją ciągłą. Mówić będziemy, że liczba $j - 2k + 1$ jest rzędem całki (11). Założenia powyższe oraz uwagi poniższe o całce (11) uproszczą znacznie dalszy nasz wykład.

Jest widocznym, że całka (11) przedstawia pewną funkcję zmiennej z ; oznaczmy ją przez $\chi(z)$, t. j. położmy:

$$(13) \quad \chi(z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} F(x', y') \varphi_k dx' dy',$$

Funkcja $\chi(z)$ jest oczywiście funkcją analityczną zmiennej z , i gdy rozważamy tylko wartości rzeczywiście tej zmiennej, co właściwie ma miejsce w naszym przypadku, funkcja ta ma osobliwości tylko dla $z=0$.

Łatwo sprawdzić, że w przypadku, gdy całka, określająca funkcję $\chi(z)$ jest rzędu -1 , wtedy funkcja ta pozostaje ciągłą nawet dla $z=0$. Założymy tedy, że całka (13) jest rzędu -1 . Oto w jaki sposób ze względu na późniejsze zastosowanie, można wyznaczyć moduł ten całki. Funkcja φ_k leżąc, jak to łatwo sprawdzić, równa iloczynowi wyrażenia $\frac{e^{-\mu r}}{r^k}$ przez wielomian o współczynnikach liczbowych, całkowity i jednorodny względem $\frac{1}{r}$ i μ , stopnia $k-1$. Jeżeli w tym wyrażeniu na φ_k zastąpimy każdy wyraz modułem jego, otrzymamy granicę wyższą modułu funkcji φ_k w postaci iloczynu wyrażenia $\frac{e^{-ar}}{r}$ przez wielomian $P\left(\frac{1}{r}, m\right)$ całkowity i jednorodny względem $\frac{1}{r}$ i m i o współczynnikach dodatnich. Będzie tedy:

$$|\varphi_k| < P_k\left(\frac{1}{r}, m\right) \frac{e^{-ar}}{r^k}.$$

Położmy $\varrho = +\sqrt{x'^2 + y'^2}$, będzie więc a fortiori, ponieważ $\varrho \ll r$:

$$|\varphi_k| < P_k\left(\frac{1}{\varrho}, m\right) \frac{e^{-a\varrho}}{\varrho^k}.$$

Niechaj M będzie granicą wyższą modułu funkcji $F_1(x', y')$, znajdując się po stronie drugiej równania (12); będzie:

$$|F(x', y') \varphi_k| < MP_k(1, m\varrho) \frac{e^{-a\varrho}}{\varrho},$$

i jeżeli położymy $x' = \varrho \cos \theta$, $y' = \varrho \sin \theta$, znajdziemy:

$$|\chi(z)| < \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R P_k(1, m\varrho) e^{-a\varrho} d\varrho,$$

skąd:

$$|\chi(z)| < \frac{M}{2} \int_0^R P_k(1, m\varrho) e^{-a\varrho} d\varrho,$$

a więc a fortiori:

$$|\chi(z)| < \int_0^\infty P_k(1, m\varrho) e^{-a\varrho} d\varrho,$$

co daje:

$$(14) \quad |\chi(z)| < \frac{1}{2} \frac{M}{a} Q_k\left(\frac{m}{a}\right)$$

gdzie $Q_k\left(\frac{m}{a}\right)$ przedstawia wielomian całkowity o współczynnikach liczbowych stopnia $k-1$ względem $\frac{m}{a}$.

Założmy w dalszym ciągu, że całka (13) jest rzędu -2 . Łatwo widzieć, że w tym przypadku, gdy z dąży do zera, całka jest rzędu wielkości $|\log(z)|$.

Rozważmy wreszcie przypadek, w którym całka (13) jest rzędu -3 . Bez trudności wykazać można, że wtedy wyrażenie $z\chi(z)$ dąży do granicy oznaczonej, gdy z dąży do zera, zachowując znak niezmienny. Jeżeli ten znak jest dodatni, granica wyrażenia $z\chi(z)$ jest $\frac{1}{2}(-1)^{k-1} F_1(0, 0)$; jeżeli przeciwnie znak ilości z pozostaje ujemnym, funkcja $z\chi(z)$ dąży do $\frac{1}{2}(-1)^k F(0, 0)$.

4. Przejdziemy do zbadania funkcji $\mathfrak{B}$, określonej równaniem (10), i wprowadźmy w tym celu oznaczenie, które będzie użytecznym i w wielu innych przypadkach. Niechaj $F(x, y, z)$ będzie jakkolwiek funkcją zmiennych x, y, z ; może zachodzić to, że wyrażenie $F(0, 0, z)$ dąży do granicy oznaczonej, gdy z dąży do zera, zachowując znak niezmienny, lecz że granica ta inną jest, w przypadku gdy z zachowuje znak dodatni, inną w przypadku, gdy z zachowuje znak ujemny. Oznaczmy tę granicę przez (F) ; w pierwszym przypadku, przez $(F)_+$ w drugim. To przyjąwszy, rozpatrzmy najprzód przypadek, w którym we wzorze (10), określającym funkcję $\mathfrak{B}$, funkcja g jest funkcją ciągłą, mogącą nie mieć pochodnych. Funk-

cya zmiennej z , którą otrzymujemy, jeżeli w funkcji $\mathfrak{B}$ położymy $x=y=0$; inaczej mówiąc, funkcja $\mathfrak{B}(0, 0, z)$ będzie całką rzędu -1 w znaczeniu, wskazanym w ustępie poprzedzającym. Będzie ona zatem funkcją ciągłą zmiennej z nawet dla $z=0$, i jeżeli przez G oznaczmy granicę wyższą modułu funkcji g , znajdziemy, opierając się na nierówności (14):

$$(15) \quad |\mathfrak{B}(0, 0, z)| < \frac{1}{2} \frac{G}{a}.$$

Mamy:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \cdot \frac{z-z'}{r} \cdot \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy',$$

albo:

$$(16) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = \frac{z}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \frac{z'}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy',$$

skąd, przy pomocy uwagi, uczynionej na końcu ustępu poprzedniego, wniesiemy, że ilości $\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right)_e$ istnieją i że będzie:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right)_i + \frac{1}{2} g(0, 0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \frac{z'}{r_0} \frac{d}{dr_0} \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} dx' dy', \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right)_e - \frac{1}{2} g(0, 0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \frac{z'}{r_0} \frac{d}{dr_0} \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} dx' dy', \end{array} \right.$$

gdzie:

$$(18) \quad r_0 = +\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Mamy:

$$|z'| < A_2 (y'^2 + y'^2),$$

co stwierdza, że strony drugie równań (17) są całkami rzędu -1 . Łatwe zastosowanie nierówności (14) da nam:

$$(19) \quad \left| \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right)_i + \frac{1}{2} g(0, 0) \right| < \frac{1}{2} A_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) G,$$

$$\left| \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right)_e - \frac{1}{2} g(0, 0) \right| < \frac{1}{2} A_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) G.$$

Kończymy badanie przypadku, w którym zakładamy jedynie ciągłość funkcji $g(x', y')$, czyniąc uwagę, że pochodne $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}$ i $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y}$ dla małych warto-

ści $|z|$ i wartości zerowych zmiennych x, y będą co najwyżej rzędu wielkości wyrażenia $|\log |z||$.

5. Przejdźmy teraz do bliższego zbadania pochodnych $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y}$.

Mamy:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \frac{x-x'}{r} \cdot \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy';$$

ponieważ:

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{x'-x}{r} + \frac{z'-z}{r} \frac{\partial z'}{\partial x'},$$

przeto:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \frac{\partial}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{z'-z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy',$$

skąd przy założeniu, że funkcja g ma pochodne pierwsze, wynika:

$$(20) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{z'-z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} g \frac{e^{-\mu r}}{r} dy',$$

gdzie całka pojedyncza jest całką krzywoliniową, wziętą w odpowiednim zwrocie po okręgu (Σ) .

Rozpatrzmy trzy całki, znajdujące się po drugiej stronie tego wzoru. Pierwsza zlewa się z funkcją, którą wyprowadzamy z funkcji $\mathfrak{B}$, zastępując g przez $\frac{\partial g}{\partial x'}$; będzie ona zatem dla $x=y=0$ funkcją ciągłą zmiennej z , nawet dla $z=0$. Druga całka jest pochodną względem z funkcji, którą wyprowadzamy z funkcji $\mathfrak{B}$, zastępując g przez $-g \frac{\partial z'}{\partial x'}$, skąd uwzględniając twierdzenia wyrażone przez równanie (17), oraz z uwagi, że dla $x=y=0$ znika funkcja $g \frac{\partial z'}{\partial x'}$, wypływa, że ta druga całka jest dla $x=y=0$ funkcją ciągłą zmiennej z nawet dla $z=0$. Wreszcie całka pojedyncza jest oczywiście dla $x=y=0$ funkcją ciągłą zmiennej z dla każdej wartości tej zmiennej. Wynika stąd, iż ilości $\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}\right)_e$ istnieją i mają jedną wartość. Szukajmy granicy wyższej wyrażenia $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}$ dla $x=y=0$, przyczem z może mieć

wartość jakąkolwiek. Niech G_1 będzie granicą wyższą modułów pochodnych pierwszych funkcji $g(x', y')$. Stosując twierdzenie, wyrażone przez nierówność (15), dochodzimy łatwo do nierówności:

$$\left| \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} < \frac{1}{2} \frac{G_1}{a}.$$

Dla otrzymania wartości z nadmiarem modułu drugiej całki po drugiej stronie równania (20), zauważmy, że $\frac{\partial z'}{\partial x'} < A_2 \sqrt{2(x'^2 + y'^2)}$, skąd wynika, że możnaby zastosować podobne działanie jak do całki (13) w przypadku, gdy rząd jest -1 . Znajdujemy:

$$\left| \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{z' - z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} < \frac{1}{2} \sqrt{2} A_2 G \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right).$$

Wreszcie znaleźć można łatwo:

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} g \frac{e^{-\mu r}}{r} dy \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} < \frac{1}{2} G e^{-aR} < \frac{1}{2R} \frac{G}{a}.$$

Z tego wszystkiego wynika, że:

$$(21) \quad \left| \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} \right| < \frac{1}{2} \frac{G_1}{a} + \frac{1}{2} \left(A_2 \sqrt{2} + \frac{1}{H} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) G.$$

Znajdziemy podobnie:

$$(22) \quad \left| \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} \right| < \frac{1}{2} \frac{G_1}{a} + \frac{1}{2} \left(A_2 \sqrt{2} + \frac{1}{H} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) G.$$

Łatwo widzieć, że wielkości $\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} \right)_i$, $\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} \right)_e$, $\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} \right)_i$, $\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} \right)_e$ istnieją i że jest

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} \right)_i = \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} \right)_e, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} \right)_i = \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} \right)_e$$

nawet i wtedy, gdy funkcja g nie ma pochodnych; wystarczy, by istniała stała G_1 taka, że

$$|g(x', y') - g(0, 0)| < G_1 \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Dodajemy, że w tym przypadku sprawdzają się nierówności, wyprowadzone z nierówności (21), (22) po zastąpieniu wyrazu $\frac{1}{2} \frac{G_1}{a}$ przez $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) G_1$ gdzie G_1 ma nowe znaczenie, dopiero co wskazane. W samej rzeczy, jest:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g(0, 0) \frac{x - x'}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} \{g(x', y') - g(0, 0)\} \frac{x - x'}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'. \end{aligned}$$

Otóż jeżeli zważymy, że powyższe rozważania stosują się do pierwszego wyrazu tego równania, a strona druga sprowadza się dla $x=y=0$ do tego, co nazwaliśmy całką rzędu -1 , to łatwo już stąd wyprowadzić uzasadnienie wzmiankowanego spostrzeżenia.

Szukajmy teraz granicy wyższej modułu pochodnej $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}$, zakładając, że

$$(23) \quad x=0, \quad y=0, \quad 0 \leq z < R.$$

Zwróćmy się w tym celu do równania (16) i wykonajmy w pierwszej całce po stronie drugiej zamianę zmiennych:

$$x' = \varrho \cos \theta, \quad y' = \varrho \sin \theta;$$

będzie:

$$\frac{z}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' = \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R g \frac{\varrho}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\varrho;$$

ponieważ $\frac{\partial r}{\partial \varrho} = \frac{\varrho}{r} + \frac{z' - z}{r} \frac{\partial z'}{\partial \varrho}$, przeto:

$$\begin{aligned} \frac{z}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' &= \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R g \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\varrho \\ &- \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R g \frac{\partial z'}{\partial \varrho} \frac{z' - z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\varrho, \end{aligned}$$

skąd:

$$\begin{aligned} (24) \quad \frac{z}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' &= -\frac{1}{2} g(0, 0) e^{-\mu z} + \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} g \frac{e^{-\mu r}}{r} d\theta \\ &- \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R g \frac{\partial g}{\partial \varrho} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\varrho + \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R g \frac{dz'}{\partial \varrho} \frac{z - z'}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\varrho. \end{aligned}$$

Mamy najprzód:

$$\left| \frac{1}{2} g(0, 0) e^{-\mu z} \right| < \frac{1}{2} G;$$

potem, ze względu na warunki (23):

$$\left| \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} g \frac{e^{-\mu r}}{r} d\theta \right| < \frac{1}{2} G e^{-\mu R} < \frac{1}{2h} \frac{G}{a}.$$

Następnie pamiętając, że na podstawie warunków (23) oraz określenia wielkości R , mamy w rozważanych całkach podwójnych $\frac{z}{r} < 1$ i z uwagi, że

$\left| \frac{\partial g}{\partial \varrho} \right| < G_1 \sqrt{2}$, $r \geq \varrho$, mamy:

$$\left| \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\partial g}{\partial \varrho} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\varrho \right| < \frac{1}{2} \sqrt{2} G_1 \int_0^\infty e^{-\mu \varrho} d\varrho = \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{G_1}{a}.$$

Zauważmy wreszcie, że nierówności:

$$\left| \frac{z - z'}{r} \right| < 1 \quad \text{i} \quad \frac{z}{r} < 1,$$

pozwalają nam obliczyć granicę wyższą modułu wyrazu czwartego drugiej strony równania (24), jakby szło o całkę (13) w przypadku, gdy ta całka jest rzędu -1 .

Uwzględniając nierówność:

$$\left| \frac{\partial z'}{\partial \varrho} \right| < A_2 \varrho \sqrt{2},$$

otrzymujemy:

$$\left| \frac{z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \partial \theta \int_0^R g \frac{\partial z'}{\partial \varrho} \frac{z - z'}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\varrho \right| < \frac{1}{2} \sqrt{2} A_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) G,$$

a więc z równania (24) znajdziemy:

$$(25) \quad \left| \frac{z}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' \right| < \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{G_1}{a} + \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2R} + \frac{A_2}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{a} + \frac{A_2}{\sqrt{2}} \frac{m}{a^2} \right\} G.$$

Rozpatrzmy teraz całkę drugą strony drugiej równania (16); jest ona rzędu -1 , a z uwagi, że

$$|z'| < A_2 (x'^2 + y'^2),$$

będzie:

$$(26) \quad \left| \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \frac{z'}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' \right| < \frac{G}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) A_2.$$

Z nierówności (25) i (26) i z równania (16) w razie spełnienia warunków (23) wynika:

$$(27) \quad \left| \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} \right| < \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{G_1}{a} + \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{A_2}{2} + \frac{1}{2R} + \frac{A_2}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{a} + A_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{m}{a^2} \right\} G.$$

6. Poświęcamy ten ustęp zbadaniu pochodnych drugich funkcji $\mathfrak{B}$, w założeniu najprzód, że funkcja g ma pochodne rzędu pierwszego. Równanie (20) daje:

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{(S_0)} \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \frac{\partial z'}{\partial x'} (z' - z) \frac{x - x'}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{(S)} g \frac{e^{-\mu r}}{r} dy'.$$

Przekształćmy drugą z całek po stronie drugiej przy pomocy rachunku zupełnego analogicznego do tego, przy pomocy którego wyprowadziliśmy wzór (20). Będzie:

$$(29) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{(S_0)} \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \left(\frac{\partial z'}{\partial x'} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} \frac{z' - z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy',$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{z' - z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \left(\frac{\partial z'}{\partial x'} \right)^2 \frac{(z' - z)^2}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} dx' dy' \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} g \frac{\partial z'}{\partial x'} (z - z') \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dy' - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{(S)} g \frac{e^{-\mu r}}{r} dy'.$$

Żałujemy, że funkcja $g(x', y')$ ma pochodne ciągłe aż do rzędu drugiego włącznie; niechaj G będzie granicą wyższą modułu samej funkcji $g(x', y')$, G_1 — granicą wyższą modułów jej pochodnych pierwszych, G_2 — granicą wyższą modułów pochodnych drugich. Ze wzoru (29) można wniesić, że ilości $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_s$ istnieją i będą:

$$(30) \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_s = g(0, 0) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x'=0, y'=0};$$

natdo będzie można znaleźć trzy stałe B_1, B_2, B_3 takie, że:

$$(31) \quad \left| \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x'=0, y'=0} g(0, 0) \right| < B_1 \frac{G_2}{a} + B_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) G_1 \\ + B_3 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) G.$$

Porzucmy teraz założenie, że funkcja $g(x', y')$ ma pochodne, i przyjmijmy, że można znaleźć dwie stałe p, q takie, aby było:

$$|g(x', y') - g(0, 0) - px' - qy'| < G_2 (x'^2 + y'^2),$$

gdzie G_2 oznacza stałą dodatnią. Niechaj G_1 oznacza teraz granicę wyższą modułów ilości stałych p i q . Położymy na chwilę:

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \{g(0, 0) + px' + qy'\} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy',$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} \{g(x', y') - g(0, 0) - px' - qy'\} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'.$$

Będzie $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$.

Jest jasnym, że wszystkie twierdzenia, które wyprowadziliśmy dla funkcji $\mathfrak{B}$ stosują się także do funkcji $\mathfrak{B}_1$. Z drugiej strony widzimy bezpośrednio, że pochodna $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_2}{\partial x^2}$ wyrazi się całką, która dla $x=y=0$ sprowadza się do tego, co nazwaliśmy całką rzędu -1 . Wynika stąd, że przy nowych naszych założeniach wyrażenia $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_s$ istnieć będą i zarazem sprawdzać się będzie związek (30). Przekonamy się też łatwo, że przy odpowiednim wyborze stałych B_1, B_2, B_3 sprawdzą się też nierówność, którą otrzymujemy z nierówności (31), zastępując $\frac{G_2}{a}$, $\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) G_1$ odpowiednio przez $G_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3}\right)$, $G_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3}\right)$. Podobnie bez żadnych trudności otrzymać można dla pochodnych $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y^2}$ rezultaty zupełnie analogiczne do powyższych, odnoszących się do pochodnych $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}$.

Skoro tak jest, to z poprzedzających rozważań i ze związku $\Delta \mathfrak{B} + \xi \mathfrak{B} = 0$ wynika, że przy naszych założeniach pochodne $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_s$ istnieją, oraz że łatwo oznaczyć granice wyższe ich modułów.

Łatwo stwierdzić, że w przypadku, gdyby funkcja $g(x', y')$ miała pochodne pierwsze, a nie czyniła zadość powyższym założeniom, ilości:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2},$$

wzięte dla wartości dość małych bezwzględnych zmiennej z i dla wartości zerowych zmiennych x i y będą co najwyżej rzędu wielkości wyrażenia $-\log|z|$.

Pozostaje nam zbadać pochodne $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y \partial z}$; uczynimy to, zakładając jedynie co do funkcji $g(x', y')$, że ma pochodne pierwsze ciągłe. W tym celu położmy dla skrócenia:

$$(32) \quad b_{11} = \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\right)_{x'=0, y'=0}, \quad b_{12} = \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x' \partial y'}\right)_{x'=0, y'=0}, \quad f_3(x', y') = \frac{\partial z'}{\partial x'} - b_{11}x' - b_{12}y';$$

uwzględniając założenia, uczynione o powierzchni (S) , będziemy mieli:

$$(33) \quad |f_3(x')| < A_3 \sqrt{2} (x'^2 + y'^2).$$

Położmy jeszcze:

$$(34) \quad \mathfrak{B}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g(x', y') (b_{11}x' + b_{12}y') \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy',$$

z równania (20) otrzymamy:

$$(35) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{(\Sigma_0)} \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g f_3(x', y') \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{(\Sigma)} g \frac{e^{-\mu r}}{r} dy'.$$

Uczynmy teraz następujące uwagi:

1) Wyraz pierwszy strony drugiej wzoru (35) przedstawia pochodną względem z funkcji, która wyprowadza się z funkcji $\mathfrak{B}$ przez zastąpienie funkcji $g(x', y')$ pochodną $\frac{\partial g}{\partial x'}$. Można więc będzie zastosować do tego wzoru twierdzenia, wyrażone równaniami (17) i nierównościami (19).

2) Funkcja $\mathfrak{B}$ jest funkcją, którą wyprowadzamy z funkcji $\mathfrak{B}$, zastępując $\mathfrak{B}$ przez iloczyn $g(x', y') (b_{11}x' + b_{12}y')$. Otóż iloczyn ten spełnia warunki wymagane na to, aby rozważania, wyłożone w pierwszej części tego ustępu, dały się zastosować do funkcji $\mathfrak{B}$. Zobaczymy, że wyrażenia $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2}\right)_e$ istnieją i że mają jedną wartość.

3) Wyraz trzeci strony drugiej równania (35) jest całką, do której można zastosować rezultaty, któreśmy otrzymali dla całki (13), gdy ta całka jest rzędu -1 .

4) Wreszcie wyraz czwarty jest widocznie dla $x=y=0$ funkcją ciągłą zmiennej z dla każdej wartości rzeczywistej tej zmiennej.

Z tego wszystkiego wynika, że ilości $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}\right)_e$ istnieją i że

$$(36) \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}\right)_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)_{x'=0, y'=0} = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}\right)_e - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)_{x'=0, y'=0}.$$

Postaramy się teraz wyznaczyć granicę wyższą wspólnej wartości modułów tych różnic. Szukajmy w tym celu granicy wyższej modułu wartości wspólnej wyrażeń $(\mathfrak{B})_i$ i $(\mathfrak{B})_e$. Byłoby naturalnem pomyśleć tu o zastosowaniu twierdzenia, wyrażonego przez nierówność (15); lecz rezultat, jaki otrzymalibyśmy na tej drodze, byłby niedostatecznym, gdyż nie korzystalibyśmy

wtedy z pewnych okoliczności szczególnych, nadarzających się w tym przypadku. Dla $x=y=0$ mamy:

$$\frac{\partial}{\partial x'} e^{-\mu r} = -\mu e^{-\mu r} \left(\frac{x'}{r} + \frac{z'-z}{r} \frac{\partial z'}{\partial x'} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} e^{-\mu r} = -\mu e^{-\mu r} \left(\frac{y'}{r} + \frac{z'-z}{r} \frac{\partial y'}{\partial y'} \right),$$

przeto:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(0, 0, z) &= -\frac{b_{11}}{4\pi\mu} \iint_{(\Sigma_0)} g(x', y') \frac{\partial e^{-\mu r}}{\partial x'} dx' dy' - \frac{b_{12}}{4\pi\mu} \iint_{(\Sigma_0)} g(x', y') \frac{\partial e^{-\mu r}}{\partial y'} dx' dy', \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g(x', y') \left\{ b_{11} \frac{\partial z'}{\partial x'} + b_{12} \frac{\partial z'}{\partial y'} \right\} \frac{z'-z}{r} e^{-\mu r} dx' dy', \end{aligned}$$

skąd:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(0, 0, z) &= \frac{b_{11}}{4\pi\mu} \iint_{(\Sigma_0)} \frac{\partial g}{\partial x'} e^{-\mu r} dx' dy' + \frac{b_{12}}{4\pi\mu} \iint_{(\Sigma_0)} \frac{\partial g}{\partial y'} e^{-\mu r} dx' dy' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g(x', y') \left\{ b_{11} \frac{\partial z'}{\partial x'} + b_{12} \frac{\partial z'}{\partial y'} \right\} \frac{z'-z}{r} e^{-\mu r} dx' dy' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{(\Sigma)} g(x', y') e^{-\mu r} (b_{11} dy' - b_{12} dx'), \end{aligned}$$

gdzie całka pojedyncza przedstawia całkę krzywo-liniową, wziętą wzdłuż obwodu (Σ) . Położywszy:

$$r_0 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

znajdziemy:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B})_i &= (\mathfrak{B})_e = \mathfrak{B}(0, 0, 0), \\ &= \frac{b_{11}}{4\pi\mu} \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial g}{\partial x'} e^{-\mu r_0} dx' dy' + \frac{b_{12}}{4\pi\mu} \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial g}{\partial y'} e^{-\mu r_0} dx' dy' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma_0)} g(x', y') \left\{ b_{11} \frac{\partial z'}{\partial x'} + b_{12} \frac{\partial z'}{\partial y'} \right\} \frac{z'}{r_0} e^{-\mu r_0} dx' dy' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\mu} \int_{(\Sigma)} g(x', y') e^{-\mu r_0} (b_{11} dy' - b_{12} dx'). \end{aligned}$$

Z tego równania łatwo wynioskować istnienie dwóch stałych B'_1 i B'_2 takich, że:

$$(37) \quad |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}|_e = |\mathfrak{B}(0, 0, 0)| < B'_1 \frac{G}{a^3} + B'_2 \frac{G_1}{ma^3},$$

gdzie G i G_1 są, jak wyżej, granicami wyższymi funkcji $g(x', y')$ i jej pochodnych pierwszych.

