

O KOMPLEKSACH, W SZCZEGÓLNOŚCI O KOMPLEKSACH PROSTYCH I KUL z zastosowaniem do teorii równań różniczkowych częstkowych.

NAPISAŁ SOPHUS LIE W CHRYSYANII.
(Math. An. t. V, 1872, str. 145)

przełożył z niemieckiego i dopiskami opatrzył
T. RUDZKI.

Podając w przekładzie polskim pierwszą część rozprawy Sophusa Liego zawierającą wykład t. zw. „geometrii kul”, uważałem za właściwe opuścić ten ustęp przedmowy, w którym autor podaje treść drugiej części (3-go i 4-go rozdziału) swej pracy. By ułatwić zrozumienie tych twierdzeń, których uzasadnienie Lie opuścił, starałem się podać w odnośnikach źródła, w których czytelnik może znaleźć wyczerpujące dowody. Prócz tego pozwoliłem sobie w kilku miejscach uzupełnić tekst rozprawy własnymi uwagami.

T. R.

I

Szybki rozwój geometrii w naszym stuleciu pozostaje, jak wiadomo, w ścisłym związku z rozważaniami filozoficznymi o istocie geometrii Descartesa, które w postaci najogólniejszej wyłożył Plücker w jednej z pierwszych prac swoich. Dla tych, którzy wniknęli w ducha dzieła Plückera, pomysł, polegający na tem, że każdą krzywą, zależną od trzech parametrów, można wprowadzić jako element przestrzenny, nie przedstawia nic nowego; jeżeli więc dotychczas, o ile mi wiadomo, nikt szerzej nie rozwinął tego pomysłu, to, sądzę, że przyczyny należy szukać w tem, że nikt praktycznej wartości w pomysle owym nie widział. Do studyowania tej teorii

doprowadziło mnie odkrycie godnego uwagi przekształcenia, wykazującego zależność pomiędzy liniami krzywiznowymi i krzywymi asymptotycznymi. W niniejszej pracy zamierzam właśnie przedstawić rezultaty, na tej drodze osiągnięte.

W pierwszym rozdziale rozważam kompleksy krzywych, t. j. rozmaitości, utworzone przez trójkrotnie nieskończoną mnogość krzywych. Wszystkie powierzchnie, utworzone przez jednokrotnie nieskończoną mnogość krzywych danego kompleksu, czynią zadość równaniu różniczkowemu cząstkowemu rzędu 2-go, dopuszczającemu jako całkę osobliwą—równanie różniczkowe rzędu 1-go. W ten sposób otrzymuję nową interpretację geometryczną równań cząstkowych rzędu 2-go, godną uwagi zwłaszcza wtedy, jeżeli w szczególności dany kompleks jest Plückerowskim kompleksem prostych.

Następnie wykazuję, że podobnie jak równanie ogólne

$$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

(rozważane jako „aequatio directrix”) wyznacza wzajemność w przestrzeni, tak również i układ równań:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

określa pewną zależność między elementami powierzchniowymi (Flächenelemente) dwóch układów przestrzennych.

Oba te rodzaje przekształceń, łącznie ze wszystkimi przekształceniami punktowymi, są jedynymi przekształceniami w przestrzeni, dla których styczność jest własnością niezmienniczą; wynika stąd, że wszystkie takie przekształcenia polegają albo na zmianie elementu przestrzennego, albo też na wprowadzeniu nowego układu współrzędnych. W końcu rozważam zastosowanie powyższych przekształceń do teorii równań różniczkowych cząstkowych.

W rozdziale drugim przyjmuję, że równania $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ są liniowe względem obu układów zmiennych, w szczególności zaś badam układ:

$$-Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z$$

i określone przezeń odwzorowanie przestrzenne. Proste układu (x, y, z) przekształcają się przy tem odwzorowaniu na kule drugiego układu (X, Y, Z) , czyli, innymi słowami, wszystkie elementy powierzchniowe, zawierające dwa sąsiednie elementy danej prostej, przechodzą na elementy pewnej kuli; proste przecinające się odtwarzają się przytem jako kule styczne wzajemnie. Na tem opieram ściśłą i—według mego pojmowania—rzeczy—zasadniczą zależność między geometrią liniową i geometrią kulistą i—co za tem idzie—między wieloma teoriami rzutowymi i metrycznymi; zależność ta jest

z tego względu godną uwagi, że w skutek niej krzywe asymptotyczne w pierwszej geometryi grają tę samą rolę, co linie krzywiznowe w drugiej.

Teoria ta daje możność wyznaczenia krzywych asymptotycznych dla wielu powierzchni, w szczególności zaś dla powierzchni Kummera 4-go rzędu z 16-tu punktami osobiłowymi. Wreszcie dowodzą, że najogólniejsze przekształcenie układu (X, Y, Z) , dla którego z jednej strony styczność jest własnością niezmienniczą, z drugiej zaś linie krzywiznowe są krzywymi spółzmiennymi, odpowiada za pomocą mego odwzorowania ogólnemu liniowemu lub też dualistycznemu przekształceniu układu (x, y, z) . Wszystkie te przekształcenia mogą być złożone z przekształceń przez promienie odwrotne oraz z przekształceń równoległych (rozsunięć, dylatacyj).

W toku powyższych badań znosiłem się często z F. Kleinem, któremu zawdzięcam wiele opracowanych tu pomysłów, więcej nawet, niż mógłbym to zaznaczyć przez cytaty.

Zauważę jeszcze, że teorie poniżej przedstawione posiadają niektóre punkty styczne z poprzedniami memi pracami o odwzorowaniu punktów urojonych¹⁾; jeżeli w obecnem opracowaniu nie uwydatniam tego związku, to czynię to po pierwsze dla tego, że go poniekąd uważam za przypadkowy, powtórę zaś dla tego, że nie chciałbym odstępować od utartego języka matematycznego²⁾.

ROZDZIAŁ I.

O nowej wzajemności w przestrzeni.

W obu pierwszych paragrafach tego rozdziału podaję krótki rys kilku zużanych teoryj, a to, by ułatwić zrozumienie paragrafu 4-go; ten ostatni zaś zawiera wszystkie wiadomości, potrzebne do zrozumienia rozdziału 2-go.

¹⁾ Główne przewodnie myśli i rezultaty niniejszej rozprawy można znaleźć w krótkiej nocie (październik 1870) oraz w dwóch obszerniejszych pracach, umieszczonych w Rozprawach Akademii w Chrystyanii. Związek pomiędzy liniami asymptotycznymi i liniami krzywiznowymi i w ogóle między geometryami prostej i kul zakomunikowałem teżże Akademii w lipcu 1870. Patrz również Comptes Rendus, październik 1870, oraz notę, wydaną przezemnie wspólnie z p. Kleinem w „Monatsberichte der Berliner Akademie 15 Decem-ber 1870.

Przyp. Autora.

²⁾ Lie. Repräsentation des Imaginärer. Berichte der Akademie zu Christiania, Februar und August, 1869.

Przyp. tłum.

§ 1.

Wzajemność pomiędzy dwoma układami płaskimi lub też przestrzennymi.

1. Jak wiadomo, teoria dwoistości Ponceleta-Georgonne'a na płaszczyźnie może być wyprowadzona z równania:

$$(1) \quad X(a_1x + b_1y + c_1) + Y(a_2x + b_2y + c_2) + (a_3x + b_3y + c_3) = 0,$$

lub też, co na jedno wychodzi, z równania:

$$x(a_1X + a_2Y + a_3) + y(b_1X + b_2Y + b_3) + (c_1X + c_2Y + c_3) = 0$$

w założeniu, że x, y i X, Y oznaczają spółrzędne Descartes'a punktów dwóch płaszczyzn.

Jeżeli bowiem nazwiemy sprzężonemi dwa punkty, których spółrzędne (x, y) i (X, Y) czynią zadość równaniu (1), to można powiedzieć, że punkty drugiej płaszczyzny, sprzężone z punktem danym, tworzą linię prostą; tę ostatnią zaś uważamy jako odpowiadającą punktowi danemu. Wszystkie punkty jednej i tej samej prostej mają na drugiej płaszczyźnie wspólnę punkt sprzężony i dla tego wszystkie proste, odpowiadające tym pierwszym, przechodzą przez ten punkt.

Można zatem za pomocą równania (1) tak odnieść obie płaszczyzny jedną do drugiej, aby proste każdej z nich otwierały się jako punkty drugiej. Przytem punktom prostej λ odpowiadają proste, przechodzące przez punkt, będący obrazem tej prostej. Ta zależność wzajemna jest główną zasadą powyższej dwoistości.

Wyobraźmy sobie teraz w pierwszej płaszczyźnie pewien wielokąt, w drugiej zaś wielokąt, którego boki otwarzają się jako wierzchołki poprzedniego; wtedy z poprzedzającego wynika, że wierzchołkom drugiego wielokąta będą odpowiadały boki pierwszego, czyli że obie figury będą w związku wzajemności. Przechodząc do granicy, można z powyższych wielokątów otrzymać dwie krzywe, które, według utartego określenia, są wzajemnemi w odniesieniu do równania (1). Oczywiście, styczne jednej z tych krzywych otwarzają się będą jako punkty drugiej.

2. Plücker¹⁾, opierając się na interpretacji geometrycznej ogólnego równania:

$$(2) \quad F(x, y, X, Y) = 0,$$

¹⁾ Analytisch geometrische Entwicklungen. Tom I, Rozdział 2-gi.

wyprowadził następujące uogólnienie powyżej zaznaczonej teorii. Punkty (X, Y) , sprzężone z danym punktem (x, y) tworzą pewną krzywą (C) , przedstawioną przez równanie (2) w przypuszczeniu, że (x, y) będziemy uważali jako parametry, (X, Y) jako współrzędne bieżące punktu; naodwrot punkty (x, y) , sprzężone względem danego punktu, tworzą krzywą (c) , przedstawioną również przez równanie (2). Obie płaszczyzny można zatem tak odnieść jedną do drugiej, że punktom jednej z nich odpowiadają w drugiej krzywe pewnej sieci krzywych $(C$ lub $c)$. Podobnie, jak przedtem, łatwo jest okazać, że punktom danej krzywej C odpowiadają te mianowicie krzywe (c) , które przechodzą przez punkty, będące obrazami tej krzywej.

Wielokątowi krzywoliniowemu $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ odpowiada układ punktów $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ i oczywiście każda para punktów $(p_1, p_2), (p_2, p_3), \dots$ leży na tych krzywych (c) , którym odpowiadają punkty, będące wierzchołkami danego wielokąta krzywoliniowego. Przechodząc do granicy, otrzymamy i tu parę krzywych, znajdujących się w takiej zależności, że punktom jednej z nich odpowiadają krzywe $(c$ lub $C)$, obwiednie drugiej. Jednak wzajemność nie jest tu zupełna. Mianowicie, jeżeli krzywa Σ jest obwiednią wszystkich krzywych C , które odtwarzają się jako punkty jednej krzywej c , to odpowiadające punktom Σ krzywe c obwodzą, prócz danej krzywej, w ogóle jeszcze drugą krzywą.

3. Plücker ¹⁾ oparł ogólną wzajemność dwóch układów przestrzennych r i R na równaniu ogólnem:

$$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0.$$

Jeżeli w szczególności funkcja F jest liniową względem obu układów współrzędnych, natenczas otrzymamy pomiędzy punktami i płaszczyznami w obu układach przestrzennych wzajemność Ponceleta-Gergonne'a.

Właśnie zamiarem jest moim rozważyć w niniejszej pracy, a osobliwie w 1-szym jej rozdziale, nową wzajemność, współrzędną z Plückerowską, określoną przez układ równań:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

w których (x, y, z) i (X, Y, Z) oznaczają współrzędne układów przestrzennych r i R .

¹⁾ Aczkolwiek nie mogę podać żadnego ustępu z dzieła Plückera, w którymby on w poniższy sposób explicite uzasadniał wzajemność tę w przestrzeni, sądzę jednak, że można ją pomimo to zupełnie ściśle przypisać Plückerowi. Przyp. aut.

§ 2.

Krzywe, zależne od trzech parametrów, mogą być wprowadzone jako element przestrzenny.

4. Przekształcenie twierdzeń geometrycznych, oparte na teorii dwistości Ponceleta-Gergonne'a lub też Plückera może być rozpatrywane (jak to zaznaczyli Gergonne i Plücker) z bardziej ogólnego punktu widzenia, który poniżej uzasadnimy. To samo tyczy się naszej nowej wzajemności.

Geometria Descartes'a przekłada dane twierdzenia geometryczne na język algebraiczny i w ten sposób przy pomocy geometrii płaskiej uzmysławia algebrę dwu zmiennych, a przy pomocy geometrii przestrzeni—algebrę, obejmującą trzy zmienne. Otóż Plücker zwrócił zwłaszcza uwagę na to, że geometria Descartes'a zawiera podwójną dowolność

Descartes przedstawia układ wartości zmiennych (x, y) jako punkt na płaszczyźnie, według utartego zatem wyrażenia, przyjmuje on punkt jako element geometrii płaskiej; tymczasem możnaby do tego celu użyć zarówno prostej, jak i w ogóle każdej krzywej, zawierającej dwa parametry. Można jednak, jak wiadomo, przekształcenie, wynikające z teorii wzajemności Ponceleta-Gergonne'a, uważać za sposób przejścia od punktu, jako elementu, do prostej; podobnież i wzajemność Plückera na płaszczyźnie polega na przejściu od punktu, jako elementu, do krzywej, zależnej od dwóch parametrów—jako elementu.

Następnie Descartes określił za pomocą układu wartości (x, y) ten mianowicie punkt płaszczyzny, którego odległości od dwóch danych prostych, osi współrzędnych, są odpowiednio równe x i y ; wybrał on zatem wśród nieograniczonej wielu możliwych układów współrzędnych—pewien układ zupełnie określony.

Wiadomo, że postępy geometrii w naszym stuleciu polegają głównie na tem, że obie dowolności w przedstawieniu geometrycznym Descartes'a zostały jako takie jasno uznane, i jest zatem zupełnie naturalnem usiłowanie zacerpnięcia czegoś więcej z tego bogatego źródła.

5. Nowe teorie, poniżej przedstawione, polegają na możliwosci użycia każdej krzywej, zależnej od trzech parametrów, jako elementu przestrzennego. Jeżeli sobie np. przypomnimy, że równania prostej w przestrzeni zawierają cztery stałe niezależne, to wynika stąd, że proste, czyniące zadość jednemu warunkowi, można uważać za element geometrii przestrzennej, będącej uzmysłowieniem

algebry trzech zmiennych. Ponieważ jednak w ten sposób wyróżniamy układ prostych, t. zw. Plückerowski kompleks prostych, to oczywiście przedstawienie tego rodzaju może być stosowane tylko w pewnych ograniczonych przypadkach. Zajmując się wszakże badaniem przestrzeni odnośnie do kompleksu prostych, można z korzyścią używać linii tego kompleksu, jako elementów przestrzeni.

Tak np. w geometrii miarowej wyróżniamy nieskończenie odległe koło urojone i, co zatem idzie, kompleks przecinających je prostych urojonych; stąd a priori wynika prawdopodobieństwo, że korzystnym byłoby wprowadzenie tych linii jako elementów przy rozważaniu pewnych zagadnień metrycznych.

Jeżeli, jak dopiero co powiedzieliśmy, możliwym jest przyjąć proste kompleksu za element przestrzenny, to trzeba jednak zauważyć, że jest to pomysł zupełnie inny, albo — jeżeli chcemy — bardziej szczegółny niż ten, który rozwinął Plücker w ostatnim swem dziele „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der Geraden als Raumelemente“. Plücker już wcześniej ¹⁾ zauważył, że możliwą jest interpretacja geometryczna algebry o wielu zmiennych, przy wprowadzeniu jako element przestrzeni, utworu, mającego tyleż parametrów. W szczególności zaznaczył on, że prosta w przestrzeni zawiera cztery parametry i że rozpatrując ją jako element przestrzeni, otrzymujemy geometryę różniczkową czterowymiarową.

§ 3.

Kompleksy krzywych. Nowa geometryczna interpretacja równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Linie asymptotyczne kompleksu krzywych.