Z drugiej strony rachunki analogiczne do rachunków, rozwiniętych w pierwszej części tego ustępu, pozwolą nam wyznaczyć granice wyższe modułów wyrażeń $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y^2}\right)_e$. Opierając się tedy na nierówności (37) i na równaniu $\Delta \mathfrak{B} + \xi \mathfrak{B} = 0$, będzie można obliczyć granicę wyższą modułu wyrażenia $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2}\right)_i$.

Teraz bez żadnej trudności wyprowadzamy następujący wniosek z równania (35): można wyznaczyć dwie stałe dodatnie B''_2 i B''_1 takie, że będzie:

$$(38) \quad \left| \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}\right)_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)_{x'=0, y'=0} \right| < B''_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) G_1 + B''_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m^2}{a^2} + \frac{m^3}{a^3}\right) G,$$

$$\left| \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}\right)_e - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)_{x'=0, y'=0} \right| < B''_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) G_1 + B''_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3}\right) G.$$

Jest widocznem, że wyrażenia $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y \partial z}\right)_i$ i $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y \partial z}\right)_e$ istnieją, że

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y \partial z}\right)_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)_{x'=0, y'=0} = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y \partial z}\right)_e - \left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)_{x'=0, y'=0}$$

i że stałe B''_2 i B''_1 mogą być wyznaczone w ten sposób, aby prócz nierówności (38) zachodziły nierówności, wyprowadzone z pierwszych przez zastąpienie wyrażeń:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)_{x'=0, y'=0}, \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}\right)_e.$$

odpowiednio wyrażeniami:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right)_{x'=0, y'=0}, \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y \partial z}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y \partial z}\right)_e.$$

7. Zbadajmy wreszcie pewne pochodne rzędu 3-go funkcji $\mathfrak{B}$ w zało-

żeniu, że funkcja $g(x', y')$ jest zerem dla $x' = y' = 0$ i że ma pochodne rzędu 2-go ciągłe. Równanie (29) daje nam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial x^2 \partial z} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \iint_{(S_0)} \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_{(S_0)} \left\{ g \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} + \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} dx' dy' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \left(\frac{\partial z'}{\partial x'} \right)^2 \frac{z-z'}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) dx' dy' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} g \left(\frac{\partial z'}{\partial x'} \right)^2 \frac{(z-z')^3}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \right\} dx' dy' \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iint_{(S_0)} g \left(\frac{\partial z'}{\partial x'} \right)^2 \frac{z-z'}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) dx' dy' \\ &- \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{(S)} g \frac{\partial z'}{\partial x'} (z-z') \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dy' - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \iint_{(S)} g \frac{e^{-\mu r}}{r} dy'. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy kolejno różne wyrazy strony drugiej tego równania. Wyraz pierwszy jest identyczny z wyrażeniem, które otrzymujemy z wyrażenia $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x \partial z}$, zastępując w niem $g(x', y')$ przez $\frac{\partial g}{\partial x'}$: ponieważ zaś funkcja g ma pochodne drugie, przeto wyraz ten dąży do granicy oznaczonej dla $x=y=0$, gdy z dąży do zera, zachowując znak niezmienny. Granicę wyższą modułu tego wyrazu otrzymamy przy pomocy twierdzeń, wyrażonych przez nierówności (38). Wyraz drugi strony drugiej naszego równania jest identyczny z wyrażeniem, które otrzymujemy z wyrażenia $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2}$, zastępując w niem $g(x', y')$

przez wyrażenie $g \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} + \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{\partial z'}{\partial x'}$. Otóż jest możliwem wyznaczenie stałych p i q takich, aby moduł różnicy $g \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} + \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{\partial z'}{\partial x'} - (px' + qy')$ był mniejszy od iloczynu pewnej stałej przez wyrażenie $x'^2 + y'^2$. Wynika stąd, że wyraz, o którym mowa, gdy w nim uczynimy $x=y=0$ i gdy z dąży do zera, nie zmieniając znaku, dąży do granicy oznaczonej.

Rozpatrzmy teraz wyrazy trzeci, czwarty i piąty. Wyrazy te dla $x=y=0$ sprowadzają się do całek, to których można zastosować rozważania te same, co do całki (13) w przypadku, gdy rząd jej jest -1 . A zatem dla $x=y=0$ wyrazy trzeci, czwarty i piąty są funkcjami ciągłymi zmiennej z i dla $z=0$.

Wreszcie wyrazy szósty i siódmy są widocznie funkcjami ciągłymi zmiennych x, y, z dla $x=y=0$.

Z tego wszystkiego wynika, że ilości

$$\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial x^2 \partial z} \right)_i \text{ i } \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial x^2 \partial z} \right)_e,$$

istnieją i łatwo widzieć, iż można znaleźć stałe B'''_1 i B'''_2 takie, aby było :

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial x^2 \partial z} \right)_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{x'=0, y'=0} \right| < B'''_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) G_2 \\ & \quad + B'''_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) G_1, \\ & \left| \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial x^2 \partial z} \right)_e - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{x'=0, y'=0} \right| < B'''_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m}{a^3} + \right) G_2 \\ & \quad + B'''_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) G_1. \end{aligned} \right.$$

Zupełnie analogiczne rozważanie zastosować można do pochodnych $\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial x \partial y \partial z}$ i $\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial y^2 \partial z}$ i na tej podstawie wybrać stałe B'''_1 i B'''_2 takie, aby równocześnie z nierównościami poprzedzającymi spełniały się następujące :

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial x \partial y \partial z} \right)_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x' \partial y'} \right)_{x'=0, y'=0} \right| < B'''_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) G_2 \\ & \quad + B'''_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^3}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) G_1, \\ & \left| \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial x \partial y \partial z} \right)_e - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x' \partial y'} \right)_{x'=0, y'=0} \right| < B'''_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) G_2 \\ & \quad + B'''_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) G_1, \end{aligned} \right.$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial y^2 \partial z} \right)_e - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x'=0, y'=0} \right| < B'''_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) G_2 \\ & \quad + B'''_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) G_1 \\ & \left| \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial y^2 \partial z} \right)_e - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x'=0, y'=0} \right| < B'''_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) G_2 \\ & \quad + B'''_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) G_1. \end{aligned} \right.$$

Z wyników powyższych i ze związków $\Delta \mathfrak{B} + \xi \mathfrak{B} = 0$, który daje $\Delta \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} + \xi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = 0$ wnioskujemy bezpośrednio, że wyrażenia $\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial z^3} \right)_i$ i $\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{B}}{\partial z^3} \right)_e$ istnieją i że łatwo obliczyć granice wyższe ich modułów.

8. Zanim pójdziemy dalej, wprowadźmy nowe oznaczenia, które będą utrzymane w dalszym ciągu pracy niniejszej. Rozważmy funkcję ciągłą i jednoznacznie położenia punktu P o współrzędnych x, y, z , pozostającego wciąż na powierzchni (S) ; niechaj v będzie tą funkcją. Za początek współrzędnych weźmy punkt jakikolwiek, położony na powierzchni (S) , i skierujmy oś z według normalnej do powierzchni. Jeżeli punkt P należy do kawałka (S') powierzchni (S) (patrz 2), to v będzie funkcją jednoznaczną i ciągłą dwu zmiennych niezależnych x i y . Jeżeli pochodne $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0, y=0}$

i $\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x=0, y=0}$ istnieją, oznaczmy którąkolwiek z nich symbolem $\frac{\partial v}{\partial \eta}$, o którym mówimy, że odnosi się do punktu O powierzchni (S) i do osi $O\eta$: oś ta jest osią Ox lub osią Oy , stosownie do tego, czy symbol $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ wyobraża wartość pochodnej $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0, y=0}$ czy też wartość pochodnej $\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x=0, y=0}$.

W podobny sposób symbol $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$ wyobrażać ma którąkolwiek z pochodnych $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{x=0, y=0}$ i $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_{x=0, y=0}$ w założeniu, że pochodne te istnieją. Powiemy o symbolu $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$ że odnosi się do punktu O i do osi $O\eta$, która zlewa się z osią Ox lub Oy , stosownie do tego, czy symbol ten ma wyobrażać $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{x=0, y=0}$, czy też $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_{x=0, y=0}$. Założmy dalej, że istnieje pochodna $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)_{x=0, y=0}$; wyobraził ją mytakową za pomocą symbolu $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \eta'}$.

Powiemy, że funkcja v ma pochodne pierwsze, jeżeli wyrażenie $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ ma wartość oznaczoną dla każdego położenia punktu O na powierzchni (S) i dla każdego kierunku osi $O\eta$ na płaszczyźnie stycznej w punkcie O do powierzchni S . Jeżeli to samo zachodzi dla wyrażeń $\frac{\partial v}{\partial \eta^2}$ i $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \eta'}$, powiemy, że funkcja v ma pochodne drugie. Przyjmijmy, że moduł pochodnej $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ pozo-

staje mniejszy od pewnej stałej, niezależnej od położenia punktu O na powierzchni (S) i niezależnie od kierunku osi $O\eta$; powiemy wtedy, że stała ta jest granicą wyższą modułów pochodnych funkcji v . Jeżeli moduły pochodnych $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$ i $\frac{\partial^3 v}{\partial \eta \partial \eta'}$ pozostają stałe obie mniejszemi od pewnej stałej, powiemy, że stała ta jest granicą wyższą modułów pochodnych drugich.

Jest widoczne, że każde z wyrażeń $\frac{\partial v}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial \eta \partial \eta'}$ może być uważane za funkcję trzech zmiennych niezależnych, t. j. dwóch z pomiędzy trzech współrzędnych punktu O i jednego z trzech kątów, który tworzy oś $O\eta$ z układem osi stałych. Jeżeli $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ jest funkcją ciągłą tych trzech współrzędnych, powiemy, że pochodne pierwsze funkcji v są ciągłymi. Jeżeli to samo ma miejsce dla pochodnych $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial \eta \partial \eta'}$, powiemy, że pochodne drugie funkcji v są ciągłymi.

Niechaj punkt P będzie punktem zmiennym w przestrzeni, F zaś funkcją położenia tego punktu. Za początek współrzędnych weźmy punkt O na powierzchni (S) i skierujmy oś z według normalnej wewnętrznej do tej powierzchni; funkcja F stanie się wtedy funkcją $F(x, y, z)$ trzech zmiennych niezależnych x, y, z . Przyjmijmy, że wyrażenie $F(0, 0, z)$ dąży do granicy oznaczonej, gdy zmienna z dąży do zera, zachowując znak niezmienny; oznaczmy tę granicę przez $(F)_i$ lub $(F)_e$ stosownie do tego, czy ten znak jest dodatni, czy ujemny. Przyjmijmy jeszcze, że pochodna $\frac{d}{dz} F(0, 0, z)$ dąży do granicy oznaczonej wtedy, gdy zmienna z dąży do zera, zachowując znak niezmienny. Oznaczmy tę granicę przez $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$ lub $\left(\frac{dF}{dN}\right)_e$ stosownie do tego, czy ten znak jest dodatni czy ujemny. W przypadku, gdy niema obawy o dwuznaczność, pisać będziemy $\frac{dF}{dN}$ zamiast $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$.

9 Po takim przygotowaniu możemy przystąpić do badania funkcji Φ , określonej przez równanie (8). Funkcja ta posiadać będzie następujące własności:

$$(42) \quad (\Phi)_i = (\Phi)_e.$$

$$(43) \quad \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e = -\sigma.$$

Jeżeli przez c oznaczmy granicę wyższą modułu funkcji σ , będzie:

$$(44) \quad \Phi < \frac{A}{a} c,$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i + \frac{1}{2} \sigma \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c, \\ \left| \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e - \frac{1}{2} \sigma \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c, \end{array} \right.$$

gdzie A jest stałą, zależną jedynie od natury powierzchni (S) .

Załóżmy, że funkcja σ ma pochodne pierwsze ciągłe, wtedy pochodne:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi)_i, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_i, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_e$$

istnieją; jeżeli c' jest granicą wyższą modułów pochodnych pierwszych funkcji σ , można będzie wyznaczyć stałą A w ten sposób, aby prócz nierówności (44) i (45) spełniały się nierówności:

$$(46) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi)_i \right| < \frac{A}{a} c' + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c,$$

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_i + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c' + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) c, \\ \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_e - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c' + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) c, \end{array} \right.$$

$$(48) \quad |D\Phi| < \frac{A}{a} c' + \left[A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \right] c,$$

gdzie $D\Phi$ oznacza którąkolwiek z pochodnych pierwszych funkcji Φ , obliczoną dla jakiegokolwiek punktu, położonego wewnątrz powierzchni S , przyczem osi współrzędnych mają położenie dowolne względem tej powierzchni.

Twierdzenia powyższe możnaby udowodnić sposobem następującym: Ile razy rozważamy czy to funkcję Φ , czy to jedną z jej pochodnych, rozróżniamy dwa przypadki, zależnie od tego, czy odległość punktu P , dla którego te ilości rozpatrujemy, od powierzchni (S) nie jest lub jest mniejszą od długości R , określonej w ustępie 2. W przypadku pierwszym nie zachodzi żadna trudność. W drugim zaś można za początek współrzędnych wziąć ten z punktów powierzchni (S) , którego odległość od punktu P jest najmniejsza; na powierzchni (S) istnieje tylko jeden punkt, czyniący zadość temu warunkowi. Następnie skierujmy oś z według normalnej wewnętrznej do powierzchni (S) i rozłożmy całkę, która daje nam funkcję Φ na dwie części Φ' i Φ'' , odnoszące się odpowiednio do części (S') i (S'') powierzchni (S) (patrz ust. 2). Będzie:

$$\Phi' = \frac{1}{4\pi} \int_{(S')} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

$$\Phi'' = \frac{1}{4\pi} \int_{(S'')} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

Funkcja Φ'' nie przedstawia żadnej osobliwości w sąsiedztwie punktu P i będzie można bardzo łatwo obliczyć dla tego punktu granicę wyższą modułu funkcji Φ'' lub modułu jednej z jej pochodnych. A więc tylko funkcja Φ' może sprawiać trudności. Oznaczmy przez λ'_3 dostawę kąta, który normalna wewnętrzna do powierzchni (S) , wystawiona w punkcie, do którego odnosi się ds , tworzy z osią z . Wystarczy położyć po stronie drugiej równania (10):

$$(49) \quad g(x', y') = \frac{\sigma}{\lambda}.$$

aby funkcja Φ stała się identyczną z funkcją Φ' . Z drugiej strony nie stanowi trudności wyprowadzenie z granic wyższych modułów funkcji σ i jej pochodnych pierwszych, granic wyższych modułów wartości (49) funkcji $g(x', y')$ oraz pochodnych tego wyrażenia funkcji $g(x', y')$. To mając, możemy, przy pomocy łatwego zastosowania nierówności (15) i (19), dojść do nierówności (44) i (45). To, co powiedziano w ust. 4, o ciągłości funkcji Φ doprowadza do równania (42), a równanie (43) wyniknie następnie z równań (17). Dowód nierówności (46) i (48) wynika łatwo z twierdzeń, wyrażonych przez nierówności (21), (22) i (27). Pozostaje więc zająć się tylko nierównościami (47). Dowód ścisły tych nierówności wymaga pewnej uwagi. Weźmy za początek współrzędnych punkt O , położony na powierzchni (S) i skierujmy oś z według normalnej wewnętrznej. Metoda, użyta w dowodzeniu nierówności (46), i rezultaty, otrzymane w części drugiej ustępu 6, pozwalają nam twierdzić, że wyrażenia:

$$(50) \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_e, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_e,$$

istnieją. To mając, wyobraźmy sobie, że układ współrzędnych x, y, z jest ruchomy i poddany następującym warunkom: początek O pozostaje na powierzchni (S) i oś z jest stale skierowana według normalnej wewnętrznej w punkcie O do powierzchni (S) . Jest widocznym, że jeżeli ograniczymy się do rozważania dostatecznie małych przemieszczeń, to współrzędne X, Y, Z punktu O względem układu osi stałych oraz dostawy kątów, utworzonych przez osi Ox, Oy, Oz z osiami stałymi OX, OY, OZ , będzie można wyrazić w postaci funkcji ciągłych trzech zmiennych niezależnych t_1, t_2 i t_3 . Jest

widocznym, że przy tych warunkach wyrażenia (50) będą funkcjami trzech zmiennych niezależnych t_1, t_2, t_3 ; udowodnimy, że są to funkcje ciągłe. Weźmy w tym celu liczbę dodatnią ε tak małą, jak się podoba, i wyrażenie

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=d}},$$

gdzie d jest liczbą dodatnią i stałą, dość małą, tak, aby było:

$$\left| \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=d}} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_i \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

dla wszystkich układów wartości zmiennych t_1, t_2, t_3 , dość bliskich pewnego układu wartości t'_1, t'_2, t'_3 . To założywszy, zauważmy, że wyrażenie $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=d}}$

będzie funkcją ciągłą zmiennych t_1, t_2, t_3 . Aby to widzieć, dość wyrazić tę ilość przez pochodne funkcji Φ względem zmiennych X, Y, Z i przypomnieć sobie, że dla punktu nie położonego na powierzchni (S) funkcja Φ ma pochodne wszystkich rzędów. Wynika stąd, że można będzie znaleźć liczbę dodatnią δ taką, by przy warunku:

$$(51) \quad (t''_1 - t'_1)^2 + (t''_2 - t'_2)^2 + (t''_3 - t'_3)^2 < \delta,$$

było:

$$(52) \quad \left| \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=d}} \right\}_{\substack{t_1=t''_1 \\ t_2=t''_2 \\ t_3=t''_3}} - \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=d}} \right\}_{\substack{t_1=t'_1 \\ t_2=t'_2 \\ t_3=t'_3}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stąd i z dwóch nierówności, które otrzymujemy z nierówności (52) przez zastąpienie ilości t_1, t_2, t_3 raz ilościami t'_1, t'_2, t'_3 , drugi raz ilościami t''_1, t''_2, t''_3 , wyprowadzamy, że:

$$\left| \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_i \right\}_{\substack{t_1=t''_1 \\ t_2=t''_2 \\ t_3=t''_3}} - \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_i \right\}_{\substack{t_1=t'_1 \\ t_2=t'_2 \\ t_3=t'_3}} \right| < \varepsilon,$$

przy spełnieniu się warunków (53). Otóż stwierdza to, że wyrażenie $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_i$, uważane za funkcję zmiennych t_1, t_2, t_3 , jest funkcją ciągłą. Podobne rozumowanie wykazałoby, że to samo stosuje się nie tylko do trzech pozostałych wyrażen (50), ale i do wyrażen:

$$(\Phi)_0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_e, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_e.$$

To mając, ustalmy znów układ współrzędnych x, y, z i oznaczmy przez $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej do powierzchni (S) w punkcie M , który leży na kawałku (S') powierzchni (S) (patrz ustęp 2). Przez punkt M poprowadźmy równoległą do osi z i odetnijmy na niej w kierunku do wnętrza długość $MP = d$ dość małą, by punkt P był jeszcze we wnętrzu powierzchni (S) , niezależnie od położenia punktu M na kawałku (S') powierzchni (S) . Oznaczmy przez $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_P, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_P, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_P$ wartości w punkcie P pochodnych $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ i połączmy:

$$F = \lambda_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_P + \lambda_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_P + \lambda_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_P.$$

Jest widocznym, że dla wartości skończonych d można uważać F jako funkcję dwu zmiennych niezależnych x, y i łatwo widzieć, że dla $d=0$ funkcja F sprowadza się do wartości wyrażenia $\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i$ w punkcie M .

Łatwy rachunek przekonywa, że pochodne $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ dążą do granic oznaczonych, gdy d dąży do zera; granice te, na zasadzie powyższego, będą funkcjami ciągłymi zmiennych x i y . Wynika stąd, że granica, do której zmierza F , gdy d dąży do zera, jest funkcją ciągłą, mającą pochodne i, że pochodne te są granicami wyrażen $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ dla wartości d , zdążających do zera. Jeżeli teraz, podobnie jak w ustępie poprzedzającym, $z = f(x, y)$ jest równaniem kawałka (S') , jeżeli położymy także:

$$b_{11} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x=0, y=0}, \quad b_{12} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x=0, y=0},$$

i uwzględnimy związek $\lim_{d \rightarrow 0} (F) = \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i$, znajdziemy:

$$(53) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i \right\}_{x=0, y=0} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial x}\right)_i - b_{11} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_i - b_{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_i.$$

To pokazuje, że wyrażenie $\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i$ ma pochodne pierwsze ciągłe; inaczej mówiąc, wyrażenie $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i$ istnieje i jest funkcją ciągłą elementów, od których zależy. Na podstawie zaś równania (43) toż samo powiedzieć należy o wyrażeniu $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e$.

Przy odpowiednim zastosowaniu twierdzeń, wyrażonych przez nierówności (38), równanie (43) doprowadza do nierówności (47).

10. Przejdźmy do zbadania funkcji Ψ , określonej przez równanie (9). Będzie:

$$(54) \quad (\Psi)_i - (\Psi)_e = \sigma;$$

jeżeli stała A , wchodząca do nierówności, wyprowadzonych w ustępie poprzedzającym, jest dość wielką, będziemy mieli, prócz tamtych nierówności, następujące:

$$(55) \quad |\Psi| < A \frac{m}{a} c,$$

$$(56) \quad \left| (\Psi)_i - \frac{1}{2} \sigma \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c,$$

$$\left| (\Psi)_e + \frac{1}{2} \sigma \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c,$$

gdzie c jest granicą wyższą modułu funkcji σ . Jeżeli funkcja ta ma pochodne ciągłe aż do rzędu drugiego włącznie i jeżeli c' oznacza granicę wyższą modułów pochodnych pierwszych, c'' — granicę wyższą modułów pochodnych drugich, będzie można wybrać stałą A tak, aby, prócz nierówności ustępu poprzedzającego oraz nierówności (55) i (56) miały miejsce następujące:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} (\Psi)_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c' + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) c, \\ \left| \frac{\partial}{\partial \eta} (\Psi)_e + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right| < A \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{a^2} \right) c' + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) c, \end{array} \right.$$

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\Psi)_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta^2} \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) c'' \\ \quad + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) c' + A \frac{m^2}{a} c, \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\Psi)_e + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta^2} \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) c'' \\ \quad + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) c' + A \frac{m^2}{a} c, \end{array} \right.$$

$$(59) \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \eta'} (\Psi)_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta \partial \eta'} \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) c'' \\ \quad + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) c' + A \frac{m^2}{a} c, \\ \left| \frac{\partial^3}{\partial \eta \partial \eta'} (\Psi)_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta \partial \eta'} \right| < A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) c'' \\ \quad + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right) c' + A \frac{m^2}{a} c. \end{array} \right.$$

Dodajemy, że funkcje $(\Psi)_i$ i $(\Psi)_e$ będą ciągłymi i że nadto, gdy σ ma pochodne ciągłe aż do rzędu drugiego włącznie, to i pochodne tych funkcji będą ciągłymi aż do rzędu drugiego włącznie.