6. Według Plückera, układ prostych, poddany jednemu warunkowi, t. j. układ, zawierający trzy stałe istotne, nazywamy kompleksem prostych (Linien-Complex). Analogicznie będę nazywał poniżej każdy układ krzywych, których równania zawierają trzy niezależne parametry, kompleksem krzywych. Zatem równania:

$$(1) \quad f_1(x, y, z, a, b, c) = 0, \quad f_2(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

w których a, b, c są stałymi, przedstawiają kompleks krzywych. Przez róż-

niczkowanie obu tych równań względem x, y, z i wyrugowanie ilości a, b, c otrzymamy wypadkową:

$$(2) \quad f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

która — jeżeli dx, dy, dz mamy pojmować jako elementy określające pewien kierunek — określa dla każdego punktu przestrzeni stożek, t. j. ogół kierunków wszystkich krzywych kompleksu, przechodzących przez punkt powyższy. Stożki te nazywam stożkami elementarnymi kompleksu; stosuję również termin: kierunek elementarny kompleksu, ażeby oznaczyć dowolny element liniowy (dx, dy, dz) danej krzywej kompleksu. Ogół wszystkich kierunków elementarnych kompleksu, odpowiadających danemu punktowi, tworzy przynależny temu punktowi stożek kompleksu.

Danemu układowi (1), albo też, jak można się również wyrazić, danemu kompleksowi krzywych, odpowiada pewne określone równanie różniczkowe ($f=0$); odwrotnie jednak istnieje nieograniczona liczba układów (1), prowadzących do tego samego równania ($f=0$). W istocie, jeżeli wybierzemy zależność dowolną:

$$\psi(x, y, z, dx, dy, dz, a) = 0,$$

w której a oznacza stałą, i jeżeli równania:

$$(3) \quad \varphi_1(x, y, z, a, \beta, \gamma) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, a, \beta, \gamma) = 0,$$

są całkami układu równań jednoczesnych:

$$f = 0, \quad \psi = 0,$$

to jasnym jest, że i równania (3) przez różniczkowanie względem x, y, z i wyrugowanie ilości a, β, γ , dają wynik:

$$f = 0.$$

Istnieje zatem nieograniczenie wiele kompleksów krzywych, których równania czynią zadość pewnej danej na przód zależności $f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$.

Każda krzywa takiego kompleksu jest obwiedziona przez krzywe kompleksu pierwiastkowego, co wynika stąd, że wszystkie jej elementy są kierunkami kompleksu.

7. Równania różniczkowe rzędu 1-go o trzech zmiennych x, y, z równoważy się, według Monge'a, z zagadnieniem, polegającym na znalezieniu ogólnej powierzchni stycznej w każdym punkcie do stożka, należącego do

¹⁾ Geometrie des Raumes, n. 258 (1846).

tegoż punktu według danego dowolnie prawa. Rozpatrując przytem w danym równaniu różniczkowem:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

x, y, z jako parametry, p, q zaś jako współrzędne płaszczyzny, można powiedzieć, że $F=0$ jest ogólnym równaniem powyższego układu stożków w współrzędnych płaszczyznowych. Lagrange i Monge sprowadzili całkowanie równania różniczkowego cząstkowego rzędu 1-go do wyznaczenia pewnego kompleksu krzywych, tak zwanych charakterystyk; pokazali oni mianowicie, że jeżeli ∞^1 charakterystyk obwiodą krzywą, to tworzą one zawsze powierzchnię całkową. Należy zaznaczyć, że równanie różniczkowe charakterystyk ¹⁾:

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

winnu być uważane jako równoważne z danym równaniem różniczkowem, gdyż są równania stanowią definicyę analityczną wyżej wymienionego układu.

8. Niech D_1 będzie równaniem różniczkowem cząstkowym rzędu 1-go, $f=0$ — odpowiedniem równaniem różniczkowem charakterystyk, wreszcie c układem ∞^3 krzywych ²⁾, czyniących również zadość równaniu $f=0$. Rozważmy dowolną powierzchnię całkową U_0 , łączącą na niej charakterystykę k_0 i wreszcie krzywą kompleksu c_0 , styczną do k_0 , natenczas można dowieść, że c_0 dotyka powierzchni U_0 potrójnie, (t. j. przecina ją w trzech nieskończenie bliskich punktach. Przyp. tłem.)

Jeżeli bowiem oznaczymy oba nieskończenie bliskie punkty krzywych c_0 i k_0 przez p_1 i p_2 , następnie sąsiednie (nieskończenie bliskie) punkty tych krzywych przez π i p_3 , to jasnym jest, że stożek elementarny kompleksu, którego wierzchołek leży w punkcie p_2 , zawiera element powierzchni $(p_2 p_3 \pi)$. Ponieważ zaś stożek dotyka powierzchni całkowej U_0 wzdłuż tworzącej

¹⁾ Ażeby z równania (1) otrzymać równoważne temuż równanie cząstkowe należy z układu:

$$f(x, y, z, x', y', z') = 0, \quad p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

wyrugować wielkości jednorodne x', y', z' ; rezultatem tego rugowania będzie równanie kształtu $F(x, y, z, p, q) = 0$, patrz Lie „Geometrie der Berührungstransformationen, s. 258 Przyp. tłem.

²⁾ Krzywe tego rodzaju Lie nazywa krzywami całkowemi (Integralcurven) równania $f=0$. Przyp. tłem.)

$p_2 p_3$, więc element $(p_2 p_3 \pi)$ należy jednocześnie do powierzchni U_0 , która wskutek tego zawiera punkt π . Twierdzenie nasze zostało zatem dowiedzione ¹⁾.

Daje się ono uogólnić w ten sposób, że jeżeli c_0 ma n następujących po sobie k_0 punktów wspólnych z charakterystyką, natenczas $(n+1)$ punktów przecięcia powierzchni całkowej (U_0) i krzywej c_0 zlewają się w jeden punkt ²⁾.

9. Warunek, ażeby powierzchnia $z = F(x, y)$ miała w każdym punkcie trzy nieskończenie bliskie punkty wspólne z daną krzywą kompleksu c , wyraża się za pomocą pewnego równania cząstkowego rzędu 2-go D_2 ³⁾; przytem łatwo widzieć, że ∞^1 krzywych c tworzy zawsze powierzchnię całkową ⁴⁾: W ten sposób znamy całkę ogólną (allgemeines zweites Integral)

¹⁾ Analityczny dowód tego twierdzenia, które można i tak wysłowić: każda krzywa całkową ma styczność 2-go rzędu ze stycznymi do niej powierzchniami całkowemi równania D_1 , patrz Goursat „Vorlesungen über Integr. d. part. Differentialgleichungen 1-er Ord str. 187. Przyp. tłem.

²⁾ Analogiczne twierdzenia istnieją dla przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów.

³⁾ Równanie to ma postać:

$$r + 2Ns + N^2t + M = 0,$$

przyczem N i M zależą od x, y, z, p, q .

Przyp. sut.

W istocie, niech r, s, t oznaczają pochodne $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, zaś $\partial x, \partial y, \partial z$ — przyrosty zmiennych w przypuszczeniu, że się posuwamy wzdłuż krzywych kompleksu, natenczas przedstawwszy równanie (1) w kształcie:

$$(a) \quad x = X(t, a, b, c), \quad y = Y(t, a, b, c), \quad z = Z(t, a, b, c),$$

możemy obliczyć wielkości $\partial x, \partial^2 x, \partial y, \partial^2 y, \dots$, jako funkcy wielkości t, a, b, c i przyrostów $\partial t, \partial^2 t$.

Ponieważ zaś krzywe kompleksu mają styczność 2-go rzędu z powierzchnią $z = F(x, y)$ można więc w równaniach:

$$(b) \quad \partial z = p \partial x + q \partial y,$$

$$(c) \quad \partial^2 z = p \partial^2 x + q \partial^2 y + r \partial x^2 + 2s \partial x \partial y + t \partial y^2,$$

podstawić poprzednio otrzymane wartości $\partial x, \partial^2 x$. Obliczywszy tedy z równań (1) i z równania

$$(d) \quad Z' = pX' + qY'$$

parametry a, b, c , jako funkcy wielkości x, y, z, p, q i podstawivszy je w równanie:

$$(e) \quad Z'' = pX'' + qY'' + rX'^2 + 2sX'Y' + tY'^2,$$

otrzymamy równanie cząstkowe rzędu 2-go w takim kształcie, jak było do okazania.

Przyp. tłem.