Udowodnimy najprzód nierówność (55). Znajdujemy:

$$|\Psi| < \frac{c}{4\pi} \int \left| \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r} \right) \right| ds + \frac{mc}{4\pi} \int \frac{e^{-ar}}{r} ds.$$

Wyrażenie $\left| \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r} \right) \right|$ przedstawia pole kawałka powierzchni kuli o promieniu 1, mającej środek w punkcie (x, y, z) , wyciętego przez stożek, którego wierzchołek znajduje się w tym punkcie, a którego podstawą jest element ds ; stąd wynika:

$$\int \left| \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r} \right) \right| ds < 4(n-1)\pi,$$

gdzie n przedstawia największą liczbę punktów przecięcia powierzchni (S) z prostą. Z drugiej strony z twierdzenia, wyrażonego przez nierówność (44), wypływa, iż istnieje pewna stała A' tak, iż

$$\int \frac{e^{-ar}}{r} ds < 4\pi \frac{A'}{a};$$

będzie tedy:

$$|\Psi| < \left\{ (n-1) \frac{a}{m} + A' \right\} \frac{m}{a} c.$$

Ponieważ $\frac{a}{m} < 1$, dość przeto wziąć $A \geq n-1 + A'$, aby nierówność (55) stała się zadość.

Równanie (54) i nierówności (56) i (57) można udowodnić sposobem następującym. Umieśmy początek współrzędnych O w jakimkolwiek punkcie

powierzchni (S) i skierujmy oś z według normalnej wewnętrznej. Rozłożymy następnie całe wyrażającą funkcję Ψ na dwie części Ψ' i Ψ'' , odnoszące się odpowiednio do kawałków (S') i (S'') powierzchni (S) . Będziemy mieli:

$$\Psi' = \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}''}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}'''}{\partial z},$$

gdzie $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{B}'''$ są funkcjami, które otrzymujemy z funkcji $\mathfrak{B}$, określonej przez równanie (10), zastępując g odpowiednio przez $\sigma \frac{\partial z'}{\partial x'}$, $\sigma \frac{\partial z'}{\partial y'}$, $-\sigma$.

Z tego, co podano w ustępach 4 i 5, wypływa z łatwością:

$$(\Psi'')_i - (\Psi'')_e = \sigma,$$

a ponieważ jest widocznie:

$$(\Psi''')_i - (\Psi''')_e = 0,$$

przeto równaniu (54) staje się zadość.

Przekonamy się również, zawsze opierając się na ustępach 4 i 5, że dla odpowiedniej wartości stałej A nierówności (56) będą spełnione i bez trudności udowodnimy, że funkcje $(\Psi)_i$ i $(\Psi)_e$ są ciągłymi. Spostrzegamy przytem, że wszystko to ma miejsce wprost przy założeniu, że funkcja σ jest ciągła. Przyjmijmy teraz, że funkcja σ ma pochodne pierwsze. Twierdzenia ustępu 6 pozwalają nam stwierdzić istnienie wielkości $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_i$, $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_e$, $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_i$, $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_e$, przy pomocy zaś rozważań podobnych do tych, które doprowadziły do nierówności (47), udowodnimy, że wielkość $\frac{\partial}{\partial \eta} (\Psi)_i$ istnieje i że:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\Psi)_i = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_i,$$

gdy oś $O\eta$ schodzi się z osią Ox . Spostrzemy też, że $\frac{\partial}{\partial \eta} (\Psi)_i$ jest funkcją ciągłą. Równanie (54) wskazuje, że tożsamo stosuje się do funkcji $\frac{\partial}{\partial \eta} (\Psi)_e$. Ostatecznie, opierając się wciąż na ustępie 6, stwierdzimy, że dla odpowiednio dobranej wartości stałej A spełniają się nierówności (57), spostrzemy, że przy tem wszystkim nie potrzeba zakładać istnienia pochodnych drugich funkcji σ .

11. W przypadku, gdy funkcja σ posiada pochodne drugie ciągłe, stwierdzimy istnienie wielkości:

$$(60) \quad \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\Psi)_i, \quad \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\Psi)_e, \quad \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \eta'} (\Psi)_i, \quad \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \eta'} (\Psi)_e,$$

i udowodnimy nierówności (58) i (59).

Oznaczmy przez $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej do powierzchni (S) , wystawionej w punkcie, do którego odnosi się element powierzchniowy ds . Będzie:

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ \lambda'_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \lambda'_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \lambda'_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} \sigma ds,$$

skąd:

$$(61) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ \lambda'_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \lambda'_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \lambda'_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} \sigma ds.$$

To mając, przypomnijmy sobie twierdzenie następujące: Oznaczmy przez $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ trzy funkcje zmiennych x, y, z takie, że:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

i oznaczmy przez x', y', z' spólrzędne elementu ds , wtedy całka:

$$\int_{(S)} \left\{ \lambda'_1 P(x, y, z') + \lambda'_2 Q(x, y, z') + \lambda'_3 R(x, y, z') \right\} ds,$$

będzie miała wartość niezależną od postaci powierzchni zamkniętej (S) . Otóż jeżeli w wyrażeniach:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \xi \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

gdzie, jak wiadomo, $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$ będziemy na chwilę uważali x', y', z' jako zmienne niezależne, będzie:

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \xi \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{e^{-\mu r}}{r} - \xi \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} = -\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} = -\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

a ponieważ

$$\Delta \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \xi \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} = 0,$$

przeto, na zasadzie przytoczonego wyżej twierdzenia, całka:

$$(62) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ \lambda'_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \xi \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) + \lambda'_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \lambda'_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} ds,$$

będzie miała wartość niezależną od postaci powierzchni zamkniętej (S) . Przekonamy się z łatwością, że ta wartość jest zerem. Istotnie, pozostawiając punkt (x, y, z) w położeniu stałym, przekształćmy powierzchnię (S) w ten sposób, aby wszystkie punkty tej powierzchni oddaliły się nieograniczenie od punktu (x, y, z) ; jest widocznem, że w tych warunkach rozważana całka dążyć będzie do zera; ponieważ zaś powinna pozostać stałą, musi zatem być zerem. Stąd wynika, że do drugiej strony równania (61) można dodać iloczyn całki (63) przez jakąkolwiek stałą σ_0 . W ten sposób mieć będziemy:

$$(63) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_3}{\partial x \partial z} + \xi \sigma_0 \mathfrak{V}_4,$$

gdzie:

$$\mathfrak{V}_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \lambda'_1 (\sigma - \sigma_0) \frac{e^{-\mu r}}{r} ds; \quad \mathfrak{V}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \lambda'_2 (\sigma - \sigma_0) \frac{e^{-\mu r}}{r} ds;$$

$$\mathfrak{V}_3 = -\int_{(S)} \lambda'_3 (\sigma - \sigma_0) \frac{e^{-\mu r}}{r} ds; \quad \mathfrak{V}_4 = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r} \lambda'_1 ds.$$

Weźmy za początek spólrzędnych jakikolwiek punkt O , położony na powierzchni (S) , skierujmy oś z według normalnej wewnętrznej; postarajmy się udowodnić istnienie wielkości $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)_i$ i wyznaczyć granicę wyższą modułu tej wielkości. W tym celu oznaczmy przez $\mathfrak{V}'_1, \mathfrak{V}'_2, \mathfrak{V}'_3, \mathfrak{V}'_4$ części całek, które dają nam funkcje $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3, \mathfrak{V}_4$, odnoszące się do kawałka (S') powierzchni (S) . Jest widocznem, że zadanie nasze sprowadza się do udowodnienia istnienia wielkości:

$$(65) \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}'_1}{\partial x^3} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}'_2}{\partial x^2 \partial y} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}'_3}{\partial x^2 \partial z} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}'_4}{\partial x} \right)_i,$$

i do wyznaczenia granic wyższych ich modułów. W tym celu dobierzmy stałą σ_0 tak, aby była wartością funkcji σ w początku spólrzędnych. Położmy $-g(x', y') = \sigma - \sigma_0$, a przekonamy się, że ta wartość czyni zadość wszelkim założeniom w ustępie 7 i że nadto $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'_3$; wyrażenie przeto $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_3}{\partial x^2 \partial z} \right)_i$ istnieje i możemy łatwo otrzymać granicę wyższą modułu wielkości:

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_3}{\partial x^2 \partial z}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}\right)_{x'=0, y'=0},$$

korzystając z pierwszej z nierówności (39). Rozpatrzmy teraz pochodną $\frac{\partial \mathfrak{Y}_4}{\partial x}$. Jest oczywiście, że funkcja $\mathfrak{Y}$ ustępu 5 staje się identyczna z funkcją $\mathfrak{Y}_4$, gdy uczynimy w niej $g(x', y') = -\frac{\partial z'}{\partial x}$. Wynika stąd, że wielkość $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_4}{\partial x}\right)_i$ istnieje; z uwagi zaś, że wartość bezwzględna pochodnej $\frac{\partial z'}{\partial x}$ jest mniejsza od iloczynu pewnej stałej przez $\sqrt{x'^2 + y'^2}$, wypływa, iż moduł wyrażenia $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_4}{\partial x}\right)_i$ jest mniejszy od iloczynu pewnej stałej przez wielkość $\frac{1}{a}$. Przejdźmy do badania pochodnej $\frac{\partial^3 \mathfrak{Y}_1}{\partial x^3}$. Mamy:

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy',$$

gdzie (S_0) , podobnie jak w ustępach, w których zajmowaliśmy się funkcją $\mathfrak{Y}$, przedstawia część płaszczyzny (x, y) ograniczoną kołem $x^2 + y^2 = R^2$. Uwzględniając równanie (32) i kładąc $\sigma' = \sigma - \sigma_0$, mamy:

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{b_{11}}{4\pi} \iint_{(S_0)} x' \sigma' \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{b_{12}}{4\pi} \iint_{(S_0)} y' \sigma' \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} f_3(x', y') \sigma' \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'.$$

Jeżeli w równaniu (20) zamiast $g(x', y')$ napiszemy $\frac{\partial g}{\partial x'}$, to pierwsza strona tego równania stanie się identyczną z pierwszym wyrazem drugiej strony równania (29), a jeżeli pierwszy wyraz strony drugiej tego ostatniego równania zastąpimy wartością jego, wyprowadzoną z równania (20) i następnie położymy $g(x', y') = x' \sigma'$, będzie:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint_{(S_0)} x' \sigma' \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' = \frac{1}{2\pi} \iint_{(S_0)} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial \sigma'}{\partial x'} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial x'^2} x' \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} (\sigma' + x' \frac{\partial \sigma'}{\partial x'}) \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{z' - z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} (\sigma' + x' \frac{\partial \sigma'}{\partial x'}) \frac{e^{-\mu r}}{r} dy'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} x' \sigma' \left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} x' \sigma' \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} \frac{z' - z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} (\sigma' + x' \frac{\partial \sigma'}{\partial x'}) \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{z' - z}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} x' \sigma' \left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 \frac{(z' - z)^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r}\right) dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} x' \sigma' \frac{\partial z'}{\partial x'} (z - z') \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} dy' - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{(S_0)} x' \sigma' \frac{e^{-\mu r}}{r} dy'.$$

Przekonamy się bez trudności przy pomocy tego wzoru, że wielkość

$$\left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \iint_{(S_0)} x' \sigma' \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'\right)_i$$

istnieje i że można otrzymać granicę wyższą jej modułu w postaci sumy iloczynów wyrazów $\frac{c''}{a}$ i $\frac{c'}{a}$ (przypominamy, że c' i c'' oznaczają granice wyższe modułów pochodnych pierwszych i drugich funkcji σ , której pochodne są, oczywiście, takie same jak pochodne funkcji σ') przez wielomiany całkowite względem $\frac{m}{a}$, a które będą odpowiednio stopnia pierwszego i trzeciego.

Za pomocą podobnego rachunku uzasadnimy analogiczny rezultat odnosnie do wielkości:

$$\left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \iint_{(S_0)} y' \sigma' \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'\right)_i.$$

Wreszcie z uwagi na to, że moduł wyrażenia $f_3(x', y') \sigma'$ jest mniejszy co do wartości bezwzględnej od stałej pomnożonej przez $(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$, przekonamy się, że wielkość

$$\left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \iint_{(S_0)} f_3(x', y') \sigma' \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'\right)_i$$

istnieje i że moduł jej mniejszy od iloczynu liczby $\frac{c'}{a}$ przez wielomian całkowity względem $\frac{m}{a}$ stopnia trzeciego.

Z tego wszystkiego wypływa, że wielkość $\left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2}\right)_i$ istnieje i że moduł jej jest mniejszy od sumy iloczynów wyrażeń $\frac{c''}{a}$ i $\frac{c'}{a}$ przez wielomiany całkowite względem $\frac{m}{a}$ stopnia odp. pierwszego i trzeciego. Podobną metodą dochodzimy do takiegoż rezultatu odnośnie do wielkości $\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2 \partial y}\right)$. Cztery wielkości (65) istnieją i znamy granice wyższe ich modułów, a zatem wielkość $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)$ istnieje i możemy znaleźć granicę wyższą modułu różnicy

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}}.$$

Za pomocą podobnego postępowania wyprowadzamy analogiczne rezultaty dla wielkości:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_i,$$

i dla różnic:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right)_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}}, \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}}.$$

Przy pomocy rozważań, podobnych do rozważań w ust. 9, stwierdzimy, że wyrażenia:

$$(66) \quad \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_i,$$

zmieniają się w sposób ciągły, gdy układ współrzędnych przemieszcza się sposobem ciągłym, tak że początek jego pozostaje zawsze na powierzchni (S), a oś z pozostaje do tej powierzchni normalną.

Udowodnimy teraz istnienie pochodnej $\left(\frac{d\Psi}{dN}\right)_i$, jej ciągłość i szukamy granicy wyższej jej modułu. W tym celu ustawmy ośi współrzędnych jak wyżej i rozłożmy całkę, wyrażającą funkcję Ψ na dwie części Ψ' i Ψ'' , odnoszące się do części (S') i (S'') powierzchni (S). Będzie:

$$\Psi' = \frac{1}{4\pi} \int_{(S')} \sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial z'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial z'}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} dx' dy',$$

skąd:

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial z} = \iint_{(S')} \sigma \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial z'}{\partial x'} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial z'}{\partial y'} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} dx' dy';$$

z uwagi zaś, że:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} - \xi \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

będzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi'}{\partial z} = & -\frac{1}{4\pi} \iint_{(S')} \sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\} dx' dy' \\ & + \frac{\xi}{4\pi} \iint_{(S')} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy', \end{aligned}$$

co daje:

$$(67) \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{(S')} \frac{\partial \sigma}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{(S')} \frac{\partial \sigma}{\partial y'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \frac{\xi}{4\pi} \iint_{(S')} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' + \int_{(S)} \sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial}{\partial x} \right\}.$$

Stosując rezultaty ust. 5 i poprzedzających, przekonamy się, że wielkości:

$$\left(\frac{\partial \Psi'}{\partial z}\right)_i, \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial z}\right)_e$$

istnieją i że:

$$\left(\frac{\partial \Psi'}{\partial z}\right)_i = \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial z}\right)_e;$$

stąd zaś wynika, że wielkości:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_i, \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_e,$$

istnieją, i że:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_i = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_e.$$

Innymi słowy, istnieją wielkości $\left(\frac{d\Psi}{dN}\right)_i$, $\left(\frac{d\Psi}{dN}\right)_e$ i są sobie równe;

możemy tedy wspólną ich wartość oznaczyć przez $\frac{d\Psi}{dN}$ bez obawy dwuznaczności. Z równania zaś (67) i z twierdzeń, które wyrażają się przez nierów-

ności (15), (21), (22), wyprowadzamy wniosek następujący: Istnieje stała B taka, że:

$$(68) \quad \left| \frac{d\Psi}{dN} \right| < B \frac{c''}{a} + B \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) c' + B \frac{m^2}{a} c.$$

Że funkcja $\frac{d\Psi}{dN}$ jest ciągłą, daje się stwierdzić łatwo za pomocą wielokrotnie już poprzednio stosowanej metody.

Z faktu istnienia wielkości (66) i z równania $\Delta\Psi + \xi\Psi = 0$ wynika istnienie pochodnej $\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \right)$. Co się zaś tyczy pochodnych $\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x \partial z} \right)$ i $\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y \partial z} \right)$, to one mogą nie istnieć, lecz z równania (67) wypływa, że pochodne $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x \partial z}$ i $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y \partial z}$ dla $x=y=0$ i dla bardzo małych bezwzględnych wartości z są rzędu wielkości wyrażenia $|\log|z||$.

Metoda w ust. 9, przy pomocy której uzasadniliśmy istnienie wielkości $\frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_i$, daje też możność uzasadnienia istnienia i ciągłości wielkości $\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} \right)_i$, $\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta \partial\eta'} \right)$ oraz stwierdzenia, że czynią one zadość nierównościom (58) i (59). Stąd przy pomocy związku (54) wnioskujemy, że toż samo stosuje się do wielkości $\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} \right)_e$, $\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta \partial\eta'} \right)_e$.

III. O równaniu $\Delta v + \xi v = 0$.

12. Poświęcamy ten rozdział badaniu równania:

$$(1) \quad \Delta v + \xi v = 0,$$

w przypadku szczególnym, gdy parametr ξ czyni zadość nierówności:

$$(2) \quad \frac{m^2}{a^3} \leq \theta,$$

gdzie m i a mają znaczenie, nadane im w ust. 2, θ zaś przedstawia liczbę dodatnią dość małą, aby sprawdzały się nierówności:

$$(3) \quad A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) < \frac{1}{8}; \quad A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} \right) < \frac{1}{8}.$$

W rozdziale VI uwolnimy się od ograniczenia, wyrażonego przez nierówność (2).

W przypadku, gdy ta nierówność zachodzi, dowiedzione w rozdziale poprzedzającym nierówności (45), (47), (56) i (57) dają nam:

$$(4) \quad \left| \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_i + \frac{1}{2} \sigma \right| < \frac{1}{8} c; \quad (5) \quad \left| \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_e - \frac{1}{2} \sigma \right| < \frac{1}{8} c,$$

$$(6) \quad \left| (\Psi)_i - \frac{1}{2} \sigma \right| < \frac{1}{8} c; \quad (7) \quad \left| (\Psi)_e + \frac{1}{2} \sigma \right| < \frac{1}{8} c;$$

$$(8) \quad \left| \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_i + \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} \right| < \frac{1}{8} (c+c'); \quad (9) \quad \left| \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_e - \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} \right| < \frac{1}{8} (c+c'),$$

$$(10) \quad \left| \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right)_i - \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} \right| < \frac{1}{8} (c+c'); \quad (11) \quad \left| \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right)_e + \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} \right| < \frac{1}{8} (c+c').$$

13. Postaramy się wyznaczyć całkę v równania (1) przy pomocy danych następujących: Funkcja v ma sprawdzać równanie (1) w całej rozciągłości obszaru (D) , ograniczonego powierzchnią (S) ; na samej powierzchni ma się redukować do funkcji danej ciągłej $\tilde{v}$. W tym celu położmy:

$$v_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \tilde{v} \frac{d}{dN} \frac{e^{-\nu r}}{r} ds, \quad v_k = - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} (v_{k-1})_e \frac{d}{dN} \frac{e^{-\nu r}}{r} ds.$$

Powiadamy, że funkcję szukaną wyraża wzór:

$$(12) \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

W samej rzeczy, niechaj Ω będzie granicą wyższą modułu funkcji $\tilde{v}$. Nierówności (6) i (7) dają:

$$(13) \quad |(v_k)_i| < \Omega \left(\frac{5}{8} \right)^{k+1}; \quad |(v_k)_e| < \Omega \left(\frac{5}{8} \right)^{k+1},$$

co wskazuje, że szeregi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (v_k)_i, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (v_k)_e,$$

są bezwzględnie zbieżne; na podstawie zaś twierdzenia, wyrażonego przez

nierówności (55) poprzedzającego rozdziału, toż samo stosuje się do szeregu (12). Z drugiej strony twierdzenie, wyrażone przez równanie (59) tegoż rozdziału, daje:

$$(v_0)_i - (v_0)_e = \tilde{\omega}; \quad (v_k)_i - (v_k)_e = - (v_{k-1})_e; \quad (k=1, 2, 3 \dots),$$

co wskazuje znów, że suma v szeregu (12) czynić będzie zadość równaniu:

$$(v)_i = \tilde{\omega}.$$

Sumę v szeregu (12) można przedstawić za pomocą wzoru:

$$(14) \quad v = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{dN}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

gdzie

$$(15) \quad \sigma = \tilde{\omega} - \sum_{k=0}^{\infty} (v_k)_e,$$

co wskazuje, że funkcja v czynić będzie zadość równaniu (1) w całej rozciągłości obszaru (D). Dowiedliśmy tedy, że szereg (12) jest rozwiązaniem postawionego zagadnienia.

Wyprowadzimy niektóre wnioski z tego rezultatu. Równanie (15) i nierówności (13) dają nam $\sigma < \frac{8}{3} \Omega$, a zatem na mocy równania (14), przy uwzględnieniu twierdzenia, wyrażonego przez nierówności (55) poprzedzającego rozdziału, będzie:

$$(16) \quad |v| < \frac{8}{3} \frac{Am}{a} \Omega$$

Załóżmy teraz, że funkcja $\tilde{\omega}$ ma pochodne pierwsze i niechaj Ω' będzie granicą wyższą modułów tych pochodnych. Twierdzenie, wyrażone przez nierówność (11), wskazuje, że funkcje $(v_0)_e$, $(v_1)_e$, $(v_2)_e \dots$ będą miały wszystkie pochodne drugie ciągłe, i jeżeli oznaczmy przez δ''_k granicę wyższą modułów pochodnych drugich tych funkcji, to, na zasadzie nierówności (58) i (59) rozdziału poprzedzającego i z uwagi na nierówności (3) rozdziału niniejszego, będzie:

$$\delta'_0 < \frac{5}{8} \Omega' + \frac{1}{8} \Omega; \quad \delta'_k < \frac{5}{8} \delta'_{k-1} + \frac{1}{8} \delta_{k-1}.$$

Nierówności (13) wskazują, że można przyjąć:

$$(17) \quad \delta_{k-1} = \Omega \left(\frac{5}{8} \right)^k,$$

co prowadzi do nierówności:

$$\delta'_k < \frac{5}{8} \delta'_{k-1} + \frac{1}{8} \Omega \left(\frac{5}{8} \right)^k,$$

i będziemy mieli:

$$(18) \quad \delta'_k < \Omega' \left(\frac{5}{8} \right)^{k+1} + \frac{k+1}{8} \Omega \left(\frac{5}{8} \right)^k.$$

W samej rzeczy, wzór ten sprawdza się dla $k=0$ i łatwo widzieć, że jeżeli jest prawdziwym dla $k=j$, to będzie też prawdziwym dla $k=j+1$, a zatem jest ogólnym. Wynika stąd, że szereg:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \eta} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} (v_k)_e,$$

będzie zbieżny i że moduł sumy szeregu będzie mniejszy od:

$$\Omega' + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Omega' \left(\frac{5}{8} \right)^{k+1} + \frac{k+1}{8} \Omega \left(\frac{5}{8} \right)^k \right\} = \frac{8}{3} \Omega' + \frac{8}{9} \Omega.$$

Stąd i z równania (15) wnosimy, że funkcja σ będzie miała pochodne pierwsze i że

$$(19) \quad \left| \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right| < \frac{8}{3} \Omega' + \frac{8}{9} \Omega.$$

Załóżmy, że funkcja $\tilde{\omega}$ ma pochodne ciągłe aż do rzędu drugiego włącznie i niechaj Ω'' będzie granicą wyższą modułów pochodnych drugich. Twierdzenia rozdziału poprzedzającego pouczają, że funkcje $(v_k)_i$ i $(v_k)_e$ dla $k=0, 1, 2, 3 \dots$, będą miały wszystkie pochodne drugie ciągłe, i jeżeli oznaczmy przez δ''_k granicę wyższą modułów pochodnych drugich tych funkcji, to, na zasadzie nierówności (58) i (59) rozdziału poprzedzającego i z uwagi na nierówności (3) rozdziału niniejszego, będzie:

$$\delta''_0 < \frac{5}{8} \Omega'' + M\Omega' + N\Omega; \quad \delta''_k < \frac{5}{8} \delta''_{k-1} + M\delta'_{k-1} + N\delta_{k-1},$$

gdzie:

$$M = A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3} + \frac{m^3}{a^4} \right); \quad N = A \frac{m^2}{a}.$$

Z tych nierówności oraz z nierówności (17) i (18) otrzymujemy:

$$\delta''_k < \Omega'' \left(\frac{5}{8} \right)^{k+1} + (k+1)(M\Omega' + N\Omega) \left(\frac{5}{8} \right)^k + \frac{1}{16} k(k+1) M\Omega \left(\frac{5}{8} \right)^{k-1},$$

co wskazuje, iż szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \delta''_k$ jest zbieżny. A zatem funkcja σ będzie miała pochodne aż do rzędu drugiego włącznie, a na tej zasadzie, opierając się nadto na wynikach rozdziału poprzedzającego, możemy stwierdzić między innymi istnienie i ciągłość pochodnej $\frac{dv}{dN}$.