⁴⁾ Patrz Goursat. Intégration des équations aux dériv. partielles du 2-^e ordre, str. 3 i następne. Przyp. tłem.

równania D_2 , zawierającą dwie funkcje dowolne. Tymczasem, wynika z twierdzenia poprzedniego, że i powierzchnie całkowite równania D_1 mają w każdym punkcie z krzywymi c styczność rzędu 2-go, pomimo to, że nie są one w ogóle utworzone przez krzywe kompleksu c ; stąd wynika więc, że D_1 jest całką osobliwą pośrednią naszego równania różniczkowego rzędu 2-go. O tóż twierdzę, że D_2 nie posiada poza tem żadnej innej całki osobliwej.

W istocie niech θ będzie powierzchnią całkową równania D_2 , nie utworzoną przez krzywe c . Wtedy przez każdy punkt powierzchni przechodzą dwie styczne do niej, zlewające się w jedną krzywą c . Wynika stąd, że odnośny stożek elementarny kompleksu jest stycznym do powierzchni, że zatem ta ostatnia czyni zadość równaniu D_1 . Z ostatnich dwóch N-rów wynika następująca godna uwagi interpretacja geometryczna równań różniczkowych cząstkowych rzędu 1-go pomiędzy trzema zmiennymi:

Zadanie, polegające na wyznaczeniu wszystkich powierzchni, które mają po trzy sąsiednie wspólne punkty z ∞^2 krzywymi danego kompleksu, wyraża się za pomocą równania różniczkowego cząstkowego rzędu 1-go. Wszystkie kompleksy, których równania czynią zadość danej zależności:

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

prowadzą do tego samego równania cząstkowego, przyczem charakterystyki tegoż czynią właśnie zadość równaniu $f=0$.

10. Wniosek. Zadanie, polegające na wyznaczeniu wszystkich powierzchni, na których ∞^2 stycznych jednego układu należą do danego kompleksu prostych, sprowadza się do równania różniczkowego cząstkowego rzędu 1-go. Charakterystyki tego ostatniego są obwiedniami prostych kompleksu, na powierzchniach całkowych zaś tworzą one jeden z układów krzywych asymptotycznych ¹⁾.

Zaznaczę tu, w jaki sposób można samodzielnie dowieść ostatniego twierdzenia:

¹⁾ Darboux, któremu zakomunikowałem to twierdzenie w lecie 1870, znał je już wówczas; porównaj początek i koniec drugiej części. (Przyp. aut.)

Dowód powyższego twierdzenia patrz Lie, Geom. der Berührungstransformationen, str. 638, 373. (Przyp. tłum.)

Równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go, którego charakterystyki są obwiedzionymi przez proste danego kompleksu, jest, jak wiadomo, wyrazem następującego zagadnienia: Znaleźć ogólną powierzchnię styczną we wszystkich punktach do odpowiednich stożków kompleksu. Ponieważ zaś płaszczyzna, ściśle styczna krzywej, której styczne należą do kompleksu prostych, jest płaszczyzną styczną do odpowiedniego stożka kompleksu ¹⁾, zatem płaszczyzna ściśle styczna charakterystyki dotyka w danym przypadku i odpowiednich powierzchni całkowych. Charakterystyki są więc krzywymi asymptotycznymi.

W ten sposób każdy kompleks prostych określa ∞^3 krzywych, obwiedzionych przez należące do niego proste i będących liniami asymptotycznymi na każdej powierzchni, zawierającej ∞^1 tych krzywych; przypuszczamy pżytem, że dwie sąsiednie krzywe zawsze się przecinają. Krzywe powyższe, które nazywam liniami asymptotycznymi kompleksu prostych, grają ważną rolę w teorii kompleksów (porównaj 3-ci rozdział niniejszej rozprawy). Klein udzielił mi spozstrzeżenia, że proste kompleksu, zwane przez Plückera osobliwymi liniami kompleksu — są jego liniami asymptotycznymi ²⁾. Jeżeli kompleks utworzony jest przez styczne do danej powierzchni lub też przez proste, przecinające daną krzywą, wtedy wszystkie linie kompleksu są osobliwymi, i jako takie, asymptotycznymi liniami kompleksu.

¹⁾ Dowód tego twierdzenia: Lie, Geom. der. Berührtransf., str. 303—304, Satz. 21. Patrz również: Verh. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Christiania, 1871, str. 77. Przyp. tłum.

²⁾ Plücker podał określenie prostych osobliwych tylko dla kompleksów rzędu 2-go (patrz Neue Geometrie d. Raumes N° 311). Jeżeli, według Clebscha (Math. Annalen 1872, str. 438) uważać jako linie osobliwe kompleksu n -tego rzędu, tworzące podwójne jego stożków elementarnych, wtedy prawdziwość powyższego spozstrzeżenia można dowieść jak następuje: Wzrnek, aby stożek elementarny równania $(\alpha) F(x, y, z, p, q) = 0$ miał podwójną tworzącą, wyraża się przez wzory: $\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial q} = 0$, z których wynika, że tylko stożki, odpowiadające punktom pewnej powierzchni (t. zw. Singularitätenfläche), mają powyższą własność. Wszystkie elementy powierzchniowe, przechodzące przez dany punkt tej powierzchni i zawierające odpowiednią podwójną tworzącą, czynią zadość wzorowi (α) . Weźmy pod uwagę powierzchnię całkową, przechodzącą przez jeden z tych elementów (dowolnie obrany), natenczas podwójną tworzącą stożka należy uważać jako linię styczności stożka i płaszczyzny powyższego elementu. Tworząca tu zatem jest styczną do charakterystyki, leżącej na rozważanej powierzchni całkowej i przechodzącej przez dany punkt; zatem, według N° 8, § 3, nasza tworząca ma styczność rzędu 2-go z daną powierzchnią całkową, t. j. jest jej styczną główną. Proste osobliwe tworzą, według Clebscha, kongruencję prostych i obwiodzą w ten sposób ∞^1 krzywych, które oczywiście, jako obwiedzione przez styczne główne, będą liniami asymptotycznymi na odpowiednich powierzchniach całkowych. Przyp. tłum.

§ 4.

Układ równań $F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0$, $F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$ wyznacza wzajemność pomiędzy dwoma układami przestrzennymi.

11. Przechodzimy obecnie do rozważania wzajemności przestrzennej, określonej przez równania:

$$(1) \quad F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0.$$

w których x, y, z, X, Y, Z uważamy jako współrzędne punktów obu układów przestrzennych ¹⁾ r i R .

Jeżeli oznaczymy jako sprzężone dwa punkty (x, y, z) i (X, Y, Z) , dla których wartości współrzędnych czynią zadość równaniom (1), to można powiedzieć, że punkty (X, Y, Z) , sprzężone względem danego punktu (x, y, z) , tworzą pewną krzywą C ; tę ostatnią wyrażają analitycznie równania (1). Jeżeli w nich przyjmiemy (x, y, z) za parametry, (X, Y, Z) zaś jako współrzędne bieżące. Punktem układu przestrzennego r odpowiada zatem ∞^3 krzywych C , również i w układzie R występuje kompleks krzywych, którego linie c są w tym samym stosunku do punktów układu R . Punkty danej krzywej c mają wspólny sprzężony punkt w R , a zatem odpowiadające im krzywe C przechodzą przez ten wspólny punkt.

Za pomocą równań (1) można tak odnieść oba układy przestrzenne R i r jeden do drugiego, że punktom jednego układu odpowiadają w drugim krzywe pewnego kompleksu. Linie kompleksu, przecinające się w jednym punkcie, odtwarzają się przytem, jako punkty krzywej kompleksu, odpowiadającej temu punktowi.

12. Można okazać, że równania (1) wyznaczają wzajemność ogólną między utworami układów r i R , w szczególności zaś między krzywymi, obwiedzionymi przez krzywe kompleksów c i C .