14. Postarajmy się teraz wyznaczyć całkę v równania (1) przy pomocy danych następujących: funkcja v w całej rozciągłości obszaru (D) ma czynić zadość równaniu (1), a pochodna $\left(\frac{dv}{dN} \right)_i$ ma się sprowadzać do funkcji ciągłej danej $\tilde{\omega}$.

Położmy:

$$v_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \tilde{\omega} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \quad v_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left(\frac{dv_{k-1}}{dN} \right)_e \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

powiadamy, że będzie:

$$(20) \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

W istocie, z nierówności (4) i (5), jeżeli przez Ω oznaczymy granicę wyższą modułu funkcji $\tilde{\omega}$, wypływa:

$$(21) \quad \left| \left(\frac{dv_k}{dN} \right)_i \right| < \Omega \left(\frac{5}{8} \right)^{k+1}; \quad \left| \left(\frac{dv_k}{dN} \right)_e \right| < \Omega \left(\frac{5}{8} \right)^{k+1},$$

co stwierdza, że szeregi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{dv_k}{dN} \right)_i \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{dv_k}{dN} \right)_e,$$

są zbieżne. Stąd i z uwagi na nierówność (44) rozdziału poprzedzającego wynika, że to samo stosuje się do szeregu (20). Ponieważ twierdzenie, wyrażone przez równanie (43) tegoż rozdziału, daje:

$$\left(\frac{dv_0}{dN} \right)_i - \left(\frac{dv_0}{dN} \right)_e = \tilde{\omega},$$

$$\left(\frac{dv_k}{dN} \right)_i - \left(\frac{dv_k}{dN} \right)_e = - \left(\frac{dv_{k-1}}{dN} \right)_e; \quad (k=1, 2, 3 \dots),$$

będzie przeto $\left(\frac{dv}{dN} \right)_i = \tilde{\omega}$.

Pozostaje jeszcze stwierdzić, że suma v szeregu (20) czyni zadość równaniu (1). Położmy:

$$(22) \quad \sigma = -\tilde{\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{dv_k}{dN} \right)_e,$$

to będzie:

$$(23) \quad v = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds;$$

a zatem funkcja v istotnie równaniu (1) czyni zadość.

Z nierówności (21) i z równania (22) wypływa:

$$(24) \quad |\sigma| < \frac{8}{3} \Omega,$$

a stąd, na mocy równania (23) oraz twierdzenia, wyrażonego przez nierówności (44) rozdziału poprzedzającego, będzie:

$$(25) \quad |v| < \frac{8}{3} \frac{1}{a} \Omega.$$

Przy założeniu, że funkcja $\tilde{\omega}$ ma pochodne pierwsze, dla których granicą wyższą modułów jest Ω' i przy uwzględnieniu twierdzenia, wyrażonego przez nierówność (9), rachunek podobny do tego, który doprowadził nas do nierówności (19), pozwoli nam przekonać się, że funkcja σ , określona przez równanie (22), ma pochodne pierwsze ciągłe, oraz że podobnie jak dla wartości σ , rozważanej w ustępie poprzedzającym, będzie:

$$(26) \quad \left| \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right| < \frac{8}{3} \Omega' + \frac{8}{9} \Omega.$$

Przy uwzględnieniu twierdzenia, wyrażonego przez nierówności (48) rozdziału poprzedzającego, oraz nierówności (3) rozdziału niniejszego, wyprowadzamy z nierówności powyższych (24) i (26):

$$(27) \quad |Dv| < \frac{8}{3} \frac{1}{a} \Omega' + \left(\frac{5}{3} + \frac{8}{9} \frac{1}{a} \right) \Omega,$$

gdzie Dv jest którąkolwiek z pochodnych funkcji v , obliczoną dla jakiegokolwiek punktu, znajdującego się wewnątrz powierzchni (S) i tak blizkiego tej powierzchni, jak się podoba.

15. Możemy już teraz rozwiązać następujące zagadnienie, będące uogólnieniem zagadnienia, traktowanego w ustępie poprzedzającym, a mianowicie wyznaczyć całkę v równania (1) w ten sposób, aby czyniła zadość temu równaniu w całej rozciągłości obszaru (D) , na ograniczeniu zaś obszaru sprawdzała warunek:

$$(28) \quad \left(\frac{dv}{dN} \right)_i = h(v)_i + \bar{\omega},$$

gdzie h jest stałą dodatnią, $\bar{\omega}$ zaś jest daną funkcją ciągłą położenia punktu, pozostającego wciąż na powierzchni (S) .

Postaramy się, korzystając ze wspomnianej w ustępie 1 rozprawy Poincarégo, rozwinąć funkcję v na szereg według potęg całkowitych i dodatnich ilości h , t. j. położymy:

$$(29) \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} w_k h^k.$$

Jeżeli to rozwinięcie jest możliwe, będzie:

$$(30) \quad \Delta w_k + \xi w_k = 0; \quad \left(\frac{dw_0}{dN} \right)_i = \bar{\omega}; \quad \left(\frac{dw_k}{dN} \right)_i = (w_{k-1})_i.$$

Metoda, stosowana w ustępie poprzedzającym, pozwoli nam obliczyć kolejno funkcje $w_0, w_1, \dots$, a twierdzenie, wyrażone przez nierówności (25), poucza nas, że gdy Ω oznacza granicę wyższą modułu funkcji $\bar{\omega}$, będzie:

$$(31) \quad |w_{k-1}| < \Omega \left(\frac{8}{3} - \frac{A}{a} \right)^k, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

co wskazuje, że szereg (29) będzie zbieżny, jeżeli tylko:

$$(32) \quad \frac{8}{3} - \frac{A}{a} h < 1.$$

Z tego, co powiedziano w ustępie poprzedzającym, wynika, że można napisać:

$$(33) \quad w_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \sigma_k \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

gdzie σ_k jest funkcją, odpowiednio dobraną. Nierówności (24) i (25) wskazują, że:

$$(34) \quad |\sigma_k| < \frac{8}{3} \Omega \left(\frac{8}{3} - \frac{A}{a} \right)^k,$$

skąd wypływa, że przy spełnieniu warunku (32) szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k h^k$ jest zbieżny. Przyjmijmy, że tak jest, i położymy:

$$(36) \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k h^k;$$

będzie:

$$(36) \quad v = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

skąd wynika, że funkcja v , t. j. suma szeregu (29) czynić będzie zadość równaniu (1). Pozostaje dowieść, że i równaniu (28) stanie się zadość. Otóż z równań (30) i z nierówności (31) wynika, że przy warunku (32), szereg:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{dw_k}{dN} \right)_i h^k,$$

jest zbieżny, przedstawia zatem funkcję $\left(\frac{dv}{dN} \right)_i$, a stąd, przy uwzględnieniu równań (29) i (30), wypływa, że równaniu (28) w istocie staje się zadość.

Przyjmijmy teraz, że funkcja $\bar{\omega}$ ma pochodne pierwsze ciągle i niechaj Ω' będzie granicą wyższą ich modułów; Ω niechaj będzie granicą wyższą modułu funkcji $\bar{\omega}$. Oznaczmy przez D'_k granicę wyższą modułów pochodnych pierwszych funkcji w_k . Twierdzenia, wyrażone przez nierówność (27) i nierówności (31) dają:

$$D'_0 < \frac{8}{3} - \frac{A}{a} \Omega' + \left(\frac{5}{3} + \frac{8}{9} - \frac{A}{a} \right) \Omega,$$

$$D'_k < \frac{8}{3} - \frac{A}{a} D'_{k-1} + \left(\frac{5}{3} + \frac{8}{9} - \frac{A}{a} \right) \Omega \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{A}{a} \right)^k,$$

skąd

$$D'_k < \Omega' \left(\frac{8}{3} - \frac{A}{a} \right)^{k+1} + \left(\frac{5}{3} + \frac{8}{9} - \frac{A}{a} \right) \Omega \cdot (k+1) \left(\frac{8}{3} - \frac{A}{a} \right)^k.$$

Wypływa stąd, że szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} h^k D w_k,$$

w którym $D w_k$ jest którąkolwiek z pochodnych pierwszych funkcji w_k , jest zbieżny, o ile spełnia się warunek (32), a sumą jego będzie liczba, której moduł jest mniejszy od wyrażenia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Omega' \left(\frac{8}{3} - \frac{A}{a} \right)^{k+1} + \left(\frac{5}{3} + \frac{8}{9} \frac{A}{a} \right) \Omega (k+1) \left(\frac{8}{3} - \frac{A}{a} \right)^k \right\} h^k.$$

Udowodniliśmy tym sposobem, że jeżeli funkcja ω ma pochodne pierwsze ciągłe, to moduły pochodnych pierwszych funkcji v , nawet w bezpośredniej bliskości powierzchni (S) pozostają mniejszemi od liczby oznaczyć się dające.

16. Przypomnijmy tu niektóre twierdzenia, odnoszące się do równania (1), a na których poniżej wywody nasze oprzemy.

Przypuśćmy najprzód, że funkcja v jest rzeczywista i że parametr ξ sprowadza się do liczby rzeczywistej ujemnej; dajmy, że $\xi = -m^2$. W tym przypadku wartość bezwzględna funkcji v nie może przewyższać nigdy maximum wartości bezwzględnych funkcji v na powierzchni (S) . W samej rzeczy, jeżeliby w punkcie x_0, y_0, z_0 , położonym wewnątrz powierzchni (S) , moduł funkcji v miał wartość większą, niż w każdym innym punkcie obszaru (D) lub powierzchni (S) , wtedy funkcja v miałaby w punkcie (x_0, y_0, z_0) albo maximum dodatnie albo minimum ujemne; o toż w każdym z tych przypadków Δv i v musiałyby być znaków przeciwnych, co jest niemożliwem, gdyż równanie (1), które obecnie można napisać w postaci $\Delta v = m^2 v$ pokazuje, że Δv i v , są zawsze jednego znaku.

Wyprowadzamy bezpośrednio z poprzedzającego, że gdy parametr ξ ma wartość rzeczywistą i ujemną, funkcja v jest zerem w całej rozciągłości obszaru (D) , jeżeli jest zerem na powierzchni (S) . Udowodnimy, że to samo ma miejsce dla każdej wartości parametru, nie będącej liczbą rzeczywistą dodatnią. W tym celu uwidocznimy część rzeczywistą i urojoną funkcji v , t. j. położmy $v = P + iQ$, wtedy przy uwzględnieniu równań (3) ustępu 2 będzie:

$$\Delta P + \alpha P - \beta Q = 0; \quad \Delta Q + \alpha Q + \beta P = 0.$$

Z twierdzeń Greena — ponieważ funkcje P i Q znikają na powierzchni (S) — wypływa:

$$\int_{(D)} (Q \Delta P - P \Delta Q) d\tau = 0,$$

gdzie $d\tau$ oznacza element objętości, a skaznik (D) , że całkowanie ma być rozciągnięte na cały obszar (D) . Wyprowadzamy z równań poprzednich:

$$\beta \int_{(D)} \{ P^2 + Q^2 \} d\tau = 0,$$

a stąd $P=0$, $Q=0$; a zatem, jak było do okazania, funkcja v jest zerem w całej rozciągłości obszaru (D) .

W dowodzeniu tem przyjmujemy milcząco, że wielkości $\left(\frac{dv}{dN}\right)_i$ istnieją. W istocie rzeczy, założenie to, jak zobaczymy później, nie jest koniecznem; zresztą już teraz łatwo okazać, że niema potrzeby zakładać istnienia pochodnej $\left(\frac{dv}{dN}\right)_i$, gdy parametr ξ czyni zadość nierówności (2). Aby to okazać, oznaczamy przez δ długość bardzo małą i niechaj (S_δ) oznacza powierzchnię, będącą miejscem punktów, znajdujących się wewnątrz powierzchni (S) w odległości δ od tejże. Funkcja v będzie określoną niewzruszennie wewnątrz powierzchni (S_δ) przez wartości, które przybiera na samej powierzchni; w istocie, gdyby było inaczej, to możnaby znaleźć funkcję v' , nie tożsamościowo równą zera, która w całej rozciągłości obszaru ograniczonego powierzchnią (S_δ) czyniłaby zadość równaniu $\Delta v' + \xi v' = 0$, i miała wartość zera na samej powierzchni (S_δ) . Otóż rezultat dopiero otrzymamy wskazuje, że to jest niemożliwe. Stąd i z tego, że staje się zadość nierówności (2) wynika, że wartości funkcji v wewnątrz powierzchni (S_δ) dają się wyprowadzić z wartości funkcji na powierzchni przy pomocy metody wyłożonej w ust. 13. Oznaczmy przez Ω maximum modułów wartości, które przyjmuje funkcja v na powierzchni (S_δ) . Funkcja ta wewnątrz powierzchni (S_δ) na podstawie twierdzenia, wyrażonego przez nierówność (16), czynić będzie zadość nierówności:

$$|v| < \frac{8}{3} \frac{A'm}{a} \Omega,$$

gdzie A' jest liczbą dodatnią, która dąży do A , gdy δ dąży do zera. Z drugiej strony gdy δ dąży do zera, zmierza też i Ω do zera na zasadzie założenia. Wynika stąd bezpośrednio, że v będzie zerem w całej rozciągłości obszaru (D) , co było do okazania.

Oto jeszcze jedno twierdzenie, które będzie nam pożytecznem w następstwie. Jeżeli funkcja v w całej rozciągłości obszaru (D) czyni zadość równaniu $\Delta v + \xi v = 0$ i nadto na ograniczeniu obszaru spełnia warunek $\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h v$, gdzie h jest liczbą skończoną, zerem lub liczbą dodatnią, to wtedy jest ona zerem w całej rozciągłości obszaru (D) , o ile tylko parametr ξ nie staje się liczbą rzeczywistą dodatnią lub zerem. Uwidocznimy część rzeczywistą i urojoną funkcji v i położmy $v = P + iQ$, wtedy będzie, jak wyżej:

$$\beta \int_{(D)} (P^2 + Q^2) d\tau = 0,$$

skąd $P=Q=0$. Będzie zatem $v=0$ w całej rozciągłości obszaru (D) . W rozumowaniu powyższem zakłada się, że β nie jest zerem. Położmy teraz $\beta=0$, będzie wtedy:

$$\xi = -m^2, \quad \Delta P - m^2 P = 0, \quad \Delta Q - m^2 Q = 0,$$

a ponieważ:

$$\int_{(D)} P \Delta P d\tau = - \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau - \int_{(S)} P \left(\frac{dP}{dN} \right)_i ds,$$

przeto z uwagi na związek $\left(\frac{dP}{dN} \right)_i = hP$, będziemy mieli:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + m^2 P^2 \right\} d\tau + h \int_{(S)} P^2 ds = 0,$$

skąd z przyczyny że $h \geq 0$, wynika $P=0$. Podobnie znaleźć można $Q=0$; i tym sposobem twierdzenie jest dowiedzione.

Kończymy te rozważania ogólną uwagą, że zagadnienia, odnoszące się do całkowania równania (1), rozwiązane przez nas w ustępach poprzedzających, mają jedno tylko rozwiązanie. W samej rzeczy, gdyby było inaczej i gdyby jedno z tych zagadnień miało dwa różne rozwiązania v' i v'' , wtedy funkcja $v=v'-v''$ w całej rozciągłości obszaru (D) czyniłaby zadość równaniu (1), nie byłaby tedy tożsamościowo zerem i spełniałaby nadto na ograniczeniu warunek $(v)_i=0$ lub warunek $\left(\frac{dv}{dN} \right)_i = hv$. Otóż udowodniliśmy, że każda z tych dwu alternatyw jest niemożliwą, gdy ξ czyni zadość warunkowi (2).

17. Weźmy w obszarze (D) dwa punkty (x_0, y_0, z_0) i (x_1, y_1, z_1) i niechaj r będzie ich odległością. Nazwijmy, idąc za Poincaré'm i uszczególniając nieco jego definicję, funkcją Greena uogólnioną, albo wprost funkcją Greena, funkcję $G(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$, która, uważana za funkcję zmiennych x, y, z , ma własności następujące: w całej rozciągłości obszaru (D) , z wyjątkiem punktu (x_0, y_0, z_0) czyni zadość równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$(37) \quad \Delta G + \xi G = 0;$$

w sąsiedztwie punktu (x_0, y_0, z_0) różnica $G - \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}$ zostaje skończoną i ciągłą wraz ze swoimi pochodnymi; wreszcie na ograniczeniu obszaru funkcja spełnia warunek:

$$(38) \quad \left(\frac{dG}{dN} \right)_i = hG.$$

Dla krótkości mówić będziemy, że warunek

$$(39) \quad (G)_i = 0,$$

jest tem, do czego sprowadza się warunek (58) przy $h=\infty$.

Łatwo widzieć, że funkcja Greena istnieje przynajmniej wtedy, jeżeli staje się zadość nierówności (2) niniejszego rozdziału i jeżeli, gdy h nie jest nieskończonem, staje się też zadość nierówności (32). W samej rzeczy, położmy:

$$(40) \quad G(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} + g(x_0, y_0, z_0, x, y, z),$$

i wyznaczmy funkcję g w ten sposób, aby, jako funkcja zmiennych x, y, z , czyniła zadość w całej rozciągłości obszaru (D) równaniu o pochodnych cząstkowych $\Delta g + \xi g = 0$, a na ograniczeniu obszaru spełniała warunek:

$$\left(\frac{dg}{dN} \right)_i = hg + h \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right)_i,$$

albo, gdy $h=\infty$, warunek:

$$(g)_i = - \left(\frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} \right)_i.$$

W przypadku pierwszym będzie można obliczyć funkcję g za pomocą metody, wyłożonej w ustępie 15, w drugim przypadku za pomocą metody ust. 13. Z drugiej strony jest widocznem, że wartości funkcji G , przedstawionej przez równanie (40), będzie miała wszystkie te własności, o które nam idzie. Dodajmy uwagę następującą: Z tego, co powiedziano w ustępach 13 i 15, wypływa, że funkcja g , w powyższy sposób obliczona, będzie miała jako funkcja zmiennych x, y, z jeszcze własność następującą: jej pochodne pierwsze będą skończone i ciągle nawet w sąsiedztwie bezpośrednim powierzchni (S) , skąd wnosimy, że wielkość $\left(\frac{dG}{dN} \right)_i$ istnieje i będzie ciągła nawet w przypadku $h=\infty$.

Nasuwa się naturalnie pytanie, czy zagadnienie o wyznaczeniu funkcji Greena może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Łatwo wyprowadzimy z twierdzeń, udowodnionych w ustępie poprzedzającym, że zagadnienie to ma jedno tylko rozwiązanie, o ile sprawdza się nierówność (2). Zobaczymy zresztą później, że to ścieśnienie nie jest koniecznem.

Funkcje Greena są symetryczne względem dwu układów zmiennych x_0, y_0, z_0 ; x, y, z . Innemi słowy, mamy tożsamościowo:

$$G(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = G(x, y, z, x_0, y_0, z_0).$$

Można tego dowieść zupełnie tak samo jak dla funkcji Greena zwyczajnej, odnoszącej się do równania Laplace'a:

Położmy:

$$(41) \quad I = \int_{(D)} |G(x_0, y_0, z_0, x, y, z)|^2 d\tau,$$

gdzie $d\tau$ jest elementem objętości, odnoszącym się do punktu x, y, z , i gdzie skaznik (D) wskazuje, że całkowanie powinno być rozciągnięte na cały obszar (D) . Uwidoczniając część rzeczywistą i urojoną funkcji G , położmy:

$$(42) \quad G(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = G_1(x_0, y_0, z_0, x, y, z) + iG_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z).$$

Powiadamy, że będzie:

$$(43) \quad I = \int_{(D)} \{G_1^2 + G_2^2\} d\tau = \frac{G_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)}{\beta}.$$

Mamy:

$$(44) \quad \Delta G_1 + \alpha G_1 - \beta G_2 = 0, \quad \Delta G_2 + \alpha G_2 + \beta G_1 = 0.$$

$$(45) \quad \frac{dG_1}{dN} = h G_1, \quad \frac{dG_2}{dN} = h G_2.$$

Otoczmy punkt x_0, y_0, z_0 małą kulą (S_0) promieniu ϱ , oznaczmy przez (D') część obszaru (D) , znajdującą się zewnątrz kuli (S_0) i niechaj ds_0 będzie elementem powierzchni (S_0) . Oznaczmy przez symbol $\frac{d}{dN_0}$ różniczkowanie względem normalnej zewnętrznej do kuli (S_0) . Uwzględniając równania (44) i (45), otrzymujemy na podstawie twierdzenia Greena:

$$\int_{(S_0)} \left(G_2 \frac{dG_1}{dN'} - G_1 \frac{dG_2}{dN'} \right) ds_0 + \beta \int_{(D')} (G_1^2 + G_2^2) d\tau = 0,$$

gdzie skazniki (S_0) i (D') oznaczają, że całkowanie rozciąga się w jednej całce na całą powierzchnię kuli (S_0) , w drugiej na cały obszar (D') . Zauważmy, że wyrażenia $\frac{dG_1}{dN'} + \frac{1}{\varrho^2} G_1$ i $\frac{dG_2}{dN'} + \frac{1}{\varrho^2} G_2$ są rzędu wielkości wyrażenia $\frac{1}{\varrho}$. Niechaj w poprzednim wzorze ϱ dąży do zera; będzie wtedy w granicy:

$$-G(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) + \beta \int_{(D)} (G_1^2 + G_2^2) d\tau = 0,$$

a ten wzór wyraża twierdzenie, o które nam idzie. W tenże sam sposób przekonać się można, że równanie (43) utrzymuje się i dla przypadku $h = \infty$.