Jeżeli krzywe kompleksu w jednym z układów przestrzennych mają punkt wspólny—co oczywiście wogóle nie ma miejsca—wtedy odpowiadające im punkty leżą na jednej i tej samej krzywej kompleksu w drugim układzie; w szczególności trzeba zaznaczyć, że nieskończenie bliskim przecinającym się

¹⁾ Utwory układu r będziemy w następstwie oznaczali małymi literami, wielkimi zaś—utwory, odnoszące się do układu R .
Przyp. aut.

krzywymi kompleksu odpowiadają w drugim układzie punkty, połączone linią nieskończonościową, będącą kierunkiem kompleksu. Wziąwszy krzywą σ , obwiedzioną przez ∞^1 krzywych kompleksu c , i odpowiadające punktom teje krzywe C , widzimy, że dwie sąsiednie krzywe C przecinają się za każdym razem, że zatem ogół tych krzywych określa obwiednią Σ . Wykonując nad Σ to samo działanie, otrzymamy pewną krzywą σ' , obwiedzioną przez krzywe kompleksu c , przyczem łatwo okazać, że σ' jest właśnie początkowo rozważaną krzywą σ . W tym celu zauważmy z jednej strony wielobok krzywoliniowy, utworzony z krzywych kompleksu c , z drugiej strony punkty, odpowiadające tym krzywim. Punkty te leżą oczywiście parami na tych mianowicie krzywych kompleksu C , które odpowiadają kątom danego wieloboku. Zatem nowy wielobok i dany są w zupełnie wzajemnej zależności.

Za pomocą przejścia do granicy otrzymujemy dwie krzywe (obwiedzione przez linie kompleksu c i C), które są w takiej zależności jedna od drugiej, że punktom pierwszej odpowiadają linie kompleksu, obwiedzące drugą.

Każda z obwiedzionych krzywych kompleksu odtwarza się zatem w podwójny sposób jako nowa krzywa, obwiedzona przez krzywe drugiego kompleksu. Tę ostatnią nazwiemy wzajemną (reciprok) z daną względem układu równań (1). Oczywiście można, za pomocą prostych działań różniczkowania i rugowania otrzymać z równania danej krzywej, równanie jej wzajemnej. Należy jeszcze zauważyć, że kierunki elementarne kompleksu (dx, dy, dz) i (dX, dY, dZ) porządkują się wzajemnie parami, t. j. że dwie krzywe, obwiedzione przez linie kompleksu i styczne do siebie, odtwarzają się również jako styczne do siebie krzywe ¹⁾.

¹⁾ Rezultat ten wynika z odpowiadania sobie jednoznacznego krzywych kompleksów c i C . Analitycznie można dojść do tego samego wniosku, różniczkując równania $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ (2) raz w przypuszczeniu, że przedstawiają one kompleks c , t. j. że X, Y, Z są stałymi; drugi raz dopuściwszy, że

$$dx = dy = dz = 0.$$

Otrzymamy w ten sposób dwa układy:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & F_{1x}dx + F_{1y}dy + F_{1z}dz = 0, \quad F_{2x}dx + F_{2y}dy + F_{2z}dz = 0. \\ (\beta) \quad & F_{1X}dX + F_{1Y}dY + F_{1Z}dZ = 0, \quad F_{2X}dX + F_{2Y}dY + F_{2Z}dZ = 0. \end{aligned}$$

Przyjawszy wartości (x, y, z) i (X, Y, Z) tak, ażeby leżały na odpowiednich krzywych, t. j. żeby czyniły zadość równaniom (1), możemy z (α) i (β) otrzymać zupełnie określone wartości stosunków $(dx:dy:dz)$ i $(dX:dY:dZ)$. Prócz tego stąd, że równania (α) i (β) są liniowe względem różniczek $dx, dX, \dots$ wynika, że odpowiadanie sobie kierunków kompleksu (x, y, z, dx, dy, dz) i (X, Y, Z, dX, dY, dZ) jest jednoznaczne. Przyp. tłum.

13. Również i w pośród drugich tworów przestrzennych wyznaczają równania (1) zależność, która mogąc być w dvojaki sposób pojmowana, nie jest jednak wogóle wzajemnością zupełną. Elementarne stożki kompleksu, których wierzchołki leżą na danej powierzchni, przecinają odpowiednio płaszczyzny styczne każdym razem wzdłuż n prostych — n oznacza rząd stożka kompleksu — i podporządkowują w ten sposób każdemu punktowi powierzchni n kierunków elementarnych kompleksu. Nieprzerwany szereg tych następujących po sobie kierunków tworzy układ krzywych σ , pokrywających n -krotnie powyższą powierzchnię; wszystkie te krzywe są obwiedzione przez linie kompleksu. Odpowiednie wzajemne krzywe Σ tworzą powierzchnię F , którą będziemy uważali jako odwzorzenie danej (f). Że wzajemność nie jest tu zupełną, polega na tem, że w ogóle przez każdy punkt powierzchni F przechodzi tylko jedna krzywa Σ . Prócz tych leży jednakże na F szereg krzywych Σ' , również obwiedzionych przez krzywe kompleksu C ; przytem przez każdy punkt powyższej powierzchni przechodzi $N-1$ krzywych Σ' , w przypuszczeniu, że N oznacza rząd stożków elementarnych kompleksu przestrzeni R . Odpowiadające wzajemnie krzywom Σ' linie tworzą powierzchnię φ , która poniekąd będzie stowarzyszona z daną powierzchnią f .

Przez każdy punkt powierzchni f przechodzi, jakśmy powiedzieli, n krzywych σ , i dla tego ten punkt jest obrazem krzywej kompleksu C , stycznej do n krzywych Σ , wskutek czego krzywa C jest styczną w n punktach do powierzchni F . Z drugiej strony przez każdy punkt powierzchni F przechodzi tylko jedna Σ , zaś $N-1$ krzywych Σ' , zatem punkt ten jest obrazem krzywej kompleksu c , która do f styczną jest w jednym punkcie, do φ zaś w $N-1$ punktach.

Jeżeli wprowadzimy analogiczne do używanych w geometrii liniowej terminów oznaczenia: „kongruencya krzywych“ i „powierzchnia ogniskowa kongruencji krzywych“¹⁾, wtedy będziemy mogli wyrazić poprzednie wnioski w następujący sposób:

Punkty powierzchni f odtwarzają się w R jako ∞^2 krzywych kompleksu C , t. j. jako kongruencya krzywych, której powierzchnię ogniskową winniśmy uważać jako odwzorowanie powierzchni danej. Podobnie punkty powierzchni F odtwarzają się jako ∞^2 krzywych c , przyczem utworzona przez nie powierzchnia ogniskowa zawiera daną powierzchnię f , jako część przywiedlną.

¹⁾ Jeżeli kongruencyę krzywych określimy za pomocą równania liniowego różniczkowego cząstkowego rzędu 1-go, w takim razie powierzchnia ogniskowa odpowiada wogóle t. zw. całce osobliwej tegoż równania.
Przyp. aut.

14. Poprzednie rozważania stosują się do przypadku, kiedy f i F są elementami powierzchniowymi. Nasza wzajemność wyznacza zatem odpowiadanie sobie elementów powierzchniowych. Danemu elementowi pierwszego układu odpowiada n elementów drugiego układu; z drugiej strony każdemu elementowi układu R odpowiada N elementów, należących do r . Jeżeli więc równania (1) mają określać wzajemność zupełną, t. j. jednoznaczne odpowiadanie sobie elementów powierzchni, to obie liczby n i N muszą być równe jedności. Do tej kategorii należy, zauważmy mimochodem, przekształcenie Ampère'a (porówn. § 7, 22). Przeciwnie znaleźliśmy, że odpowiadanie sobie elementarnych kierunków kompleksu jest w ogóle jednoznaczne¹⁾ i w istocie, najprostszy punkt widzenia na naszą wzajemność otrzymamy, rozpatrując każdą figurę, jako złożoną z kierunków elementarnych kompleksu. Np. możemy powiedzieć, że ∞^2 kierunków elementarnych kompleksu danej powierzchni f odtwarza się jako elementarne kierunki kompleksu odpowiedniej powierzchni F .

Niech będzie daną krzywa k , którą możemy uważać jako powierzchnię rurową o nieskończenie małym przecięciu. Wszystkie kierunki elementarne kompleksu przecinające k , dają ∞^2 kierunków kompleksu (dX, dY, dZ) które tworzą w ogólności pewną powierzchnię F , będącą obrazem krzywej k . To określenie powierzchni F jest równoznaczne z dwoma następującymi:

1) F zawiera ∞^1 krzywych C , które się odtwarzają jako punkty krzywej k . 2) Wszystkie krzywe kompleksu c , przecinające k , odtwarzają się jako punkty powierzchni F .