18. Zakładając, że staje się zadość nierówności (2), okazemy, iż istnieje pewna liczba dodatnia B , zależąca tylko od powierzchni $((S))$ i parametru h , a mająca wartość skończoną nawet dla $h = \infty$ i taka, że:

$$(46) \quad I < B \frac{m^2}{a^3}.$$

W istocie, weźmy punkt (x_1, y_1, z_1) , położony wewnątrz dziedziny (D) , w odległości r_1 od punktu x, y, z . Rozpatrzmy funkcję $\frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1}$, która, uważana jako funkcja zmiennych x, y, z , czyni zadość równaniu:

$$(47) \quad \Delta \frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1} + \xi \frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1} = 0.$$

Opiszmy z punktów (x_0, y_0, z_0) i (x_1, y_1, z_1) , jako ze środków, dwie małe kule (S_0) i (S_1) , i niechaj (D'') będzie kawałkiem obszaru (D) , znajdującym się zewnątrz tych dwu kul. Zastosujmy do funkcji $\frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1}$ i G_2 , uważanych za funkcje zmiennych x, y, z i do obszaru (D'') twierdzenie Greena. Gdy promienie kul (S_0) i (S_1) zdążają do zera, wtedy w granicy, przy uwzględnieniu drugiego z równań (44) i równania (47), będziemy mieli:

$$G_2(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = \frac{\beta}{4\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} (G_1 - iG_2) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} G_2 \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} \frac{dG_2}{dN} ds.$$

Równanie to, stosownie do tego, czy h jest skończone czy nieskończone, przy uwzględnieniu w pierwszym razie drugiego z równań (45), w drugim razie równania $(G_2)_i = 0$, wynikającego z równania (39), da nam:

$$(48) \quad G_2(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = \frac{\beta}{4\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} (G_1 - iG_2) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} G_2 \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} ds - \frac{h}{4\pi} \int_{(S)} G_2 \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} ds.$$

lub

$$(49) \quad G_2(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = \frac{\beta}{4\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} (G_1 - iG_2) d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} \frac{dG_2}{dN} ds.$$

Rozpatrzmy najprzód przypadek, w którym h nie jest nieskończone. Oznaczmy przez M maximum bezwzględnej wartości funkcji $G_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$, gdy punkt x, y, z opisuje powierzchnię (S) i niechaj x', y', z' będzie jakimkolwiek punktem na tej powierzchni. Twierdzenia, wyrażone przez nierówności (6) rozdziału niniejszego i przez nierówności (44) rozdziału poprzedzającego, dają nam dla punktu (x', y', z') :

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} G_2 \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} ds \right)_i - \frac{1}{2} G_2(x_0, y_0, z_0, x', y', z') = \frac{\lambda'}{8} M,$$

$$\left(\frac{h}{4\pi} \int_{(S)} G_2 \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} ds \right)_i = \lambda'' \cdot \frac{Ah}{a} M,$$

gdzie λ' i λ'' są czynnikami zespolone, których moduły są mniejsze od jedności. Równanie (48), przy uwzględnieniu tych wzorów, daje:

$$(50) \quad G_2(x_0, y_0, z_0, x', y', z') = \left(\frac{\beta}{2\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} (G_1 - i G_2) d\tau \right)_i + \frac{\lambda'}{4} M + 2\lambda'' \frac{Ah}{a} M.$$

Przyjmijmy teraz, że liczbę θ , po stronie drugiej nierówności (2) niniejszego rozdziału, wybraliśmy tak małą, aby było:

$$(51) \quad \frac{Ah}{a} \leq \frac{1}{8};$$

obierzmy dalej punkt (x', y', z') na powierzchni (S) tak, aby wartość bezwzględna funkcji $G_2(x_0, y_0, z_0, x', y', z')$ była równa M . Równanie (50) da wtedy:

$$(52) \quad M < \left| \left(\frac{\beta}{\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} (G_1 - i G_2) d\tau \right)_i \right|.$$

Zanim pójdziemy dalej, przypomnijmy sobie twierdzenie Schwarz'a, które można wysłowić w sposób następujący: Niechaj $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k; \varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_k$ będą funkcje rzeczywiste w liczbie $2k$; połączmy:

$$E = \int_{(D)} \sum_{i=1}^k \varphi_i^2 d\tau, \quad E' = \int_{(D)} \sum_{i=1}^k \varphi_i'^2 d\tau, \quad K = \int_{(D)} \sum_{i=1}^k \varphi_i \varphi_i' d\tau,$$

będzie wtedy:

$$(53) \quad K^2 \leq EE'.$$

Aby dowieść tego twierdzenia, dość zauważyć, że formę kwadratową

$\zeta^2 E + 2K\zeta\zeta' + E'\zeta'^2$, w której ζ i ζ' są zmienne rzeczywiste, można wyrazić przez całkę, nie mogącą przyjmować nigdy wartości ujemnych. Oczywiście jest:

$$(54) \quad \left| \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} (G_1 - i G_2) d\tau \right| < \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} \sqrt{G_1^2 + G_2^2} d\tau;$$

zastosujmy do strony drugiej tej całki twierdzenie, wyrażone przez nierówności (53), i połączmy w tym celu:

$$k = 1, \quad \varphi_1 = \frac{e^{-2\mu r_1}}{r_1}, \quad \varphi'_1 = \sqrt{G_1^2 + G_2^2};$$

będzie:

$$\left\{ \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} \sqrt{G_1^2 + G_2^2} d\tau \right\}^2 < I \int_{(D)} \frac{e^{-2\mu r_1}}{r_1^2} d\tau,$$

gdzie I jest liczbą, określoną przez równanie (41). W całce, która znajduje się po stronie drugiej wzoru poprzedzającego, rozciągajmy całkowanie na całą przestrzeń, zamiast ograniczać się na obszarze (D) ; otrzymamy tedy:

$$(55) \quad \left\{ \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} \sqrt{G_1^2 + G_2^2} d\tau \right\}^2 < \frac{2\pi}{a} I,$$

skąd i z nierówności (52) i (54) wypływa:

$$(56) \quad M^2 < \frac{2\beta^2}{\pi a} I.$$

Zauważmy, że równanie (48) utrzymuje się, gdy położymy $x_1 = x_0, y_1 = y_0, z_1 = z_0$. Aby się o tem przekonać, dość zastąpić dwie kule (S_0) i (S_1) , które występują w wywodzie tego równania przez jedną jedyną kulę (S_0) . Położymy tedy w równaniu (48) $x_1 = x_0, y_1 = y_0, z_1 = z_0$; wtedy z uwagi, iż nierówności (54) i (55) mają miejsce dla wszelkiego położenia punktu (x_1, y_1, z_1) w obszarze (D) , uwzględniając nierówności (44) i (55) rozdziału poprzedzającego i opierając się wreszcie na nierówności (56) rozdziału niniejszego, będziemy mieli:

$$G(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) < \frac{|\beta|}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{1}{a} + A \frac{m|\beta|}{a}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{Ah|\beta|}{a}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{a}}.$$

Równanie (43) daje przeto:

$$\sqrt{I} < \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{a}} + A \frac{m}{a\sqrt{a}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{Ah}{a\sqrt{a}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right\},$$

skąd:

$$I < \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{a}{m} + A \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{Aah\sqrt{2}}{am\sqrt{\pi}} \right\}^2 \frac{m^2}{a^3},$$

gdzie stosunek $\frac{a}{m}$ jest mniejszy od jedności, a z założenia druga strona 0 nierówności (3) jest wybrana tak, że sprawdza się nierówność (51). Dość wziąć przeto:

$$B = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} + A \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \right\}^2,$$

aby miała miejsce nierówność (46).

Pozostaje zbadać przypadek, w którym parametr h jest nieskończony. Wróćmy do równania (49) i oznaczmy na chwilę przez $F(x_1, y_1, z_1)$ i $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ pierwszą i drugą całkę drugiej strony tego równania; będziemy mieli:

$$(57) \quad G_2(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = F(x_1, y_1, z_1) - \Phi(x_1, y_1, z_1).$$

Funkcja $G_2(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1)$ znika, skoro punkt (x_1, y_1, z_1) znajdzie się na powierzchni (S) ; będzie tedy:

$$(58) \quad (F)_i - (\Phi)_i = 0.$$

Z drugiej strony jest widocznem, że nierówności (54) i (55) utrzymują się i wtedy, gdy h jest nieskończone; z uwagi przeto na równanie (58) będzie:

$$(59) \quad |(\Phi)_i| < \frac{|\beta|}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{I}{a}}.$$

Ponieważ funkcja $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ w całej rozciągłości obszaru (D) czyni zadość równaniu $\Delta \Phi + \xi \Phi = 0$, a nierówność (2) jest spełniona, przeto można tę funkcję Φ wyznaczyć za pomocą metody, wyłożonej w ust. 13, i stosować do niej twierdzenie, wyrażone przez nierówność (16). Stąd, przy uwzględnieniu nierówności (59) będzie:

$$|\Phi| < |\beta| \cdot \frac{8}{3} \frac{Am}{a} \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{I}{a}};$$

z przyczyny zaś możności stosowania nierówności (54) i (55) do rozważanego przypadku jest zarazem:

$$|F| < \frac{|\beta|}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{I}{a}}.$$

Stąd równanie (57), które utrzymuje się widocznie dla $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, daje:

$$G(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) < \frac{8}{3} \frac{Am}{a} \frac{|\beta|}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{I}{a}} + \frac{|\beta|}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{I}{a}},$$

a z tej nierówności, przy uwzględnieniu równań (43), wypływa:

$$\sqrt{I} < \left\{ \frac{8}{3} \frac{A}{2\sqrt{2}\pi} + \frac{a}{2m\sqrt{2}\pi} \right\} \frac{m}{a\sqrt{a}}.$$

Ponieważ $\frac{a}{m} < 1$, więc dość przyjąć, że:

$$B = \left(\frac{8}{3} \frac{A}{2\sqrt{2}\pi} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \right)^2,$$

aby stało się zadość nierówności (46).

IV. Całkowanie równania $\Delta u + \xi u + f = 0$; istnienie funkcji harmoniczných.

19. Przechodzimy do rozwiązania zagadnienia, podanego we wstępie, t. j. chcemy obliczyć funkcję u , czyniącą zadość w całej rozciągłości obszaru (D) równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$(1) \quad \Delta u + \xi u + f = 0,$$

a na ograniczeniu tegoż warunkowi:

$$(2) \quad \frac{du}{dN} = hu.$$

Przyjmijmy, że funkcja dana $f(x, y, z)$, stanowiąca wyraz trzeci równania (1), ma w sąsiedztwie każdego punktu (x, y, z) , wziętego we wnątrz obszaru (D) , pochodne pierwsze ciągłe; lecz mogłoby być, że jeżeli punkt (x, y, z) zmierza do punktu położonego na ograniczeniu (S) obszaru (D) , wtedy pochodne funkcji f nie dążą do granic skończonych i oznaczonych. Przyjmujemy nadto we wszystkich przypadkach, że funkcja $f(x, y, z)$ pozostaje ciągłą, nawet na powierzchni (S) .

Dodajmy, że zagadnienie, polegające na obliczeniu funkcji u , ma jedno tylko rozwiązanie, skoro parametr ξ czyni zadość nierówności (2) roz-

działu poprzedzającego. W samej rzeczy, gdyby zagadnienie to miało dwa rozwiązania u' i u'' , wtedy funkcja $v = u' - u''$ czyniłaby zadość w całej rozciągłości obszarowi (D) równaniu $\Delta v + \xi v = 0$ i nadto na ograniczeniu warunkowi $\frac{dv}{dN} = hv$. Otóż przy naszych założeniach może to mieć miejsce tylko

wtedy, jeżeli w całej rozciągłości obszaru (D) jest $v = 0$, czem właśnie udowadnia się powyższe twierdzenie. W istocie, twierdzenie to utrzymuje się wtedy, gdy nie spełnia się nierówność (2); dość, by parametr ξ nie był liczbą rzeczywistą nieujemną. Wynika to wprost z poprzedzającego dowodzenia w przypadku, gdy h nie jest nieskończone; dla przypadku, w którym h jest nieskończonością, damy dowodzenie osobne.

Oznaczmy przez r odległość punktów (x, y, z) i (x', y', z') , przez $d\tau$ element objętości, odnoszący się do punktu (x', y', z') i położmy na chwilę:

$$(3) \quad \Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r}}{r} f(x', y', z') d\tau,$$

gdzie skłótnik (D) oznacza, iż całkowanie ma być rozciągnięte na całą dziedzinę (D) . Z samej ciągłości funkcji $f(x', y', z')$ wnosimy bez trudności, że funkcja Φ ma pochodne pierwsze. Zobaczymy następnie, że istnienie pochodnych pierwszych funkcji f dla każdego punktu, wziętego wewnątrz obszaru (D) , pozwoli nam uzasadnić istnienie pochodnych drugich funkcji Φ dla takiego punktu i stwierdzić wreszcie, że funkcja Φ czyni zadość w całej rozciągłości obszaru (D) równaniu $\Delta \Phi + \xi \Phi + f = 0$. Jeżeli więc położymy $v = u - \Phi$, to funkcja v będzie czyniła zadość równaniu $\Delta v + \xi v = 0$ w całej rozciągłości obszaru (D) , a nadto na ograniczeniu spełniać będzie warunek:

$$(4) \quad \left(\frac{dv}{dN} \right)_i = h(v)_i + h(\Phi)_i - \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_i,$$

lub dla $h = \infty$ warunek:

$$(5) \quad (v)_i = -(\Phi)_i.$$

Stąd wypływa, że jeżeli parametr ξ czyni zadość nierówności (2) rozdziału poprzedzającego oraz, jeżeli gdy h nie jest nieskończone, druga strona 6 tej nierówności jest dość mała, by stawało się zadość nierówności (51) tegoż rozdziału, wtedy funkcja v istnieje i będzie można ją obliczyć za pomocą jednej z metod, wyłożonych w ustępach 13, 14, 15.

Oznaczmy, jak w rozdziale poprzedzającym, przez $G(x, y, z, x', y', z')$ funkcję Greena uogólnioną, a przez $d\tau$ element objętości, odnoszący się

do punktu (x', y', z') . Stosując twierdzenie Greena, otrzymujemy z łatwością:

$$(6) \quad u = \int_{(D)} f(x', y', z') G(x, y, z, x', y', z') d\tau,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na cały obszar (D) . Dowód wzoru tego zdaje się dawać powód do zarzutu w przypadku, gdy h jest nieskończone, albowiem wtedy istnienie wielkości $\left(\frac{du}{dN} \right)$ nie jest pewnem a priori. Lecz zobaczymy niżej, że zarzut ten nie jest uzasadniony, albowiem można dowieść, że funkcja u ma pochodne pierwsze skończone, nawet w najbliższym sąsiedztwie powierzchni (S) .

Przyjmijmy, że parametr ξ wybraliśmy tak, aby stało się zadość nierówności (2) rozdziału poprzedzającego i że w przypadku, gdy h nie jest nieskończone, że strona druga 6 tej nierówności jest tak mała, że staje się zadość nierówności (51) tegoż rozdziału. Wtedy z nierówności (53) i (46) rozdziału poprzedzającego wyprowadzamy łatwo nierówność:

$$(7) \quad |u|^2 < B \frac{m^2}{a^3} \int_{(D)} |f|^2 d\tau.$$

20. Utrzymajmy założenie, że strona druga 6 nierówności (2) rozdziału poprzedzającego jest dość mała, aby wypływała z niej nierówność (51) tegoż rozdziału, oraz że wybraliśmy ξ tak, aby tym nierównościom stawało się zadość. Okażemy, że można znaleźć liczbę dodatnią B' , zależną tylko od powierzchni (S) oraz od parametrów ξ i h , aby było:

$$(8) \quad |Du| < B' F,$$

gdzie Du oznacza którąkolwiek z pochodnych pierwszych funkcji u , F zaś oznacza granicę wyższą modułu funkcji $f(x, y, z)$, wchodzącej do równania (1).

Rozpatrzmy przypadek, w którym parametr h ma wartość skończoną, rzeczywistą i nieujemną, i założmy nadto, lecz tymczasowo tylko, że funkcja $f(x, y, z)$ ma pochodne pierwsze skończone i ciągłe nawet w sąsiedztwie bezpośrednim powierzchni (S) . Spostrzegamy wtedy bez trudności, że funkcja u , którą będzie można obliczyć za pomocą metody, wyłożonej w ustępie poprzedzającym, będzie miała pochodne pierwsze, które pozostaną skończonemi i ciągłymi nawet w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni (S) . To mając, starajmy się wyznaczyć granicę wyższą modułów tych pochodnych.

Stosując twierdzenie Greena, znajdziemy z łatwością:

$$(9^a) \quad u = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} u \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{du}{dN} ds,$$

skąd, przy uwzględnieniu równania (2), wynika:

$$(9) \quad u = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} u \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds - \frac{h}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r} u ds.$$

Powołując się na określenia znakowań, podane w ust. 8, oznaczmy przez H' maximum modułu wielkości $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, przez H granicę wyższą modułu funkcji u . Nierówność (10) poprzedzającego rozdziału oraz nierówność (46) rozdziału II-go dają:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} u \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| < \frac{1}{8} (H + H'),$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{h}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r} u ds \right| < \frac{Ah}{a} H' + A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) Hh.$$

Na zasadzie założeń, uczynionych o parametrze ξ , będziemy mieli:

$$\frac{Ah}{a} < \frac{1}{8}, \quad A \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) < \frac{1}{8},$$

a zatem:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{h}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r} u ds \right| < \frac{1}{8} H' + \frac{h}{8} H$$

Z nierówności tych wypływa, że będzie można znaleźć czynniki zespolone λ' i λ'' o modułach mniejszych od jedności i takie, że będzie:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} u \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\lambda'}{8} (H + H')$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{h}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r} u ds = \frac{\lambda''}{8} (H' + hH)$$

Z równań (9) przy pomocy równań poprzedzających wyprowadzimy z łatwością:

$$\frac{du}{\partial \eta} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau + \frac{H'}{4} (\lambda' + \lambda'') + \frac{H}{4} (\lambda' + h\lambda'').$$

Wybierając punkty i oś, do których odnosi wyrażenie $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ tak, aby moduł tego wyrażenia był maximum, otrzymujemy z równania poprzedzającego:

$$(10) \quad H' < \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau \right| + \frac{H}{2} (1 + h).$$

Jeżeli F jest maximum modułu funkcji $f(x', y', z')$ będzie:

$$(11) \quad \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau \right| < 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} \right) F.$$

Z drugiej strony z nierówności (7) mamy:

$$(12) \quad H^2 < B \frac{m^2}{a^2} F^2 \int_{(D)} d\tau.$$

Nierówności (10), (11) (12) wskazują, że istnieje pewna liczba B_1 , zależna jedynie od powierzchni (S) oraz od parametrów ξ i h , taka, że zachodzi nierówność:

$$(13) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| < B_1 F.$$

Oznaczmy na chwilę przez Ψ wyraz drugi strony drugiej równania (9). Nierówności (12) i (18) i twierdzenie, wyrażone przez nierówność (10) rozdziału poprzedzającego, wskazują, iż można znaleźć pewną liczbę B_2 , zależną tylko od powierzchni (S) oraz od parametrów ξ i h , taką, że

$$(14) \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right| < B_2 F.$$

Jeżeli przez φ oznaczmy wyraz trzeciej strony drugiej równania (9), to równanie to da nam:

$$(15) \quad \left(\frac{d\Psi}{dN} \right)_i = \left(\frac{du}{dN} \right)_i + \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_i - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d}{dN} \right)_i \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau_i.$$

Z równania (2) i z nierówności (12) widać, iż moduł wyrażenia $\left(\frac{du}{dN} \right)_i$ jest mniejszy od iloczynu wielkości F przez stałą analogiczną do stałych B_1 i B_2 .

Z drugiej strony łatwo spostrzedz, że to samo stosuje się do modułów drugiego i trzeciego wyrazów równania (15). A zatem istnieć będzie pewna stała B_3 , analogiczna do stałych B_1, B_2 , i taka, że

$$(16) \quad \left(\frac{d\Psi}{dN} \right)_i < B_3 F.$$

Nierówności (14) i (16) pokazują, że gdy oznaczymy przez Ψ_1 którąkolwiek z pochodnych pierwszych funkcji Ψ i jeżeli położymy:

$$B_4 = + \sqrt{B_2^3 + B_3^2},$$

będzie:

$$(17) \quad |(\Psi_1)_i| < B_4 F.$$

W całej rozciągłości obszaru (D) jest oczywiście $\Delta \Psi_1 + \xi \Psi_1 = 0$, a zatem na mocy tej nierówności oraz twierdzenia, wyrażonego przez nierówności (16) rozdziału poprzedzającego, jest:

$$(18) \quad |\Psi_1| < \frac{8}{3} \frac{Am}{a} B_4 F.$$

Z równania (9), uwzględniając nierówności (13) i (18) i stosując do wyrazu trzeciego strony drugiej tego równania, twierdzenie wyrażone przez nierówność (48) rozdziału II-go, łatwo wniesć, że nierówność (8) jest prawdziwa.

Dowodzenie to utrzymuje się tylko przy ograniczeniu następującem: funkcja $f(x, y, z)$ ma pochodne pierwsze skończone i ciągle nawet w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni (S) .

Postaramy się wykazać, że można uwolnić się od tego ścieśnienia i w tym celu udowodnimy, że nierówność (8) dla wartości ξ , spełniających wyżej wysłowione warunki, dają się też wyprowadzić z założenia, że funkcja u istnieje, oraz że dla każdego punktu wewnątrz powierzchni (S) funkcja u ma sześć pochodnych rzędu drugiego. W punkcie M , wziętym na powierzchni (S) , wystawmy normalną do niej i na tej normalnej odetnijmy długość $MM_1 = \delta$ ku wnętrzu powierzchni. Gdy punkt M opisuje powierzchnię (S) , δ zaś pozostaje stałym, wtedy punkt M_1 opisuje pewną powierzchnię (S_δ) . Jest widocznem, że skoro:

$$(19) \quad \delta \leq \delta_0,$$

δ_0 zaś jest dość małe, wtedy powierzchnia (S_δ) znajduje się całkowicie wewnątrz powierzchni (S) i czyni zadość warunkom, przyjętym dla powierzchni

(S) w ust. 2. Nadajmy symbolom $(F)_\delta$ i $\left(\frac{dF}{dN} \right)_\delta$ to znaczenie względem powierzchni (S_δ) , jakie mają symbole (F) i $\left(\frac{dF}{dN} \right)_i$ względem powierzchni (S) .

Załóżmy, że trzeci wyraz strony pierwszej równania (1), t. j. funkcja $f(x, y, z)$ jest taką, że funkcja u , określona przez równanie (1) i (2), istnieje i ma w każdym punkcie wewnątrz powierzchni (S) nie tylko pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, ale i trzy inne pochodne drugie. Połóżmy:

$$(20) \quad \omega = \left(\frac{du}{dN} \right)_\delta - h(u)_\delta.$$

Jest widocznem, że funkcja ω dążyć będzie do zera, gdy δ dąży do zera; jest też jasnem, że funkcja ω mieć będzie pochodne pierwsze. Oznaczmy przez v funkcję, sprawdzającą w całej rozciągłości obszaru zamkniętego powierzchnią (S_δ) równanie $\Delta v + \xi v = 0$ i czyniącą zadość na ograniczeniu tegoż obszaru warunkowi:

$$(21) \quad \left(\frac{dv}{dN} \right) = h(v)_\delta + \omega.$$

Funkcja v da się wyznaczyć (ust. 16) przez warunki poprzedzające; będzie ona miała pochodne pierwsze skończone w sąsiedztwie bezpośredniem powierzchni (S_δ) i dana będzie przez wzór:

$$(22) \quad v = \frac{1}{4\pi} \int_{(S_\delta)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

gdzie σ jest funkcją, zdążającą do zera wraz z funkcją ω

Położmy:

$$(23) \quad u' = u - v,$$

wtedy funkcja u' w całej rozciągłości obszaru zamkniętego powierzchnią (S_δ) czynić będzie zadość równaniu $\Delta u' + \xi u' + f = 0$, na ograniczeniu będzie spełniała warunek $\left(\frac{du'}{dN} \right)_\delta = h(u')_\delta$ i będzie miała pochodne pierwsze skończone nawet w sąsiedztwie bezpośredniem powierzchni (S) . Rozumując przeto jak wyżej przy wyprowadzaniu równania (8) w przypadku, gdy funkcja u ma pochodne pierwsze skończone w bezpośredniem sąsiedztwie powierzchni (S) , znajdziemy, że istnieje pewna liczba B'' taka, iż

$$|Du'| < B'' F,$$

gdzie Du' wyobraża którąkolwiek z pochodnych pierwszych funkcji u' w jakimkolwiek punkcie wewnątrz powierzchni lub położonym na niej, F zaś wyobraża, jak wyżej, granicę wyższą modułu funkcji $f(x, y, z)$.

Będzie można, oczywiście, tak wybrać liczbę B' , występującą w nierówności (8), aby dla wszystkich wartości δ , czyniących zadość nierówności (19) było $B'' = B'$; będzie tedy:

$$(24) \quad |Du'| < B' F$$

dla wszystkich wartości δ , czyniących zadość nierówności (17).

Weźmy wewnątrz powierzchni (S) punkt M dowolnie bliski tej powierzchni, weźmy przytem δ tak małe, aby punkt M znajdował się wewnątrz powierzchni (S_δ) . Oznaczmy przez $(Du)_M$, $(Du')_M$, $(Dv)_M$ pochodne funkcji u , u' , v w punkcie M względem jednej którejkolwiek ze zmiennych x , y , z . Na zasadzie nierówności (24) i równania (23) będzie:

$$(25) \quad |(Du)_M| < B' F + |(Dv)_M|.$$

Nierówność ta będzie miała miejsce dla wszystkich dowolnie małych wartości δ . Niechaj δ dąży do zera, wtedy i funkcja ω dążyć będzie do zera i także funkcja σ . Otóż wzór (21) pokazuje, że gdy σ dąży do zera, to i $(Dv)_M$ do zera zmierza. Z tego wszystkiego i z nierówności (25) wypływa, że będzie ogólnie:

$$|Du| < B' F.$$

Tym sposobem nierówność (8) jest dowiedziona dla wszystkich wartości skończonych rzeczywistych i nieujemnych ilości h . Pozostaje do zbadania przypadek, w którym $h = \infty$; tem właśnie zajmiemy się obecnie.