Równania $F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0$, $F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$ przeprowadzają zatem dowolnie wzięte utwory na inne i mogą służyć w celu przekształcania twierdzeń i zagadnień geometrycznych. W drugim rozdziale zrobimy ważne zastosowanie tej zasady przekształcania do szczególnej postaci równań (1).

§ 5.

Wyznaczenie wszystkich przekształceń przestrzennych, dla których styczność jest własnością niezmienniczą²⁾.

15. Wiadomo, że w teorii równań różniczkowych grają przekształcenia, wyrażające się za pomocą równań:

¹⁾ Wynika to z przypisku do N° 12.

²⁾ Według późniejszej terminologii Lie'go noszą one nazwę przekształceń stycznościowych.
Przyp. tłum.

(1) $X = f_1(x, y, z, p, q)$, $Y = f_2(x, y, z, p, q)$, $Z = f_3(x, y, z, p, q)$, rolę pierwszorzędną; p i q oznaczają tu, zarówno jak i niżej P , Q , pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$. Godnym uwagi jest szczególny przypadek, kiedy z równań (1) wynikają wyrażenia na P , Q , zależne również tylko od (x, y, z, p, q) . Wtedy nasze przekształcenie posiada własność przeprowadzania stycznych do siebie powierzchni na takie powierzchnie. W tym paragrafie zamierzam właśnie podać nowy, o ile mi się zdaje, podział (analityczno-geometryczny) tych przekształceń na trzy klasy.

Równania (1) podporządkowują dowolnemu elementowi powierzchniowemu (x, y, z, p, q) punkt (X, Y, Z) ; wynika stąd, że elementom danej powierzchni F odpowiadają punkty pewnej powierzchni F , która jednak w szczególności może przejść na krzywą lub nawet na punkt. Zmieniając daną powierzchnię π tak, by jeden jej element powierzchniowy pozostał bez zmian, otrzymamy odpowiadającą jej powierzchnię II , które się stykają w jednym (lub kilku) wspólnym elemencie (wspólnych elementach) E . Jeżeli II przechodzi na krzywą, to ta ostatnia zawiera, jak wykazuje stosowanie zasady ciągłości, dwa sąsiednie punkty elementu E . Jeżeli natomiast II staje się kulą zerową (kulą o nieskończenie małym promieniu), to ta ostatnia musi leżeć na E .

Rozważmy ∞^3 zupełnie dowolnych powierzchni f i odpowiednie utwory drugiego układu przestrzennego, które są powierzchniami krzywymi, lub też, kulami zerowymi. Dowolną powierzchnię Φ obwodzi ∞^2 powierzchni f , i z poprzedniego wynika, że odpowiednie im ∞^2 utwory F dotykają powierzchni Φ . W tem mieści się ogólne określenie geometryczne naszych przekształceń.

16. Wybierzmy w szczególności jako powierzchnie f wszystkie kule zerowe układu r , wtedy można analitycznie określić utwory F , rugując p i q z równań:

$$X = f_1(x, y, z, p, q), \quad Y = f_2(x, y, z, p, q), \quad Z = f_3(x, y, z, p, q).$$

Mogą tu zajść trzy przypadki: albo istnieje tylko jeden związek między (x, y, z, X, Y, Z) ¹⁾, i wtedy przekształcenie należy do tych, które Plücker określił mianem wzajemności ogólnej; lub też istnieją dwie takie zależności, co odpowiada wzajemności, utworzonej przezennię; wreszcie mogą istnieć trzy niezależne równania między współrzędnymi punktów obu układów przestrzennych, co ma miejsce przy wszystkich przekształceniach punktowych.

¹⁾ Porów. Du Bois-Reymond, Partielle Differential-Gleichungen, str. 175—181.
Przyp. ant.

Istnieją trzy różne klasy przekształceń, dla których styczność jest własnością niezmienniczą; pierwsza odpowiada Plückerowskiej wzajemności w przestrzeni i określa się za pomocą jednego równania kierowniczego (aequatio directrix):

$$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0;$$

druga odpowiada wzajemności, podanej przezennię i określonej przez dwa równania:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0;$$

trzecia wreszcie obejmuje wszystkie przekształcenia punktowe i określa się za pomocą trzech równań:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_3(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

Obie pierwsze klasy przekształceń polegają na wprowadzeniu nowego elementu przestrzeni, ostatnia zaś na wprowadzeniu nowego układu współrzędnych ²⁾.

§ 6.

Przekształcenie równań różniczkowych cząstkowych.

17. Legendre ³⁾ podał metodę ogólną, mającą na celu — wyrażając się językiem geometrii nowożytniej — przeprowadzenie równania różniczkowego cząstkowego w współrzędnych punktu (x, y, z) na także równanie w współrzędnych płaszczyzny (t, u, v) ; można przytem uważać (t, u, v) również jako współrzędne punktu układu przestrzennego wzajemnego z danym.

¹⁾ W przestrzeni o n wymiarach istnieje n rozmaitych klas przekształceń, dla których styczność jest własnością niezmienniczą. Jeżeli n jest liczbą całkowitą nie większą od n , to możemy powiedzieć, że każda klasa określona jest za pomocą n równań pomiędzy współrzędnymi obu układów przestrzennych.
Przyp. ant.

²⁾ Wyczerpujące dowodzenie rezultatów No 16, odnoszących się do 3-ich resp. n klas przekształceń stycznościowych patrz Lie: Theorie d. Transformationsgruppen 2 Bd. str. 44—70; również Goursat: Partielle Differentialgleichungen 1-er O. Leipz. 1893, str. 247 i 253—258.
Przyp. tñm.

³⁾ Umieszczone tutaj pojmowanie ogólne t. zw. przekształcenia Legendre'a należy zapewne przypisać Plückerowi, Crelle J. IX, 1831.
Przyp. aut.

Podobnie, jeżeli krzywe lub powierzchnie kompleksu wprowadzimy jako elementy przestrzeni, można przekształcić równanie różniczkowe w spółrzędnych (x, y, z) na innerównanie między spółrzędnymi (X, Y, Z) nowego elementu. I tu należy zaznaczyć, że można uważać wielkości (X, Y, Z) w nowym równaniu jako spółrzędne punktów układu K ; tego sposobu pojmowania będziemy się właśnie trzymali głównie w naszej pracy.

Analityczny dowód prawdziwości powyższego twierdzenia polega na tem, że wyżej wspomniana zmiana elementu przestrzennego wyraża się za pomocą pięciu równań pomiędzy (x, y, z, p, q) i (X, Y, Z, P, Q) . Otóż, jeżeli w równanie różniczkowe cząstkowe.

$$\Pi(x, y, z, p, q) = 0,$$

wprowadzimy zamiast x, y, z, p, q wartości ich, wyrażone przez X, Y, Z, P, Q , otrzymamy wtedy nowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go. Geometrycznie można to samo okazać w następujący sposób:

Niechaj $\Pi(x, y, z, p, q) = 0$ będzie równaniem różniczkowym cząstkowym rzędu 1-go; oznaczmy wszystkie powierzchnie, tworzące t zw. całkę zupełną, przez φ ; przypominamy, że każda inna powierzchnia całkowita jest obwiednią ∞^1 powierzchni φ . Rozważmy następnie Φ i F i dowiedzmy, że każda F jest obwiednią ∞^1 powierzchni Φ . Z rozumowań ostatniego § wynika, że jeżeli dwie powierzchnie całkowite stykają się wzdluż pewnej krzywej, t. j. jeżeli mają ∞^1 wspólnych elementów powierzchniowych, natenczas to samo się stosuje do odpowiadających im powierzchni. Przyjawszy to, rozważmy powierzchnię całkowitą f_0 , następnie wszystkie ∞^1 powierzchni φ_0 , styczne do f_0 wzdluż jednej i tej samej charakterystyki i, na koniec, odpowiadające im powierzchnie F_0 i Φ_0 . Jasne jest, że każda Φ_0 dotyka F_0 według pewnej krzywej, że zatem F_0 jest obwiednią powierzchni Φ . Widzimy więc, że nasze przekształcenie przeprowadza wszystkie powierzchnie całkowite równania różniczkowego cząstkowego $\Pi(x, y, z, p, q) = 0$ na powierzchnie całkowite równania $F(x, y, z, p, q) = 0$, a tego właśnie należało dowieść.