21. Mamy do rozważenia przypadek, w którym funkcja u jest określona przez równania:

$$(26) \quad \Delta u + \xi u + f = 0, \quad (27) \quad (u)_i = 0.$$

Założmy najprzód, że funkcja u ma pochodne pierwsze skończone, nawet w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni (S) ; będzie to miało miejsce na przykład wtedy, gdy funkcja $f(x, y, z)$ ma pochodne pierwsze skończone, nawet w sąsiedztwie bezpośrednim powierzchni (S) . Równanie (9^a) , przy uwzględnieniu warunku (27) da nam:

$$(28) \quad u = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{du}{dN} ds.$$

Położmy na chwilę:

$$(29) \quad \Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{du}{dN} ds.$$

$$(30) \quad \varphi = \frac{1}{5\pi} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau.$$

Równania (27) i (28) dają:

$$(31) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi)_i = \frac{\partial}{\partial \eta} (\varphi)_i.$$

Oznaczmy przez H maximum modułu wyrażenia $\frac{du}{dN}$; wtedy na mocy twierdzenia, wyrażonego przez nierówność (4) rozdziału poprzedzającego, będzie:

$$\frac{d\Phi}{dN} = -\frac{1}{2} \frac{du}{dN} + \frac{\lambda}{8} H,$$

gdzie λ jest czynnikiem zespolonym, którego moduł jest mniejszy od 1. To mając, z równania (28) i z poprzedzającego wyprowadzamy:

$$\frac{du}{dN} = 2 \frac{d\varphi}{dN} - \frac{\lambda}{4} H.$$

Dajmy, że to równanie jest napisane dla punktu powierzchni (S) , gdzie moduł wyrażenia $\frac{du}{dN}$ osiąga swoje maximum H ; równanie to da:

$$(32) \quad H < \frac{8}{3} \left| \frac{d\varphi}{dN} \right|.$$

Z równania (31) i z nierówności (32) wyprowadzamy z łatwością wniosek następujący: jeżeli Φ_1 oznacza którąkolwiek z pochodnych pierwszych funkcji Φ , będzie

$$(33) \quad |(\Phi_1)_i| < B_1 F,$$

gdzie B_1 jest liczbą, zależną jedynie od powierzchni (S) oraz parametrów ξ i h , F zaś oznacza, jak wyżej, granicę wyższą modułu funkcji $f(x, y, z)$. Za-

uważmy, że funkcja Φ_1 czyni zadość w całej rozciągłości obszarowi (D) równaniu $\Delta\Phi_1 + \xi\Phi_1 = 0$ i że może być obliczona przy pomocy metody, wyłożonej w ust. 13. Na zasadzie tedy twierdzenia, wyrażonego przez nierówność (16) poprzedzającego rozdziału, będzie dla każdego punktu obszaru (D):

$$|\Phi_1| < \frac{8}{3} \frac{Am}{a} B_5 F.$$

Wnieśmy teraz łatwo z równania (28), że można znaleźć na B' wartość, aby czyniła zadość wszelkim warunkom wymaganym i aby sprawdzała się w tym przypadku nierówność (8).

Mamy jeszcze dowieść, że nierówność (8) utrzymuje się, jeżeli tylko funkcja $f(x, y, z)$ jest wybrana tak, że funkcja u istnieje i ma pochodne drugie w każdym punkcie wewnątrz powierzchni (S), mianowicie nie tylko pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, ale i każde z trzech pochodnych pozostałych. Zobaczymy, że można tu stosować metodę zupełnie analogiczną do użytej przez nas w drugiej części poprzedzającego ustępu; przyčem spostrzeżemy, że nierówność (8) ma miejsce wtedy, gdy funkcja $f(x, y, z)$ czyni zadość założeniom, wysłowionym w ust. 19.

Możemy wyprowadzić ważny wniosek z tych rezultatów, a mianowicie: gdy funkcja w całej rozciągłości obszaru (D) czyni zadość równaniu $\Delta v + \xi v = 0$ i znika na ograniczeniu tego obszaru, wtedy jest tożsamościowo zerem, o ile ξ nie jest liczbą rzeczywistą dodatnią. W samej rzeczy, jeżeli w równaniu $\Delta v + \xi v = 0$ napiszemy $\xi + \zeta$ zamiast ξ , będzie $\Delta v + \xi v + \zeta v = 0$, to zaś nie sprzeciwia się przyjęciu, że ξ spełnia nierówność (2) rozdziału poprzedzającego. Otóż widzimy, że funkcja u , określona przez równania (26) i (27) zlewa się z funkcją v , skoro położymy $f(x, y, z) = \zeta v$; możemy tedy twierdzić, że funkcja v będzie miała pochodne pierwsze, które pozostaną skończonymi nawet w najbliższym sąsiedztwie powierzchni (S). Jeżeli tak jest, to możemy twierdzić (ust. 16), że będzie $v = 0$, o ile tylko $\xi + \zeta$ nie jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Z poprzedzającego rezultatu wyprowadzimy z łatwością, że zagadnienie o wyznaczeniu funkcji u przy pomocy równań (26) i (27) może mieć więcej nad jedno rozwiązanie tylko w przypadku, gdy ξ jest liczbą rzeczywistą dodatnią, i że tożsamo stosuje się do zagadnienia, traktowanego w ust. 13:

22. Widzieliśmy w ustępach poprzedzających, że można obliczyć funkcję u , określoną przez równanie (1) i (2), gdy parametr ξ jest wybrany tak, iż staje się zadość nierówności $\frac{m^2}{a^2} \leq \theta$, gdzie θ jest liczbą dodatnią dość małą, zależną od powierzchni (S) i od parametru h . Aby rozwiązać zagadnienie w przypadku, gdy ten warunek nie spełnia się, napiszmy w równaniu

(1) $\xi + \zeta$ zamiast ξ i postaramy się rozwinąć funkcję u według potęg całkowitych dodatnich ilości ζ . W tym celu położmy:

$$(34) \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \zeta^k,$$

to będzie:

$$(35) \quad \begin{aligned} \Delta u_0 + \xi u_0 + f &= 0, \\ \Delta u_k + \xi u_k + u_{k-1} &= 0. \end{aligned} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$$(36) \quad \frac{du_k}{dN} = hu_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Dajmy, że w tych równaniach ξ ma taką wartość, iż spełnia się warunek $\frac{m^2}{a^2} \leq \theta$. Można wtedy obliczyć kolejno funkcje $u_0, u_1, u_2, \dots$. Idzie teraz o rozwiązanie pytania, czy szereg (34) przedstawia w całej rozciągłości swego koła zbieżności funkcję szukaną u i jaki jest promień tego koła zbieżności.

Oznaczmy przez M_k maximum modułu funkcji u_k ; jest widocznem, że promień koła zbieżności szeregu

$$(37) \quad \sum_{k=0}^{\infty} M_k \zeta^k,$$

równa się promieniowi koła zbieżności szeregu (34). Z drugiej strony nierówność (8) daje:

$$|Du_k| < B' M_{k-1},$$

skąd wynika, że kołem zbieżności szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k Du_k$$

będzie koło zbieżności szeregu (37), które jest identycznym z kołem zbieżności szeregu (34). Wypływa stąd, że funkcja u , która jest sumą szeregu (34), będzie miała pochodne pierwsze skończone w całej rozciągłości obszaru (D), ile razy moduł ilości ζ jest mniejszy od promienia koła zbieżności szeregu (34); a więc gdy ζ czyni zadość temu warunkowi, równaniu (2) staje się zadość. Pozostaje dowieść, że stanie się zadość i równaniu (1).

Oznaczmy w tym celu przez $G(x, y, z, x', y', z')$ funkcję Greena, przed dx element objętości w punkcie (x', y', z') . Będzie:

$$(38) \quad u_0 = \int_{(D)} G f d\tau, \quad u_k = \int_{(D)} u_{k-1} G d\tau. \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Z wzorów tych wnosimy z łatwością, że dla każdej wartości ζ , dla której szereg (34) jest zbieżny, będziemy mieli:

$$(39) \quad u = \int_{(D)} (f + \zeta u) d\tau,$$

Niechaj na chwilę φ oznacza funkcję, czyniącą zadość równaniu:

$$(40) \quad \Delta \varphi + \xi \varphi + \zeta u + f = 0,$$

i spełniającą na ograniczeniu warunek:

$$\frac{d\varphi}{dN} = l\varphi.$$

Jeżeli ζ jest mniejsze od promienia zbieżności szeregu (34), wyrażenie $u + f$ będzie miało pochodne pierwsze, funkcja φ istnieje będzie i da się zupełnie wyznaczyć za pomocą wzoru:

$$\varphi = \int_{(D)} (\zeta u + f) G d\tau.$$

Opierając się na równaniu (39), wnosimy stąd, że $\varphi = u$, a więc na zasadzie równania (40) będzie:

$$\Delta u + (\xi + \zeta) u + f = 0.$$

Stwierdziliśmy tedy, że wewnątrz koła zbieżności szereg (34) przedstawia istotnie funkcję szukaną u . Pozostaje jeszcze zbadać promień zbieżności tego szeregu.

23. Uwidocznijmy część rzeczywistą i urojoną każdej z funkcji $f(x, y, z)$, $u_0, u_1, \dots$, kładąc:

$$(41) \quad f = P_{-1} + iQ_{-1}; \quad u_k = P_k + iQ_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Zgodnie z oznaczeniem ust. 2, będzie:

$$\xi = \alpha + i\beta.$$

$$(42) \quad \begin{cases} \Delta P_k + \alpha P_k - \beta Q_k + P_{k-1} = 0 \\ \Delta Q_k + \alpha Q_k + \beta P_k + Q_{k-1} = 0. \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$(43) \quad \frac{dP_k}{dN} = lP_k, \quad \frac{dQ_k}{dN} = lQ_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Posługując się pomysłem H. Schwarza, połóżmy:

$$(44) \quad J_{n,m} = \int_{(D)} (P_n P_m + Q_n Q_m) d\tau.$$

Z równań (43), przy pomocy twierdzenia Greena, otrzymujemy:

$$\int_{(D)} (Q_m \Delta P_m - P_m \Delta Q_m) d\tau = 0,$$

$$\int_{(D)} (P_{m-1} \Delta P_m - P_m \Delta P_{m-1}) d\tau = 0,$$

$$\int_{(D)} (Q_{m-1} \Delta Q_m - Q_m \Delta Q_{m-1}) d\tau = 0,$$

skąd, na zasadzie równań (42), mamy:

$$(45) \quad \beta J_{m,m} = \int_{(D)} (Q_m P_{m-1} - Q_{m-1} P_m) d\tau,$$

$$\int_{(D)} P_{m-1}^2 d\tau = \beta \int_{(D)} (Q_m P_{m-1} - Q_{m-1} P_m) d\tau + \int_{(D)} P_m P_{m-2} d\tau,$$

$$\int_{(D)} Q_{m-1}^2 d\tau = \beta \int_{(D)} (Q_m P_{m-1} - Q_{m-1} P_m) d\tau + \int_{(D)} Q_m Q_{m-2} d\tau.$$

Dodawszy do siebie stronami dwa ostatnie równania, znajdziemy:

$$(46) \quad J_{m-1,m-1} = \int_{(D)} \{ P_m (P_{m-2} - 2\beta Q_{m-1}) + Q_m (Q_{m-2} + 2\beta P_{m-1}) \} d\tau.$$

Uczynimy obecnie dwa zastosowania twierdzenia, wyrażonego przez nierówność (53) rozdziału III-go. Niechaj będzie najprzód $k=2$; połóżmy:

$$\varphi_1 = P_m, \quad \varphi_2 = Q_m, \quad \varphi'_1 = P_{m-2} - 2\beta Q_{m-1}, \quad \varphi'_2 = Q_{m-2} + 2\beta P_{m-1}$$

z równania (46) otrzymamy:

164

S. ZAREMBA.

$$J_{m-1, m-1}^2 < J_{m, m} \left\{ J_{m-2, m-2} - 4\beta \int_{(D)} (P_{m-2} Q_{m-1} - P_{m-1} Q_{m-2}) d\tau + 4\beta^2 J_{m-1, m-1} \right\}$$

stąd — uwzględniając równanie, które daje się wyprowadzić z równania (45) przez zastąpienie w nim m przez $m-1$, — znajdujemy:

$$(47) \quad J_{m-1, m-1}^2 < J_{m, m} J_{m-2, m-2}.$$

Po drugie, biorąc znów $k=2$, położmy:

$$\varphi_1 = P_m, \quad \varphi_2 = Q_m, \quad \varphi'_1 = -Q_{m-1}, \quad \varphi'_2 = P_{m-1};$$

opierając się na równaniu (45), znajdziemy:

$$\beta^2 J_{m, m}^2 < J_{m, m} J_{m-1, m-1},$$

skąd

$$(48) \quad \beta^2 J_{m, m} < J_{m-1, m-1}.$$

Nierówności (47) i (48) wskazują, że ciąg:

$$(49) \quad \frac{J_{0,0}}{J_{-1,-1}}, \frac{J_{1,1}}{J_{0,0}}, \frac{J_{2,2}}{J_{1,1}}, \dots$$

jest rosnący i zbieżny i, jeżeli granicę jego oznaczmy przez $\frac{1}{l^2}$, będzie $l \geq \beta$.

Dowodniemy, że promień zbieżności l' szeregu (34) jest właściwie równy l .

Stosując nierówność (53) rozdziału III-go, znajdziemy z łatwością z równań (38):

$$|u_k|^2 < I J_{k-1, k-1} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

gdzie I ma to samo znaczenie co w równaniu (41) rozdziału III-go. Poprzednie nierówności dowodzą, że promień zbieżności szeregu (34) jest co najmniej równy promieniowi zbieżności szeregu:

$$(50) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{J_{k-1, k-1}} \cdot \xi^k,$$

który to promień jest oczywiście równy l ; mamy tedy $l' \geq l$. Aby wykazać, że $l' = l$, weźmy długość l'' tak bliską długości l' , jak chcemy i taką, by było $l'' < l'$. Jest widoczne, że będzie można znaleźć liczbę dodatnią g , aby było:

$$|u_k| < \frac{g}{l''^k} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

To mając, oznaczmy przez T objętość obszaru (D) ; b. d. z.:

$$J_{k, k} < \frac{g^2 T}{l''^{2k}} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Wskazuje to, że promień zbieżności szeregu (50) będzie co najmniej równy l'' , innymi słowy będzie $l'' < l$. Widzimy tedy, że nierówność $l'' < l'$ prowadzi za sobą nierówność $l'' < l$, jakkolwiek by blizkimi były l' i l'' ; musi być tedy $l' \leq l$, co wiążąc razem z nierównością $l' \geq l$, dochodzimy do równości $l' = l$, co było do okazania.

24. Z tego, co udowodniono w ustępach poprzedzających, wynika, że funkcja u , określona przez równania (1) i (2), uważana za funkcję parametru zespolonego ξ , jest funkcją analityczną, istniejącą w całej płaszczyźnie tej zmiennej i mogącą mieć punkty osobliwe tylko na osi zmiennej rzeczywistej. Okażemy, że nie posiada ona takich punktów na części ujemnej tej osi. W tym celu nadajmy ilości ξ w ust. 22 i 23 wartość rzeczywistą i ujemną, czyniącą zadość warunkowi (32); innymi słowy niechaj będzie $\frac{1}{m} < 0$, $\xi = -m^2$. Równania (42) dadzą:

$$\Delta P_k - m^2 P_k + P_{k-1} = 0; \quad \Delta Q_k - m^2 Q_k + Q_{k-1} = 0,$$

skąd, przy uwzględnieniu równań (43), mamy:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial P_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_k}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_k}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau + m^2 \int_{(D)} P_k^2 d\tau + h \int_{(S)} P_k^2 ds = \int_{(D)} P_k P_{k-1} d\tau,$$

co daje:

$$m^2 \int_{(D)} P_k^2 d\tau < \int_{(D)} P_k P_{k-1} d\tau.$$

W tenże sam sposób znaleźć można:

$$m^2 \int_{(D)} Q_k^2 d\tau < \int_{(D)} Q_k Q_{k-1} d\tau.$$

Będzie tedy:

$$m^2 J_{k, k} < \int_{(D)} (P_k P_{k-1} + Q_k Q_{k-1}) d\tau.$$

Przy pomocy twierdzenia, wyrażonego przez nierówności (b3) rozdziału III-go, otrzymujemy:

$$m^4 J_{k,k}^2 < J_{k,k} J_{k-1,k-1},$$

skąd

$$m^4 J_{k,k} < J_{k-1,k-1},$$

Widzimy więc, że w tym przypadku granica ciągu (49) będzie co najwyżej równa $\frac{1}{m^4}$, oraz że promień l koła zbieżności szeregu (50), a zatem i promień koła zbieżności szeregu (34) jest co najmniej równy m^2 . Okazuje się tedy, że funkcja u , określona przez równania (1) i (2) i uważana za funkcję parametru zespolonego ξ , nie ma punktów osobliwych na części ujemnej osi zmiennych rzeczywistych w płaszczyźnie tego parametru.

25. Przekonawszy się tedy, że punkty osobliwe funkcji u , uważanej za funkcję parametru ξ , mogą znajdować się tylko na części dodatniej osi rzeczywistej płaszczyzny zmiennej ξ , zwracamy uwagę na to, że funkcja u posiada z pewnością przynajmniej jeden punkt osobliwy, nie położony w nieskończoności. W samej rzeczy, gdyby było inaczej, promień zbieżności szeregu (34) byłby nieskończony, co być nie może, gdyż z metody, podanej dla obliczenia tego promienia, wypływa, iż nieskończonym nie jest.

Starajmy się teraz określić naturę punktów osobliwych funkcji u , uważanej za funkcję parametru ξ . W tym celu zauważmy, że odciętą punktu osobliwego funkcji u charakteryzuje własność następująca: jeżeli utworzymy ciąg (49) dla wartości parametru ξ , której część rzeczywista równa się odciętej punktu osobliwego funkcji u , granicą tego ciągu będzie $\frac{1}{\beta^2}$. Innymi słowy, będzie:

$$(51) \quad \lim \left\{ \frac{J_{m-1,m-1}}{J_{m,m}} - \beta^2 \right\}_{m=\infty} = 0.$$

Położymy:

$$(52) \quad u'_{-1} = f + i\beta u_0; \quad u'_k = u_k + i\beta u_{k+1}, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

będzie:

$$(52^a) \quad \Delta u'_k + \xi u'_k + u'_{k-1} = 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

A zatem, jeżeli, uwidoczniając część rzeczywistą i urojoną wyrażenia u'_k , położymy:

$$(53) \quad u'_k = P'_k + i Q'_k,$$

i uczynimy nadto:

$$(54) \quad J'_{m,n} = \int_{(D)} (P'_m P'_n + Q'_m Q'_n) d\tau,$$

znajdziemy przy pomocy rachunku, zupełnie podobnego do rachunku, rozwinętego w ust. 23, że ciąg:

$$(55) \quad \frac{J'_{0,0}}{J'_{-1,-1}}, \frac{J'_{1,1}}{J'_{0,0}}, \frac{J'_{2,2}}{J'_{1,1}}, \dots$$

jest rosnący i zbieżny i że granicą jego jest liczba, co najwyżej równa $\frac{1}{\beta^2}$.

Równania (41) i (53) dają:

$$(56) \quad P'_k = P_k - \beta Q_{k+1}; \quad Q'_k = Q_k + \beta P_{k+1},$$

skąd:

$$J'_{k,k} = J_{k,k} + \beta^2 J_{k+1,k+1} - 2\beta \int (Q_{k+1} P_k - Q_k P_{k+1}) d\tau;$$

Opierając się na równaniu, wypływającym z równania (45) przez zamianę m na $k+1$, znajdziemy z powyższego:

$$(57) \quad J'_{k,k} = J_{k,k} - \beta^2 J_{k+1,k+1}.$$

Jeżeli więc zachodzi równanie (51), będzie:

$$(58) \quad \lim \left(\frac{J'_{k,k}}{J_{k+1,k+1}} \right)_{k=\infty} = 0.$$

Jeżeli położymy:

$$\Phi_k = \frac{u_k}{\sqrt{J_{k,k}}},$$

to równania (35) i (52), z uwagi, że $\xi = \alpha + i\beta$, dadzą nam:

$$(59) \quad \Delta \Phi + \alpha \Phi_k + \frac{u'_{k-1}}{\sqrt{J_{k,k}}} = 0.$$

Z równania (52^a) wypływa, że:

$$u'_{k-1} = \int_{(D)} u'_{k-2} G d\tau,$$

stąd:

$$|u'_{k-1}|^2 < I J'_{k-2,k-2},$$

gdzie I ma to samo znaczenie co w równaniu (51) rozdziału III-go; będzie tedy:

$$\left| \frac{w'_{k-1}}{V J_{k,k}} \right| < \sqrt{\frac{J'_{k-2,k-2}}{J_{k,k}}} \sqrt{I} = \sqrt{\frac{J'_{k-1,k-1}}{J_{k,k}}} \sqrt{\frac{J'_{k-2,k-2}}{J_{k-1,k-1}}} \sqrt{I}.$$

Z tej nierówności oraz z równań (51) i (58), wnosimy, że obrawszy sobie liczbę dodatnią ε dowolnie małą, możemy znaleźć liczbę całkowitą dodatnią N taką, aby przy warunku $k > N$ było:

$$(60) \quad \left| \frac{w'_{k-1}}{V J_{k,k}} \right| < \varepsilon.$$

Zanim pójdziemy dalej, przypomnijmy sobie następujące twierdzenie Poincarégo¹⁾. Niechaj będzie p funkcją rzeczywistych $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, mających pochodne pierwsze skończone i ciągle w całej rozciągłości obszaru (D) oraz p stałych rzeczywistych $t_1, t_2, \dots, t_p$; położmy:

$$F = \sum_{i=1}^p t_i \varphi_i.$$

Założmy, że liczba całkowita p sprawdza nierówność $p \geq m q^3 + 1$, gdzie m jest liczbą całkowitą, zależną jedynie od natury obszaru (D) , q zaś liczbą całkowitą dowolną. Dość, by stałe $t_1, t_2, \dots, t_p$ czyniły zadość pewnym równaniom liniowym i jednorodnym, których liczba jest co najwyżej równa $m q^3$, aby zachodziła nierówność:

$$\frac{\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau}{\int_{(D)} F^2 d\tau} > E q^2,$$

gdzie E jest liczbą dodatnią, zależną jedynie od obszaru (D) .

Łatwo wniesć z tego twierdzenia, że gdy położymy $\sum_{j=1}^p t_j \varphi_{k_j} = F_1 + i F_2$,

gdzie F_1, F_2 są rzeczywistymi, i obierzemy liczbę całkowitą q tak, aby było $E q^2 \geq \alpha + 1$, liczbę zaś p uczynimy równą $2(m q^3 + 1) - 1$, wtedy, skoro stałe $t_1, t_2, \dots, t_p$ czynią zadość pewnemu układowi $p - 1$ równań liniowych, będzie równocześnie:

¹⁾ Poincaré, l. c.

$$(61) \quad \frac{\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau}{\int_{(D)} F_1^2 d\tau} > \alpha + 1,$$

$$(62) \quad \frac{\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau}{\int_{(D)} F_2^2 d\tau} > \alpha + 1.$$

Z równań (52^a) mamy:

$$(63) \quad \begin{cases} \Delta F_1 + \alpha F_1 + \psi_1 = 0, \\ \Delta F_2 + \alpha F_2 + \psi_2 = 0, \end{cases}$$

gdzie położono:

$$(64) \quad \psi_1 = \sum_{j=1}^p t_j \frac{P'_{k_j-1}}{V J_{k_j, k_j}}, \quad \psi_2 = \sum_{j=1}^p t_j \frac{Q'_{k_j-1}}{V J_{k_j, k_j}}.$$

Z równań (68) i z uwagi, że $\frac{dF_1}{dN} = h F_1$, $\frac{dF_2}{dN} = h F_2$ wyprowadzamy:

$$\begin{aligned} \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau - \alpha \int_{(D)} F_1^2 d\tau + h \int_{(S)} F_1^2 ds &= \int_{(D)} F_1 \psi_1 d\tau, \\ \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau - \alpha \int_{(D)} F_2^2 d\tau + h \int_{(S)} F_2^2 ds &= \int_{(D)} F_2 \psi_2 d\tau. \end{aligned}$$

Przy uwzględnieniu nierówności (61), (62) wynika stąd:

$$\int_{(D)} (F_1^2 + F_2^2) d\tau < \int_{(D)} (F_1 \psi_1 + F_2 \psi_2) d\tau.$$

Stosując tu rachunek podobny do tego, przy pomocy którego wyprowadziliśmy nierówność (48) z równania (45), znajdziemy:

$$(65) \quad \int_{(D)} (F_1^2 + F_2^2) d\tau < \int_{(D)} (\psi_1^2 + \psi_2^2) d\tau.$$

Przyjmijmy, że nierówność $k > N$ sprawdza się dla każdej z wartości $k_1, k_2, \dots, k_p$ liczby k . Opierając się na nierówności (60) i wzorach (64), będzie można znaleźć liczbę K , zależną jedynie od p taką, aby było:

$$\int_{(D)} (\psi_1^2 + \psi_2^2) d\tau < K \varepsilon (t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_p^2).$$

a wtedy na zasadzie nierówności (65) będzie:

$$(66) \quad \int_{(D)} (F_1^2 + F_2^2) d\tau < K \varepsilon (t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_p^2).$$

Zauważmy, że strona pierwsza tej nierówności jest formą kwadratową ilości $t_1, t_2, \dots, t_p$, w której współczynniki kwadratów ilości $t_1, t_2, \dots, t_p$ są wszystkie równe jedności, współczynnik zaś przy $t_j t_{j'}$ ma wyrażenie:

$$2 \frac{J_{k_j, k_{j'}}}{V J_{k_j, k_j} J_{k_{j'}, k_{j'}}},$$

Stąd można wyprowadzić wniosek następujący: Jeżeli liczba ε jest dostatecznie mała, — a do tego wystarcza, by liczba N , t. j. strona druga nierówności $k > N$ była dostatecznie wielka — można znaleźć liczbę δ dodatnią i różną od zera, taką, by jedno z z przynajmniej wyrażen:

$$\frac{J_{k_j, k_{j'}}^2}{J_{k_j, k_j} J_{k_{j'}, k_{j'}}}, \quad (j, j' = 1, 2, \dots, p; j' \neq j)$$

miało wartość większą od δ . Wniosek ten można jeszcze wyrazić w ten sposób: pomiędzy $\frac{p(p-1)}{2}$ stosunkami, które wyprowadzają się z wyrażenia:

$$\frac{J_{m, n}^2}{J_{m, m} J_{n, n}},$$

przez nadanie liczbom m i n wszelkich wartości nierównych, które nadawać im można, wybierając pomiędzy p liczbami całkowitymi wszystkie większe od pewnej liczby całkowitej N dostatecznie wielkiej — istnieje przynajmniej jeden stosunek większy od δ . Okażemy teraz, że gdy równaniu (51) staje się zadość, ciąg:

$$(67) \quad J_{-1, -1}, \quad \beta^2 J_{0, 0}, \quad \beta^4 J_{1, 1}, \quad \beta^6 J_{2, 2} \dots$$

który, jak to pokazuje nierówność (48) jest malejący i zbieżny, ma jako granicę liczbę dodatnią różną od zera.

Równania (35) dają nam:

$$\Delta \sum_{j=0}^{2t-1} u_{m+j} \zeta^j + (\xi + \zeta) \sum_{j=0}^{2t-1} u_{m+j} \zeta^j + u_{m-1} - u_{m+2t-1} \zeta^{2t} = 0;$$

uczyńmy tu $\zeta = -\beta i$ i dla uwidocznienia części rzeczywistej i urojonej połączmy:

$$\sum_{j=0}^{2t-1} u_{m+j} (-i\beta)^j = A_{m,t} + i B_{m,t},$$

będziemy mieli:

$$(68) \quad \begin{cases} \Delta A_{m,t} + \alpha A_{m,t} + P_{m-1} - (-\beta^2)^t P_{m+2t-1} = 0, \\ \Delta B_{m,t} + \alpha B_{m,t} + Q_{m-1} - (-\beta^2)^t Q_{m+2t-1} = 0. \end{cases}$$

Z drugiej strony na podstawie równań (43) jest:

$$\frac{dA_{m,t}}{dN} = h A_{m,t}, \quad \frac{dB_{m,t}}{dN} = h B_{m,t},$$

będzie przeto:

$$\int_{(D)} (P_k \Delta A_{m,t} - A_{m,t} \Delta P_k) d\tau = \int_{(D)} (Q_k \Delta B_{m,t} - B_{m,t} \Delta Q_k) d\tau = 0,$$

skąd przy pomocy równań (42) i (68) wypływa:

$$\begin{aligned} \int_{(D)} P_{m-1} P_k d\tau - (-\beta^2)^t \int_{(D)} P_{m+2t-1} P_k d\tau &= \int_{(D)} A_{m,t} (P_{k-1} - \beta Q_k) d\tau, \\ \int_{(D)} Q_{m-1} Q_k d\tau - (-\beta^2)^t \int_{(D)} Q_{m+2t-1} Q_k d\tau &= \int_{(D)} B_{m,t} (Q_{k-1} + \beta P_k) d\tau, \end{aligned}$$

Dodając do siebie te równania stronami i zastępując m przez $m+1$, otrzymujemy:

$$(69) \quad J_{m,k} - (-\beta^2)^t J_{m+2t,k} = \int_{(D)} \{ A_{m+1,t} (P_{k-1} - \beta Q_k) + B_{m+1,t} (Q_{k-1} + \beta P_k) \} d\tau.$$

Połączmy:

$$M_{m,t} = \int_{(D)} (A_{m+1,t}^2 + B_{m+1,t}^2) d\tau$$

i przypomnijmy sobie, że według oznaczeń wyżej przyjętych jest:

$$J'_{k-1, k-1} = \int_{(D)} \{ (P_{k-1} - \beta Q_k)^2 + (Q_{k-1} + \beta P_k)^2 \} d\tau;$$

stosując twierdzenie, wyrażone przez nierówności (53) rozdziału III-go, znajdziemy:

$$\left\{ \int_{(D)} A_{m+1,t} (P_{k-1} - \beta Q_k) + B_{m+1,t} (Q_{k-1} + \beta P_k) d\tau \right\}^2 < M_{m,t} J'_{k-1, k-1}$$

a także:

$$J_{m+2t, k}^2 < J_{m+2t, m+2t} J_{k, k}.$$

Przy pomocy tych nierówności wyprowadzamy z równania (69):

$$|J_{m, k}| < \beta^{2t} \sqrt{J_{k, k} J_{m+2t, m+2t}} + \sqrt{M_{m, t} J'_{k-1, k-1}},$$

skąd a fortiori:

$$J_{m, k}^2 < 2\beta^{4t} J_{k, k} J_{m+2t, m+2t} + 2M_{m, t} J'_{k-1, k-1},$$

co daje:

$$\frac{J_{m, k}^2}{J_{m, m} J_{k, k}} < 2 \frac{\beta^{4t} J_{m+2t, m+2t}}{J_{m, m}} + 2 \frac{M_{m, t}}{J_{m, m}} \frac{J'_{k-1, k-1}}{J_{k, k}}.$$

Dajmy, że granica ciągu (67) jest zerem; będzie można wtedy, przy danej wartości na m , nadać ilości t wartość dość wielką, aby było:

$$2 \frac{\beta^{4t} J_{m+2t, m+2t}}{J_{m, m}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

jakkolwiek by małą wartość miało ε . Przy tak dobranej wartości t , wystarczy, jak wskazuje równanie (58), wziąć na k wartość dość wielką, aby było:

$$2 \frac{M_{m, t}}{J_{m, m}} \frac{J'_{k-1, k-1}}{J_{k, k}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

będzie zatem przy k dość wielkiem:

$$\frac{J_{m, k}^2}{J_{m, m} J_{k, k}} < \varepsilon,$$

t. j. że wyrażenie po lewej stronie tej nierówności dąży do granicy zero, gdy k rośnie nieograniczenie. Możliwem by więc było zagadnienie następujące: mając liczbę całkowitą i dodatnią N tak wielką, jak się podoba, znaleźć p liczb całkowitych dodatnich $j_1, j_2, j_3, \dots, j_p$ większych od N i takich, by wartość wyrażenia $\frac{J_{m, n}^2}{J_{m, m} J_{n, n}}$ była mniejszą od liczby, z góry danej i dowolnie małej ε , gdy na m i n bierzemy dwie wartości różne z pomiędzy p liczb wymienionych. Otóż, jak okazaliśmy wyżej, jest to niemożliwem, i dla tego, skoro zachodzi równanie (51), granicą ciągu (67) jest liczba różna od zera.

26. Zauważmy, że skoro oznaczmy przez $\frac{1}{\nu^2}$ granicę ciągu (55), będzie $\nu > |\beta|$. W istocie, gdyby tak nie było, musiałoby być $\nu = |\beta|$,

gdyż wiemy, że jest napewno $\nu \gg |\beta|$. Otóż, gdyby było $\nu = |\beta|$, wtedy rozumując, jak dla ciągu (67), doszlibyśmy do tego, że granica ciągu:

$$J'_{-1, -1}, \quad \beta^2 J_{0, 0}, \quad \beta^4 J'_{1, 1},$$

byłaby liczbą różną od zera, co sprzeciwia się równaniu (58). Ciąg (55) znajduje się z szeregiem $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k \zeta^k$ w takim samym związku, w jakim ciąg (49) z szeregiem (34); wniesiemy stąd z łatwością, że promień zbieżności szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k \zeta^k$ równa się ν . A zatem z przyczyny nierówności $\nu > |\beta|$ promień zbieżności tego szeregu jest większy od $|\beta|$.

Równania (52) dają:

$$\sum_{k=-1}^m (-i\beta)^{k+1} u'_k = f - (-i\beta)^{m+2} u_{m+1},$$

skąd i z uwagi, że promień zbieżności szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k \zeta^k$ jest większy od $|\beta|$ wynika, że wyrażenie $-(-i\beta)^{m+2} u_{m+1}$ dąży do granicy oznaczonej ψ , gdy m rośnie nieograniczenie, oraz że granica ta dana jest przez wzór:

$$\psi = \sum_{k=-1}^{\infty} (-i\beta)^{k+1} u'_k - f.$$

Stąd i przy uwzględnieniu pierwszego z równań (52) wypływa:

$$(7) \quad \psi = i\beta \left\{ u_0 - \sum_{k=0}^{\infty} (-i\beta)^k u'_k \right\}.$$

Oznaczmy na chwilę przez u' sumę szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k \zeta^k$. Przy pomocy rozumowania, podobnego do stosowanego przy szeregu (34) przekonamy się, że funkcja u' czynić będzie zadość w całej rozciągłości obszaru (D) równaniu:

$$\Delta u' + (\xi + \bar{\xi}) u' + f + i\beta u_0 = 0,$$

a na ograniczeniu spełnia warunek:

$$\frac{du'}{dN} = hu',$$

o ile moduł ilości ζ pozostaje co do wartości mniejszym od promienia zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \zeta^k$. Otóż promień tego koła zbieżności jest większy od $|\beta|$, można będzie tedy w dwóch poprzedzających równaniach

przyjąć $\zeta = -i\beta$, a ponieważ dla tej wartości ζ funkcja u' redukuje się dla wyrażenia $\sum_{k=0}^{\infty} (-i\beta)^k u'_k$, będzie przeto:

$$\Delta \sum_{k=0}^{\infty} (-i\beta)^k u'_k + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-i\beta)^k u'_k + f + i\beta u_0 = 0,$$

$$\frac{d}{dN} \sum_{k=0}^{\infty} (-i\beta)^k u'_k = h \sum_{k=0}^{\infty} (-i\beta)^k u'_k.$$

Uwzględniając pierwsze z równań (35), pierwsze z równań (36) i wyrażenie powyższe na ψ , wyprowadzamy stąd równania:

$$\Delta \psi + \alpha \psi = 0; \quad \frac{d\psi}{dN} = h\psi.$$

Funkcja ψ nie jest tożsamościowo zerem, gdyby bowiem niem była, to ciąg (67) miałby granicę równą zeru.

Postaramy się teraz okazać, że funkcja u , określona przez szereg (34) i uważana za funkcję parametru ζ , ma biegun w punkcie $-i\beta$. W tym celu zauważmy, że równania (52) dają:

$$(\zeta + i\beta) \sum_{k=0}^{\infty} u_k \zeta^k = i\beta u_0 + \zeta \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \zeta^k,$$

lub

$$(\zeta + i\beta) u = i\beta u_0 + \zeta \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \zeta^k.$$

Otóż strona druga tego równania jest w sąsiedztwie wartości $-i\beta$ zmiennej ζ funkcją holomorficzną tej zmiennej, ponieważ promień zbieżności szeregu $\sum u'_k \zeta^k$ jest większy od $|\beta|$; stąd i z określenia bieguna wynika tedy, że $-i\beta$ jest biegunem funkcji u ; przyczem, jak to z równania poprzedzającego i z wyrażenia na ψ wynika, odpowiednią pozostałością (rezydum) jest funkcja ψ .

27. Wyniki, otrzymane w tym rozdziale, prowadzą do wniosku: Istnieje liczby rzeczywiste i nieujemne

$$(73) \quad k_1, k_2, k_3, \dots$$

którym odpowiadają funkcje nierówne tożsamościowo zeru:

$$(74) \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$$

czyniące zadość w całej rozciągłości obszaru (D) równaniu:

$$(75) \quad \Delta \varphi_j + k_j \varphi_j = 0, \quad (j=1, 2, 3, \dots)$$

i na ograniczeniu obszaru spełniające warunek:

$$(76) \quad \frac{d\varphi_j}{dN} = h\varphi_j;$$

Jeżeli u jest funkcją, godność czyniącą w całej rozciągłości obszaru (D) równaniu $\Delta u + \xi u + f = 0$, a na ograniczeniu tegoż spełniającą warunek

$$\frac{du}{dN} = hu, \text{ wtedy funkcja } u, \text{ gdy } f \text{ odpowiada założeniu w ust. 19, uważana jako funkcja parametru } \xi, \text{ jest funkcją meromorficzną, mającą bieguny pojedyncze, położone wszystkie na części dodatniej osi zmiennej rzeczywistej i znajdujące się pomiędzy liczbami (73). Wreszcie pozostałości, odpowiadające tym biegunom, znajdują się pomiędzy funkcjami (74).}$$

Zbadajmy bliżej te funkcje. Zauważmy najprzód, że jeżeli φ_j jest funkcją zespoloną postaci $\varphi'_j + i\varphi''_j$, wtedy każda z funkcji φ'_j , φ''_j czyni zadość równaniom:

$$\Delta \varphi'_j + k_j \varphi'_j = 0, \quad \Delta \varphi''_j + k_j \varphi''_j = 0,$$

$$\frac{d\varphi'_j}{dN} = h\varphi'_j, \quad \frac{d\varphi''_j}{dN} = h\varphi''_j;$$

jeżeli więc przyjmiemy, że funkcje (74) są rzeczywiste, nie będzie można wprawdzie powiedzieć, że pozostałości funkcji u znajdują się pomiędzy funkcjami (74), lecz będzie można twierdzić, iż każda z tych pozostałości jest kombinacją liniową jednorodną o współczynnikach stałych pewnej liczby funkcji z pomiędzy funkcji (74).

Przyjmijmy, że funkcje (74) są liniowo niezależne, t. j. że nie istnieje kombinacja liniowa i jednorodna o współczynnikach stałych pewnej liczby tych funkcji, równa tożsamościowo zeru, i przyjmijmy nadto, że liczby (73) są uporządkowane w ten sposób, że $k_j \leq k_{j+1}$ ($j=1, 2, 3, \dots$). Powiadamy, że istnieje liczba całkowita M , dla której:

$$(75) \quad k_p > Mp^{\frac{2}{3}},$$

o ile tylko $p > p_0$, gdzie p_0 jest liczbą całkowitą odpowiednio dobraną.

Stosując twierdzenie Greena do równań (75) i (76), wniesiemy łatwo że z nierówności $k_j \neq k_{j'}$ wynika:

$$(77) \quad \int_{(D)} \varphi_j \varphi_{j'} d\tau = 0.$$

Rozpatrzmy pomiędzy funkcjami (74) następujące:

$$\varphi_j, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_{j+l-1},$$

przyjmijmy, że $k_j = k_{j+1} = \dots = k_{j+l-1}$ i połóżmy:

$$\varphi'_j = \varphi_j,$$

$$\varphi'_{j+1} = \varphi_{j+1} + a_{11} \varphi'_j,$$

$$\varphi'_{j+2} = \varphi_{j+2} + a_{21} \varphi'_{j+1} + a_{22} \varphi'_j,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi'_{j+l-1} = \varphi_{j+l-1} + a_{l-1,1} \varphi'_{j+l-2} + a_{l-1,2} \varphi'_{j+l-3} + \dots + a_{l-1,l-1} \varphi'_j,$$

gdzie a_{lr} są stałymi. Jest widocznym, że będzie można wyznaczyć te stałe w ten sposób, aby było:

$$\int_{(D)} \varphi'_{j+l} \varphi'_{j+l'} d\tau = 0, \quad l \neq l', (l, l' = 0, 1, 2, \dots, l-1).$$

Po takim wyznaczeniu stałych, będzie można funkcje φ_{j+l} wyrazić w postaci kombinacji liniowej i jednorodnej o współczynnikach stałych pewnej liczby funkcji φ'_{j+l} . Wypływa stąd, że można przyjąć, iż funkcje (74), czyniąc zadość poczynionym o nich założeniom, czynić jeszcze będą zadość równaniu (77) nie tylko przy warunku $k_j \neq k_{j'}$, ale i wtedy, ile razy sprawdza się warunek $j \neq j'$. Niechaj $t_1, t_2, \dots, t_p$ będą czynniki stałe; połóżmy:

$$F = \sum_{j=1}^p t_j \varphi_j, \quad \Phi = \sum_{j=1}^p t_j k_j \varphi_j.$$

Na podstawie równań (75) i (76) będzie:

$$\Delta F + \Phi = 0, \quad \frac{dF}{dN} = hF,$$

skąd

$$(78) \quad \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau + h \int_{(D)} F^2 d\tau - \int_{(D)} F \Phi d\tau = 0.$$

Otóż, według przytoczonego wyżej twierdzenia Poincaré'ego, można będzie wyznaczyć czynniki $t_1, t_2, \dots, t_p$ tak, aby było:

$$(79) \quad \frac{\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau}{\int_{(D)} F^2 d\tau} > E q^2,$$

gdzie E jest stałą, zależną tylko od obszaru (D) , q zaś liczbą całkowitą i dodatnią taką, że $m q^3 + 1 \leq p$, gdzie m jest całkowitą, zależną jedynie od powierzchni (S) . Z nierówności (79) i z równania (78) wypływa:

$$\frac{\int_{(D)} F \Phi d\tau}{\int_{(D)} F^2 d\tau} > E q^2;$$

z drugiej strony, na podstawie twierdzenia Sch war z a jest:

$$\left| \int_{(D)} F \Phi d\tau \right|^2 < \int_{(D)} F^2 d\tau \int_{(D)} \Phi^2 d\tau,$$

będzie zatem:

$$\frac{\int_{(D)} \Phi^2 d\tau}{\int_{(D)} F^2 d\tau} > E^2 q^4.$$

Z uwagi, że związek (77) ma miejsce wtedy, gdy spełnia się warunek $j \neq j'$ będzie:

$$\frac{\int_{(D)} \Phi^2 d\tau}{\int_{(D)} F^2 d\tau} \leq k_p^2.$$

a zatem:

$$k_p > E q^2.$$

Jest widocznym, że liczbę całkowitą q można wybrać w ten sposób, aby równocześnie z nierównością $m q^3 + 1 \leq p$ zachodziła nierówność $m(q+1)^2 + 1 > p$. Będzie wtedy:

$$(q+1)^3 > \frac{p-1}{m},$$

skąd:

$$q^3 < \frac{p-1}{m} \left(\frac{q}{q+1} \right)^3 = \frac{p}{m} \frac{p-1}{p} \left(\frac{q}{q+1} \right)^3,$$

co, z uwagi, że $\frac{p-1}{p} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{q}{q+1} \geq \frac{1}{2}$, prowadzi do nierówności:

$$q^3 > \frac{p}{16m},$$

o ile tylko $p \geq m+1$.

Z dwóch ostatnich nierówności widzimy że nierówność (75) będzie miała miejsce wtedy, gdy położymy:

$$M = \frac{E}{(16m)^{\frac{p}{3}}}$$

i gdy p czynić będzie zadość nierówności $p \geq m+1$, co było do okazania.

28. Z tego wszystkiego, o czym była mowa w ustępach poprzedzających, można wyprowadzić następujący wniosek ostateczny.

Z obszarem (D) , ograniczonym powierzchnią (S) , związany jest ciąg nieskończony liczb rzeczywistych $k_1, k_2, k_3, \dots$, taki, że $k_1 \geq 0$, $k_j \leq k_{j+1}$ i począwszy od pewnego skażnika $k_j > Mj^{\frac{2}{3}}$, gdzie M jest stałą dodatnią. Każdej liczbie k_j z powyższego ciągu odpowiada funkcja rzeczywista U_j , czyniąca zadość równaniom:

$$\Delta U_j + k_j U_j = 0.$$

$$\frac{dU_j}{dN} = h U_j,$$

$$\int_{(D)} U_j^2 d\tau = 1,$$

$$\int_{(D)} U_j U_{j'} = 0, \quad j \neq j'.$$

Jeżeli funkcja ψ sprawdza równanie:

$$\Delta \psi + \xi \psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dN} = h\psi,$$

i nie jest tożsamościowo zerem, wtedy parametr ξ powinien mieć wartość równą jednej z liczb ciągu $k_1, k_2, k_3, \dots$, funkcja zaś ψ może być tylko kombinacją liniową, jednorodną o współczynnikach stałych funkcji zawartych w ciągu $U_1, U_2, U_3, \dots$. Wreszcie bieguna $\xi_1, \xi_2, \dots$

funkcyi, określonej przez równania $\Delta u + \xi u + f = 0$, $\frac{du}{dN} = hu$ znajdują się pomiędzy liczbami ciągu $k_1, k_2, \dots$; jeżeli przez ψ_j oznaczymy pozostałość względem bieguna ξ_j , będzie:

$$\Delta \psi_j + \xi_j \psi_j = 0, \quad \frac{d\psi_j}{dN} = h\psi_j,$$

przeto ψ jest kombinacją liniową i jednorodną o stałych współczynnikach funkcji, wziętych z ciągu $U_1, U_2, U_3, \dots$

Wszystko to stosuje się zarówno do przypadku, w którym h ma wartość rzeczywistą, nieujemną i skończoną, jak i do przypadku, w którym $h = \infty$.

Mówimy z Poincaré, że funkcje $U_1, U_2, U_3, \dots$ są funkcjami harmonicznymi, liczb zaś $k_1, k_2, k_3, \dots$ są odpowiedniami liczbami charakterystycznymi.

Spostrzedz łatwo, że część istotna wyników powyższych stosuje się też i do przypadku, w którym h nie jest liczbą rzeczywistą i nieujemną, lecz nie zatrzymujemy się nad tym przedmiotem, ponieważ, zdaje się, że przypadek ten nie ma znaczenia dla fizyki matematycznej.

V. Rozkład funkcji u na elementy pojedyncze. Rozwinięcie funkcji dowolnej na szereg, postępujący według funkcji harmonicznych.

29. Poincaré zauważył w pracy podstawowej, tylokrotnie przez nas cytowanej, że metodą Cauchy'ego można stosować do zagadnienia rozwijania funkcji dowolnej na szereg, postępujący według funkcji harmonicznych. Znakomity geometra sam tej metody nie stosował, ponieważ sposoby całkowania, którymi posługiwał się w celu rozwiązania wypowiedzianego we Wstępie zagadnienia, prowadzące zresztą do rezultatu ścisłego tylko w przypadku $h = \infty$, nie pozwoliły mu wyznaczyć w dostatecznej mierze wszystkich własności, jakie ma funkcja u w przypadku, gdy ξ rośnie nieograniczenie. Metody, przez nas wyżej stosowane, nie nasuwają tych trudności i dlatego możemy tu, przy pomocy metody Cauchy'ego, przez Poincarégo wskazanej, traktować zagadnienie o rozwijaniu funkcji dowolnej na szereg, postępujący według funkcji harmonicznych. Lecz przede wszystkim musimy tu rozwiązać zagadnienie prostsze, dające się traktować metodą analogiczną, a polegającą na rozkładzie funkcji meromorficznej u parametru ξ na elementy pojedyncze. Innymi słowy, zajmiemy się najprzód rozwinięciem funkcji u na szereg, którego każdy wyraz jest funkcją wymierną parametru ξ .