18. Rozważmy przekształcenie, określone przez dwa odniesione do siebie kompleksy krzywych i zastosujemy je do należącego do kompleksu krzywych c równania różniczkowego rzędu 1-go (§ 3, 9); natenczas odpowiadające mu równanie różniczkowe w spółrzędnych X, Y, Z rozpada się na dwa, z których jedno odpowiada kompleksowi krzywych C .

W istocie, weźmy powierzchnię f , styczną we wszystkich punktach do odpowiednich stożków kompleksu. Stożki te wyznaczają w każdym elemencie powierzchni n elementarnych kierunków kompleksu, z których

dwa zlewają się w jeden. Leżące na powierzchni f krzywe, obwiedzione przez krzywe kompleksu c , dzielą się zatem na dwie kategorie: 1° na charakterystyki powierzchni f i 2° na szereg pokrywających ją $n-2$ -krotnie krzywych. Punkty naszej powierzchni odtwarzają się zatem jako ∞^2 krzywych C , których powierzchnia ogniskowa rozpada się na dwie powierzchnie F_1 i F_2 ; przyczem krzywe C są styczne do powierzchni F_1 w dwóch punktach zlewających się w jeden, do powierzchni F_2 zaś w $n-2$ punktach, leżących osobno. Powierzchnia F_1 zatem, według (§ 3, 9), czyni zadość równaniu różniczkowemu cząstkowemu rzędu 1-go, związanemu z krzywami kompleksu C , gdy tymczasem F_2 czyni zadość innemu równaniu różniczkowemu. W ten sposób dowiedliśmy powyższego twierdzenia, które zresztą jest identyczne z obu następującymi:

Jeżeli element powierzchniowy układ r jest styczny do stożka elementarnego kompleksu, to odtwarza się on jako $n-1$ elementów, z których jeden musi być liczony dwa razy i jest również styczny do elementarnego stożka kompleksu 1 .

Krzywe kompleksów c i C określają dwa równania różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go, których charakterystyki 2) są krzywami wzajemnymi względem równań $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$.

19. Ostatnie wysłowienie naszego twierdzenia prowadzi do następującej metody przekształcenia równań różniczkowych cząstkowych rzędu 1-go:

¹) Danemu elementowi jednego z układów przestrzennych odpowiada n resp. N) elementów drugiego układu. Wskutek tego wzajemnie podporządkowują się grupy po n resp. N elementów, które możemy określić jako stowarzyszone. Jeżeli przekształcenie określone jest za pomocą dwóch równań ($F_1 = 0, F_2 = 0$), to z rozumowań tekstu wynika, że istnieje w każdym z układów przestrzennych ∞^4 takich elementów, które się zlewają z jednym ze stowarzyszonych; przytem godne jest uwagi, że taki element odtwarza się z drugim układzie przestrzennym, jako element tego samego rodzaju. W tej formie można stosować twierdzenie, wypowiedziane w tekście, i do przekształceń, określonych przez jedno równanie $F(x, y, z, X, Y, Z) = 0$. Przyp. aut.

²) Ażeby znaleźć równanie charakterystyk należy z danego równania różniczkowego $\Pi(x, y, z, p, q) = 0$ i z równań:

$$\frac{dx}{\Pi_p} = \frac{dy}{\Pi_q} = \frac{dz}{\Pi_{xp} + \Pi_{yq}},$$

wyrugować wielkości p, q ; rezultatem rugowania będzie żądane równanie. Porów. Lie Geom. d. Berührungstranf., str. 511. Przyp. tłum.

Należy określić równanie charakterystyk $f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$ i wybrać zależność dowolną:

$$\psi(x, y, z, dx, dy, dz, X) = 0,$$

w której X oznacza stałą dowolną. Niech

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

oznaczają całki układu równań spójniejących: ($f=0, \psi=0$), przyczem X, Z są stałymi całkowania.

Równania $F_1=0, F_2=0$ dają jako rezultat różniczkowania wielkości x, y, z , zależność:

$$F_3(X, Y, Z, dX, dY, dZ) = 0,$$

która ze swej strony określa, według zwykłych metod, równanie różniczkowe cząstkowe:

$$F_4\left(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = 0.$$

Dane równanie różniczkowe i obecnie znalezione ($F_4=0$) przedstawiają zagadnienia równoważne w tem znaczeniu, że odpowiadające sobie charakterystyki są krzywymi wzajemnymi względem układu $F_1=0, F_2=0$.

Nietrudno będzie przekonać się o prawdziwości obu następujących twierdzeń, które podaję jako przykłady:

Przekształcając powyższą metodą równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go, należące do kompleksu prostych (§ 3, 10) znajdziemy, że nowe równanie jest tylko stopnia drugiego. Pochodzi to stąd, że proste kongruencyi prostych styczne są do powierzchni ogniskowej w dwóch punktach¹⁾.

¹⁾ Określają one właśnie oba kompleksy ci C , przyczem pierwszy (c) składa się z krzywych całkowych równania $f=0$. $F_3=0$ jest, według § 3, 6, równaniem różniczkowym, któremu odpowiadają krzywe C , jako krzywe całkowe. Ponieważ więc kompleksy odpowiadają sobie, to samo się dotyczy równań $H=0$ i $F_4=0$. Przyp. tłóm.

²⁾ Zaznaczona tu prosta forma, jaką może przyjąć należące do kompleksu prostych równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go polega, według rozumowań § 2 (porównaj 3-ci rozdział tej rozprawy) na tem, że proste powyższego kompleksu można wprowadzić jako elementy przestrzenne. Przyp. aut.

Twierdzenia powyższego można dowieść analitycznie w następujący sposób: Ponieważ równania $F_1=0, F_2=0$ przedstawiają w układzie r kompleks prostych, muszą one być więc 1-go stopnia w współrzędnych x, y, z .

Tymczasem przekształcając równanie różniczkowe, należące do kompleksu stożkowych (§ 3, 9), znajdziemy, że nowe równanie jest stopnia trzydziestego. Wynika to stąd, że jeżeli ∞^2 stożkowych tworzy kongruencyę, to każda ze stożkowych dotyka powierzchni ogniskowej w sześciu punktach. Wskutek tego nowe stożki elementarne są szóstego rzędu, a zatem klasy trzydziestej i t. d.

20. Podaję tu jeszcze niektóre uwagi, których uzasadnienie opuszczam:

a) Jeżeli w N° 19 równanie $f=0$ ma kształt:

$$Xdz + Ydy + ZdZ = 0^1),$$

wtedy charakterystyki równania różniczkowego cząstkowego $F_4=0$ są właśnie krzywymi, przedstawionemi przez układ:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

w przypuszczeniu, że (x, y, z) grają przytem rolę parametrów. Stąd możemy wyprowadzić następującą ważną własność charakterystyk równań różniczkowych rzędu 1-go:

Krzywe danego kompleksu są charakterystykami i pewnego równania różniczkowego cząstkowego rzędu 1-go, jeżeli w kongruencji dowolnej, należącej do tego kompleksu, każda krzywa²⁾ dotyka powierzchni ogniskowej tylko w jednym punkcie. Wyłącza się stąd powierzchnia ogniskowa, która by była wspólna wszystkim kongruencyom kompleksu.

$$F_1 = Ax + By + Cz + D = 0, \quad F_2 = Ax + By + Cz + D = 0.$$

spółczynniki $A, B, \dots, A \dots$ są funkcjami zmiennych X, Y, Z .

Różniczkując powyższe równania otrzymamy zależności, zawierające zarówno wielkości (x, y, z) jak i (dX, dY, dZ) w stopniu 1-ym, dla tego też rezultat rugowania (x, y, z) z powyższych czterech równań liniowych, wyrażony w formie wyznacznika, będzie zawierał wielkości (dX, dY, dZ) tylko w 1-ej potęgę w 2-ich wierszach. Stąd zaś wynika, że i równania $F_3=0$ i $F_4=0$ będą drugiego stopnia. Przyp. tłóm.

¹⁾ X, Y, Z oznaczają tu dowolne funkcje zmiennych (x, y, z) .

²⁾ Każda krzywa takiego kongruencyi przecina tylko jedną nieskończoność bliską krzywą. Przyp. aut.

Prawdziwość powyższego twierdzenia można okazać zważywszy, iż stożki elementarne kompleksu (c) przechodzą na płaszczyznę i dla tego przez dany punkt powierzchni całkowitej przechodzi tylko jeden kierunek kompleksu. Temu ostatniemu odpowiada w drugim układzie również jeden kierunek kompleksu (§ 4, 14), a zatem i jeden punkt wspólny krzywej C z powierzchnią ogniskową. Przyp. tłóm.