30. Zwróćmy się do nierówności $k_j > Mj^{\frac{2}{3}}$ z ust. 28. Nierówność ta nie pozwala nam twierdzić, że

$$(1) \quad k_{j+1}^{\frac{3}{2}} - k_j^{\frac{3}{2}} > M^{\frac{3}{2}},$$

ale można z niej wniesić, że istnieje z pewnością ciąg nieskończony liczb całkowitych dodatnich rosnących:

$$(2) \quad p_1, p_2, p_3, \dots$$

takich, że nierówność (1) ma miejsce dla $j = p_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$). Stąd łatwo wniesiemy, że:

$$(3) \quad k_{p_\nu+1} - k_{p_\nu} > \frac{M^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}(k_{p_\nu+1} + k_{p_\nu})}, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

Uwzględniając znakowanie ust. 2, oznaczmy przez γ liczbę całkowitą dość małą: aby przy warunku:

$$(4) \quad \frac{m^3}{a^4} \leq \gamma,$$

sprawdzała się nierówność (2) rozdziału III-go i zarazem w przypadku, gdy h nie jest nieskończonym, nierówność (51) tegoż rozdziału. Niechaj (Σ) będzie miejscem geometrycznym punktów ξ wtedy, gdy zachodzi równanie:

$$(5) \quad \frac{m^3}{a^4} = \gamma.$$

Krzywa (Σ) dzieli płaszczyznę zmiennej ξ na dwie dzielnice. Jeżeli punkt ξ znajduje się w jednej z tych dzielnic, spełnia się nierówność (4). Dzielnicę tę oznaczmy przez (R) , dzielnicę drugą przez (R') . Niechaj K_ν i K'_ν będą punkty, położone na osi rzeczywistej w płaszczyźnie zmiennej ξ , których odcięciami są k_{p_ν} i $k_{p_\nu+1}$. Przez środek B_ν odcinka $K_\nu K'_\nu$ poprowadźmy równoległą do osi rzędnych; prosta ta przetnie krzywą (Σ) , określona przez równanie (5) w dwóch punktach symetrycznych względem osi odciętych; jeden z nich, ten mianowicie, którego rzędna jest dodatnia, oznaczmy przez B'_ν , drugi zaś przy B'_ν . Opiszmy w płaszczyźnie parametru ξ , z początku O spólrzędnych jako ze środka. Łuk koła $B'_\nu M_\nu B''_\nu$, spotykający część ujemną osi odciętych w punkcie M_ν . Niechaj $(C)_\nu$ oznacza obwód zamknięty łukiem $B'_\nu M_\nu B''_\nu$ i podtrzymującą go cięciwą $B'_\nu B_\nu B''_\nu$. Wykażemy, że całka krzywoliniowa:

$$(6) \quad \int_{(C)_\nu} \frac{u d\xi}{\xi - \eta},$$

gdzie η jest stałą zespoloną, dąży do granicy zero, gdy skaznik ν rośnie nieograniczenie.

Rozpatrzmy najprzód część:

$$(7) \quad \int_{B'_\nu B_\nu B''_\nu} \frac{u d\xi}{\xi - \eta}$$

całki (6) odpowiadającą łukowi $B'_\nu \tilde{M} B''_\nu$. W tej całce parametr ξ przyjmuje tylko takie wartości, dla których sprawdza się nierówność (7) rozdziału poprzedzającego. Wnosimy stąd bezpośrednio, że granica rozważanej w tej chwili całki jest zerem, gdy ν rośnie nieograniczenie. Pozostaje tedy dowieść, że to samo ma miejsce dla całki prostoliniowej:

$$(8) \quad \int_{B'_\nu B_\nu B''_\nu} \frac{u d\xi}{\xi - \eta},$$

a wystarczy do tego stwierdzenie, że całka prostoliniowa:

$$(9) \quad \int_{B'_\nu B''_\nu} \frac{u d\xi}{\xi - \eta} = J_\nu,$$

dąży do zera, gdy ν rośnie nieograniczenie.

31. Półżmy:

$$(10) \quad \alpha_\nu = \overline{OB_\nu}, \quad \beta_\nu = \overline{B_\nu B'_\nu},$$

$$\xi = \alpha_\nu + i\beta_\nu - i\lambda,$$

gdzie λ jest zmienną rzeczywistą; będzie:

$$(11) \quad J_\nu = i \int_0^{\beta_\nu} \frac{u d\lambda}{\alpha_\nu + i(\beta_\nu - \lambda) - \eta}.$$

Utwórzmy szereg (34) rozdziału poprzedzającego, biorąc na ξ wyrażenie $\alpha_\nu + i\beta_\nu$ i kładąc $\zeta = -i\lambda$. Nierówności, które wykazały, że koło zbieżności tego szeregu (34) zlewa się z kołem zbieżności szeregu (50) tegoż rozdziału, prowadzą jeszcze do wniosku, że

$$|u| < \sqrt{l} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sqrt{J_{k-1, k-1}},$$

skąd, na podstawie okazanych przez nas własności funkcji Greena wypływa:

$$(12) \quad |u| < \sqrt{B} \cdot \frac{m}{a^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sqrt{J_{k-1, k-1}}.$$

Niechaj l_v oznacza promień zbieżności szeregu (34) gdy $\xi = a_v + i\beta_v$; niechaj a_v i m_v oznaczają to, czym stają się a i m dla tej wartości ξ . Wynika bezpośrednio ze zbadanych w poprzedzającym rozdziale własności całek $J_{k-1, k-1}$ że:

$$J_{k-1, k-1} \leq l_v^{2k} J_{-1, -1},$$

a zatem nierówność (12) daje:

$$(13) \quad |u| < \sqrt{B} \cdot \frac{m_v}{a_v^{\frac{3}{2}}} \sqrt{J_{-1, -1}} \cdot \frac{l_v}{l_v - \lambda}.$$

Według rozdziału poprzedzającego, długość l_v równa się długości wspólnej odcinków B', K_v i B', K'_v lub długości większej od tych długości, stosownie do tego, czy jeden przynajmniej z punktów K_v, K'_v będzie biegunem funkcji u lub żaden. Stąd i z nierówności (3) wypływa, że istnieje będzie stała dodatnia E (łatwa do obliczenia) taka, że

$$(14) \quad l_v^2 > \beta_v^2 + \frac{E^2}{a_v}.$$

Położmy:

$$(15) \quad \delta_v^2 = \beta_v^2 + \frac{E^2}{a_v},$$

wtedy nierówność (13) daje:

$$(16) \quad |u| < \sqrt{B J_{-1, -1}} \cdot \frac{m_v}{a_v^{\frac{3}{2}}} \frac{\delta_v}{\delta_v - \lambda}.$$

Niechaj a_v będzie odległością punktu, odpowiadającego wartości η od równoległej, poprowadzonej przez punkt B , do osi rzędnych w płaszczyźnie parametru ξ . Będzie:

$$\left| \frac{1}{a_v + i(\beta_v - \lambda) - \eta} \right| < \frac{1}{a_v};$$

równanie (11), przy uwzględnieniu nierówności (16), da nam przeto:

$$|J_v| < \sqrt{B J_{-1, -1}} \frac{m_v \delta_v}{a_v^{\frac{3}{2}} d_v} \int_0^{\beta_v} \frac{d\lambda}{\delta_v - \lambda},$$

skąd:

$$|J_v| < \sqrt{B J_{-1, -1}} \frac{m_v \delta_v}{a_v^{\frac{3}{2}} d_v} \log \frac{\delta_v}{\delta_v - \beta_v}.$$

Stąd, opierając się na równaniu (15) i uwzględniając związek $\frac{m_v^3}{a_v^4} = \gamma$, wynikający stąd, że punkt B' , jest położony na krzywej, określonej przez równanie (5), wniesiemy bezpośrednio, że

$$\lim (J_v)_{v \rightarrow \infty} = 0.$$

Tym sposobem dowodzenie, że całka (6) dąży do zera, gdy v rośnie nieograniczenie, jest całkowicie ukończonym.

32. Niechaj

$$(17) \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

przedstawia ciąg biegunów funkcji u , uporządkowanych według ich wielkości rosnących;

$$(18) \quad \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$$

ciąg odpowiadających tym biegunom pozostałości, Niechaj ξ_{q_v} oznacza największą z liczb ciągu (17), znajdującą się wewnątrz obwodu (C_v) . Zastosujmy do całki (6) znane twierdzenie Cauchy'ego, według którego całka ta równa się iloczynowi $2\pi i$ przez sumę pozostałości, odpowiadających biegunom

wewnątrz (C_v) funkcji $\frac{u}{\xi - \eta}$, uważanej za funkcję parametru ξ . Jeżeli

położymy na chwilę $u = F(\xi)$, to pozostałościami funkcji $\frac{u}{\xi - \eta}$ będą:

$$F(\eta), \quad \frac{\psi_j}{\xi_j - \eta}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

W założeniu, że skaźnik v jest dość wielki, by punkt, odpowiadający wartości η , znajdował się wewnątrz (C_v) i kładąc $q_0 = 0$, otrzymujemy na zasadzie twierdzenia Cauchy'ego:

$$2\pi i F(\eta) + 2\pi i \sum_{i=1}^v \sum_{j=q_{i-1}+1}^{q_i} \frac{\psi_j}{\xi_j - \eta} = \int_{(C_v)} \frac{u d\xi}{\xi - \eta}.$$

Wiemy już, że całka po stronie drugiej dąży do zera, gdy ν rośnie nieograniczenie; będzie tedy:

$$(19) \quad F(\eta) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=q_{t-1}+1}^{q_t} \frac{\psi_j}{\eta - \xi_j},$$

a pisząc ξ zamiast η , otrzymujemy, ze względu na określenie funkcji $F(\eta)$:

$$(20) \quad u = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=q_{t-1}+1}^{q_t} \frac{\psi_j}{\xi - \xi_j}.$$

To równanie przedstawia funkcję u jako sumę szeregu zbieżnego, postępującego według funkcji wymiernych zmiennej x ; jest to właśnie rezultat, który pragnęliśmy otrzymać.

Okażemy, że skoro dla obszaru (D) i dla wartości uważanej h znamy ciąg funkcji harmonicznych $U_1, U_2, \dots$, wtedy łatwo można wyznaczyć funkcje $\psi_1, \psi_2, \dots$, znajdujące się po drugiej stronie równania (20). W samej rzeczy, widzieliśmy w rozdziale poprzedzającym, że każda z funkcji $\psi_1, \psi_2, \dots$ jest kombinacją liniową i jednorodną skończonej liczby funkcji harmonicznych. Jeżeli więc oznaczmy przez $A_1, A_2, A_3, \dots$ pewne stałe, będzie:

$$(21) \quad u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=p_{\nu-1}+1}^{p_{\nu}} \frac{A_j U}{\xi - k_j},$$

przy założeniu, że $p_0 = 0$. Pomnożmy obie strony tego wzoru przez U_j i przez element objętości $d\tau$, następnie całkujemy po całej rozciągłości obszaru (D) . Uwzględniając dwa drugie równania z czterech równań na początku ust. 28 i zważając, że szereg (21) jest jednostajnie zbieżny, będziemy mieli:

$$A_j = (\xi - k_j) \int_{(D)} u U_j d\tau, \quad (b)$$

Z drugiej strony, opierając się na twierdzeniu Greena i na podstawie równań, którym czynią zadość funkcje u i U_j , mamy:

$$(\xi - k_j) \int_{(D)} u U_j d\tau + \int_{(D)} f U_j d\tau = 0,$$

a stąd:

$$(22) \quad A_j = - \int_{(D)} f U_j d\tau.$$

Znając stałe $A_1, A_2, \dots$, dość będzie tylko zebrać wyrazy strony drugiej równania (21), odnoszące się do funkcji harmonicznych, których liczby charakterystyczne są równe, aby otrzymać wzór (20), w którym nie będzie już żadnego elementu nieznanego.

33. Dajmy, że funkcja $f(x, y, z)$, zachodząca w równaniu $\Delta u + \xi u + f(x, y, z) = 0$, ma pochodne drugie ciągłe w całej rozciągłości obszaru (D) i spełnia nadto warunek;

$$(23) \quad \frac{df}{dN} = hf;$$

okażemy, że w tym przypadku funkcja ta daje się rozwinąć na szereg zbieżny, którego każdy wyraz będzie kombinacją liniową i jednorodną o współczynnikach stałych skończonej liczby funkcji harmonicznych. Rozpatrzmy w tym celu całkę krzywoliniową:

$$(24) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_r)} u d\xi,$$

wziętą po obwodzie (C_r) , określonym w ust. 30. Powiadamy, że granicą tej całki, gdy ν rośnie nieograniczenie, jest $-f(x, y, z)$. Rozpatrzmy najprzód całkę krzywoliniową:

$$(25) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{B', \tilde{M}, B''} u d\xi,$$

t. j. część całki (24), odnoszącą się do łuku kołowego $B', \tilde{M}, B''$. Mamy:

$$u = \int_{(D)} f G d\tau,$$

gdzie G jest funkcją Greena. Stosując twierdzenie Greena i uwzględniając równanie (23) będziemy mieli:

$$u = - \frac{f(x, y, z)}{\xi} - \frac{1}{\xi} \int_{(D)} G \Delta f d\tau,$$

skąd:

$$|u\xi + f|^2 < I \int_{(D)} |\Delta f|^2 d\tau,$$

co, na podstawie nierówności (46) rozdziału III-go, prowadzi do nierówności:

$$|u\xi + f|^2 < B \frac{m^2}{a^3} \int_{(b)} |df|^2 d\tau.$$

Otóż, gdy ν rośnie nieograniczenie i gdy punkt, odpowiadający wartości ξ , nie wychodzi z dzielnicy (R) , którą określa nierówność (4), wtedy wyrażenie $\frac{m^2}{a^3}$ dąży równomiernie do zera, gdy moduł ξ rośnie nieograniczenie.

Wnieśmy stąd z łatwością, że granicą całki (25), gdy ν rośnie nieograniczenie, jest $-f(x, y, z)$. Pozostaje więc tylko okazać, że gdy ν rośnie nieograniczenie, całka

$$(26) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{B''_v B'_v} u d\xi$$

dąży do zera. Połóżmy:

$$(27) \quad u' = \xi u + f;$$

z założeń, poczynionych o funkcji, f wynika, że:

$$(28) \quad \Delta u + \xi u' - \Delta f = 0, \quad \frac{du'}{dN} = hu',$$

a rozumowanie, które stosowaliśmy w celu okazania, że granicą całki (8) dla ν rosnącego nieograniczenie jest zero, pozwoli nam także przekonać się że i granica całki

$$(29) \quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{B''_v B'_v} \frac{u' d\xi}{\xi}$$

jest zero, gdy ν rośnie nieograniczenie. Stąd wnosimy na zasadzie równania (27), że całka (26) dąży do zera, gdy ν rośnie nieograniczenie. Dowiedliśmy zatem, że gdy ν nieograniczenie wzrasta, całka (24) dąży do granicy równej $-f(x, y, z)$.

34. Utrzymajmy znakowania, których używaliśmy przy wywodzie wzoru (20). Twierdzenie Cauchy'ego daje:

$$\sum_{t=1}^{\nu} \sum_{j=q_{t-1}+1}^{q_t} \psi_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_\nu)} u d\xi,$$

na zasadzie udowodnionego przez nas twierdzenia będzie tedy:

$$f(x, y, z) = - \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=q_{t-1}+1}^{q_t} \psi_j.$$

Uwzględniając rezultaty, otrzymane na końcu ust. 32, znajdziemy:

$$f(x, y, z) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=p_{\nu-1}+1}^{p_{\nu}} A_j U_j,$$

gdzie A_j są stałe, dane przez wzór (22). Możliwość rozwinięcia funkcji $f(x, y, z)$ na szereg, postępujący według funkcji harmonicznych, jest więc udowodniona.

VI. Wykończenie teorii równania $\Delta v + \xi v = 0$.

35. Możemy teraz rozwiązać zupełnie zagadnienia, odnoszące się do równania:

$$(1) \quad \Delta v + \xi v = 0,$$

a rozwiązane przez nas w rozdziale III-m jedynie dla wartości parametru ξ , czyniących zadość pewnym nierównościom.

Mamy wyznaczyć funkcję v , całkę równania (1), mającą dane wartości tej funkcji na ograniczeniu (S) obszaru (D) . Rozwiążmy najprzód zagadnienie dla wartości ξ_0 parametru ξ takiej, że do niej stosuje się metoda, podana w rozdziale III; niechaj v_0 będzie tem rozwiązaniem. Połóżmy:

$$(2) \quad v = v_0 + v' (\xi - \xi_0);$$

będzie:

$$(3) \quad \Delta v' + \xi v' + v_0 = 0,$$

z warunkiem na ograniczeniu:

$$(4) \quad (v')_t = 0.$$

Metoda, wyłożona w rozdziale IV, pozwoli nam obliczyć funkcję v' , równanie zaś (2) da nam samą funkcję v . Funkcja v będzie oczywiście, jako funkcja parametru ξ , funkcją meromorficzną, mającą bieguny pojedyncze,

wszystkie położone na części dodatniej osi rzeczywistej w płaszczyźnie zmiennej ξ . Żaden z tych biegunów nie może zlewać się z początkiem współrzędnych. W samej rzeczy, gdyby początek współrzędnych był biegunem funkcji v , wtedy, jak to wykazują rezultaty, wyprowadzone na końcu rozdziału IV-go, istniałaby funkcja ψ nie równa zero tożsamościowo, znikająca na powierzchni (S) i czyniąca zadość w całej rozciągłości obszaru (D) równaniu $\Delta\psi = 0$. Otóż wiemy, że jest to niemożliwe; wynika stąd, że dla $\xi=0$ funkcja v redukuje się do funkcji skończonej i oznaczonej, która, jak to widać z równania (1), w całej rozciągłości obszaru (D) czyni zadość równaniu $\Delta v = 0$, co stwierdza możliwość zagadnienia Dirichleta.

36. Niechaj będzie teraz do wyznaczenia całka v równania (1) przy warunku granicznym:

$$(5) \quad \frac{dv}{dN} = hv + \bar{\omega},$$

gdzie $\bar{\omega}$ jest funkcją ciągłą daną położenia punktu zmiennego na powierzchni (S) . Postępując sposobem podobnym, jak w ust. poprzedzającym, oznaczmy przez v_0 rozwiązanie zagadnienia, odpowiadające takiej wartości ξ_0 parametru ξ , do której można stosować metodę rozdziału III-go; położmy:

$$(6) \quad v = v_0 + v'(\xi - \xi_0),$$

wtedy funkcja v' w całej rozciągłości obszaru (D) czynić będzie zadość równaniu:

$$\Delta v' + \xi v' + v_0 = 0,$$

a na ograniczeniu tegoż spełniać warunek:

$$\frac{dv'}{dN} = hv';$$

będzie tedy można wyznaczyć tę funkcję za pomocą metody, wyłożonej w rozdziale IV, a wtedy równanie (6) da nam rozwiązanie zupełne zagadnienia.

Jest widocznem, że funkcja v , uważana za funkcję parametru ξ , jest funkcją meromorficzną, mającą tylko bieguny pojedyncze, położone wszystkie na części dodatniej osi rzeczywistej. Łatwo widzieć, że jeżeli stała h nie jest zerem, to początek współrzędnych nie może być biegunem funkcji v . W samej rzeczy, gdyby początek był biegunem funkcji v , funkcja ψ zaś od-

powiadająca mu pozostałością, wtedy funkcja ψ , nie będąc tożsamościowo zerem, czyniłaby w całej rozciągłości obszaru (D) zadość równaniu $\Delta\psi = 0$, a na ograniczeniu spełniałaby warunek $\frac{d\psi}{dN} = h\psi$, co, jak wiemy, nie jest możliwem, jeżeli h jest liczbą dodatnią, nierówną zero. Rozpatrzmy przypadek szczególny $h=0$, w którym dwa poprzednie równania mają rozwiązanie $\psi = \text{const}$ i nie mają żadnego, w którym by ψ nie sprowadzało się do stałej. Otóż w tym przypadku funkcja v może mieć biegun w początku współrzędnych, a odpowiadająca mu pozostałość, gdy ten biegun istnieje, będzie pewną stałą R . Łatwo tę stałą obliczyć. Położmy $z = \frac{R}{\xi} + v_1$, tedy v_1 będzie w bliskości początku współrzędnych funkcją holomorficzną parametru ξ ; nadto spełniać będzie na ograniczeniu obszaru (D) warunek $\frac{dv_1}{dN} = \bar{\omega}$, a w całym obszarze (D) czynić będzie zadość równaniu:

$$\Delta v_1 + \xi v_1 + R = 0.$$

Ponieważ v_1 jest funkcją holomorficzną zmiennej ξ w bliskości początku współrzędnych, możemy przeto uczynić $\xi=0$ w równaniu poprzedzającym, które redukuje się wtedy do postaci:

$$\Delta v_1 + R = 0.$$

Pomnożmy to równanie przez element objętości $d\tau$ i całkujemy po całym obszarze (D) ; stosując twierdzenie Greena, znajdziemy:

$$-\int_{(S)} \frac{dv_1}{dN} ds + R \int_{(D)} d\tau = 0,$$

a opierając się na równaniu $\frac{dv_1}{dN} = \bar{\omega}$, będziemy mieli:

$$R \int_{(D)} d\tau = \int_{(S)} \bar{\omega} ds.$$

Z tego równania znajdziemy szukaną pozostałość R , i widać, że $R=0$, gdy $\int_{(S)} \bar{\omega} ds = 0$. Innymi słowy, początek współrzędnych będzie punktem

tem zwyczajnym funkcji v parametru ξ , jeżeli warunkowi $\int_{(S)} \bar{\omega} ds = 0$ staje się zadość.

To prowadzi nas do następującego twierdzenia, odnoszącego się do równania Laplace'a: aby można było znaleźć funkcję v , czyniąc zadość w całej rozciągłości obszaru (D) równaniu $\Delta v = 0$ i spełniające na ograniczeniu tegoż warunek $\frac{dv}{dN} = \bar{\omega}$, jest nie tylko koniecznym ale i dostatecznym, aby stawało się zadość warunkowi $\int_{(S)} \bar{\omega} ds = 0$.

PRZYCZYNEK DO TEORII FUNKCYJ SYMETRYCZNYCH ¹⁾.

PODAJE

F. MERTENS.

Funkcja symetryczna całkowita n ilości nieoznaczonych $x_1, x_2, \dots, x_n$, nie znikająca tożsamościowo, składa się z wyrazów postaci $Cx_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\gamma$, gdzie C oznacza współczynnik niezależny od $x_1, x_2, \dots, x_n$, i obok każdego wyrazu musi zawierać wszystkie te, które z niego powstają przez przemianę nieoznaczonych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Jeżeli więc

$$S_{\alpha\beta\dots\gamma} = \sum x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\gamma$$

oznacza sumę wszystkich różnych wyrażen, powstających z $x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\gamma$ przez wszelkie możliwe przemiany nieoznaczonych $x_1, x_2, \dots, x_n$, to każda funkcja symetryczna nieoznaczonych $x_1, x_2, \dots, x_n$ musi być agregatem wyrażen $CS_{\alpha\beta\dots\gamma}$.

Wyrażenie $S_{\alpha\beta\dots\gamma}$ niechaj będzie rzędu m -tego, jeżeli m jest największym z wykładników $\alpha, \beta, \dots, \gamma$. Wyrażenia $S_{\alpha\beta\dots\gamma}$ rzędu pierwszego są funkcje symetryczne elementarne:

$$\sigma_1 = \sum x_1, \quad \sigma_2 = \sum x_1 x_2, \dots, \quad \sigma_n = \sum x_1 x_2 \dots x_n.$$

Niechaj $S_{\alpha\beta\dots\gamma}$ będzie rzędu m -tego i $m > 1$. Jeżeli h jest liczbą wykładników z pomiędzy $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ różnych od zera, to przez zmniejszenie tychże o jedno otrzymujemy szereg liczb nieujemnych $\alpha', \beta', \dots, \gamma'$, pomiędzy którymi znajduje się $m-1$, tak że $S_{\alpha'\beta'\dots\gamma'}$ jest rzędu $m-1$.

¹⁾ Sitzungsber. der k. Akademie der Wiss. in Wien, Math. natrw. Classe, XCIII, maj 1899.