Jeżeli stożki elementarne obu kompleksów (c i C) przechodzą na płaskie pęki promieni, natenczas ∞^3 krzywych kompleksu każdego układu leży na ∞^1 powierzchniach; znaczy to, że równania:

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \quad F_3(X, Y, Z, dX, dY, dZ) = 0,$$

będące pierwszego stopnia względem różniczek, są całkowalne ¹⁾. Rezultat ten, jak mam zamiar okazać przy innej sposobności, jest ważnym przy określeniu ogólnych przekształceń jednoznacznych.

b) Wszystkie przekształcenia, dla których styczność jest własnością niezmienniczą, posiadają własność charakterystyczną przeprowadzania równania różniczkowego cząstkowego 2-go rzędu Monge-Ampère'a:

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0,$$

na równanie tegoż samego typu. Jeżeli przytem dane równanie posiada t. zw. całkę pośrednią, to samo się tyczy i nowego równania ²⁾ (porów. rozprawę Boole'a, Crelle-Borchardt, Journal, tom 61).

c) W ogóle odpowiada w naszych przekształceniach danemu elementowi skończona liczba elementów drugiego układu. Istnieją jednakże wyjątkowe elementy, odtwarzające się jako nieograniczona liczba elementów drugiego układu. Nie zagłębiając się w szczegóły tej ważnej teorii, zauważę tylko, że jeżeli dany element zawiera nieskończoną liczbę kierunków kompleksu, to jest on wówczas właśnie wyjątkowym elementem. Polega to na tem, że element przekształca się w ogóle na tyle nowych elementów, ile się w nim zawiera elementarnych kierunków kompleksu (§ 4, 13 i 14). Jeżeli elementarne stożki kompleksu rozpadają się na płaskie pęki promieni, to otrzymujemy w tym układzie ∞^3 wyjątkowych elementów, które odpowiadają ∞^4 elementom, obwodzącym w układzie R wszystkie stożki elementarne kompleksu.

¹⁾ Wiadomo z teorii równania Pfaffa ($Xdx + Ydy + Zdz = 0$) por. Lie, Geometrie der Berührungstransf., str. 193—206, że równaniu temu odpowiadają w ogóle (t. j. jeżeli nie jest ono całkowalne), dwa równania różniczkowe cząstkowe, np. $p = \varphi_1(x, y, z)$, $q = \varphi_2(x, y, z)$. Równaniom tym czynią załość tylko wtedy kongruencye ∞^3 elementów powierzchniowych, jeżeli równanie Pfaffa jest całkowalne, t. j. jeżeli wszystkie ∞^3 krzywe kompleksu leżą na układzie ∞^1 powierzchni.

Przyp. tłum.

²⁾ r, s, t oznaczają tu, jak i poprzednio, pochodne $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, A, B, C, D, E są funkcjami zmiennych (x, y, z) oraz pochodnych (p, q) . Dowodzenie powyższego twierdzenia zasadniczego w teorii równań Monge-Ampère'a; porów. Goursat, „Leçons sur l'intégration des équations du 2-e ordre”. Paryż 1896, str. 51—52. Przyp. tłum.

ROZDZIAŁ II.

Geometria prostoliniowa Plückera¹⁾ może być przekształcona na geometrię kulistą.

W rozdziale niniejszym rozważam pewien szczególny przypadek poprzednio podanej teorii ogólnej, ten mianowicie, kiedy oba, odniesione do siebie kompleksy są kompleksami liniowymi. Jednak bliższemu badaniu poddaję tylko pewien przypadek zniekształcenia. Mniemam przytem, że byłoby interesującym zbadać zarówno przypadek ogólny, jakoteż wszystkie możliwe przypadki specjalne.

§ 7.

Oba kompleksy krzywych są kompleksami liniowymi.

21. Przypuśćmy, że oba równania, określające wzajemność, są linio-
wymi względem (x, y, z) i (X, Y, Z) :

$$\begin{aligned} X(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + Y(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) \\ + Z(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) + (a_4x + b_4y + c_4z + d_4) &= 0; \\ X(\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1) + Y(\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2) \\ + Z(\alpha_3x + \beta_3y + \gamma_3z + \delta_3) + (\alpha_4x + \beta_4y + \gamma_4z + \delta_4) &= 0; \end{aligned}$$

w tym przypadku punkty sprzężone z punktem danym tworzą w drugim układzie linię prostą.

Oba kompleksy krzywych są kompleksami Plückerowskimi linii prostych, w skutek czego równania (1) wyznaczają odpowiedniość między r i R , posiadającą następujące własności:

a) W każdym układzie przestrzennym znajduje się kompleks liniowy, którego proste odtwarzają się jako punkty drugiego układu.

¹⁾ Z teorii kompleksów następujące prace będy uważałam jako znane czytelnikowi: Plücker: Neue Geometrie des Raumes, 1868—69; Klein, „Zur Theorie der Complexe”, Math. Ann. II, 2, P. Battaglini'ego prac, tyczących się kompleksów prostych linii nie mogą cytować, gdyż nie są mi znane. Przyp. aut.

b) Jeżeli dany punkt opisuje prostą kompleksu, to odpowiadająca mu prosta obraca się około punktu, w którym się otwiera pierwsza prosta.

c) Krzywe, których styczne należą odpowiednio do obu kompleksów, układają się parami wzajemnie, t. j. tak, że stycznymi do jednej z nich odpowiadają punkty drugiej.

d) Powierzchni f odpowiada pewna powierzchnia F w sposób podwójny: Najprzód jest F powierzchnią ogniskową kongruencji, której proste odpowiadają punktom powierzchni f . Z drugiej strony punkty powierzchni F są obrazami wszystkich stycznych do f , należących do danego kompleksu prostych ¹⁾.

e) Na wyżej wymienionych powierzchniach krzywe układają się parami jako sprzężone. Punkty takiej krzywej przekształcają się na tworzące powierzchni prostoliniowej, zawierającej krzywą sprzężoną, i stycznej wzdłuż niej do powierzchni f lub F .

f) Krzywej, której styczne należą do danego kompleksu, odpowiada jako sprzężona inna krzywa, obwiedziona przez proste kompleksu; jestto właśnie krzywa, oznaczona przez nas jako wzajemna względem danej.

Twierdzenia e) można dowieść, opierając się na tem, że linia kompleksu i leżący na niej punkt otwarzają się jako punkt i przechodząca przez ten punkt linia kompleksu.

22. Każde z równań (1) określa odpowiedniość homograficzną punktów i płaszczyzn obu układów przestrzennych, w skutek tego zaś można określić którykolwiek z naszych kompleksów, jako ogół prostych, otrzymanych z przecięcia należących do siebie homograficznie płaszczyzn, lub też prostych, łączących należące do siebie punkty. Określony w ten sposób kompleks prostych 2-go stopnia jest, jak wynika z badań Reye'go ²⁾ identyczny z układem prostych, który Binet pierwszy określił, jako ogół statycznych osi obrotu ciała sztywnego ³⁾, a którym zajmowali się późniejsi matematycy, szczególnie Chasles i Reye.

¹⁾ Że wzajemność nie jest tu zupełną, wynika stąd, iż powierzchnia F jest zupełną powierzchnią ogniskową odpowiedniej kongruencji, gdy tymczasem linie drugiej kongruencji obwodzi, prócz f , jeszcze inną powierzchnię. Przyp. aut.

²⁾ Reye, *Geometrie d. Lage*, II część, 1888, str. 116–172.

Przyp. aut.

³⁾ T. j. głównych osi bezwładności ciała sztywnego; patrz Binet: *Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps* s. Jour. de l'Ec. Polyt., 16 Cah. Przyp. tłum.

Jeżeli nadamy stałym równania (1) wartości szczególne, to kompleksy mogą zająć względem siebie położenie szczególne, (np. mogą zlać się w jeden, który to przypadek rozważa Reye w swoim dziele „*Geometrie der Lage*“, podając zbadane powyżej odwzorowanie kompleksów, oraz twierdzenia (b) ¹⁾, lub też mogą się same stać kompleksami szczególnymi. Nie rozważając tu szczegółowo wszystkich możliwych przypadków, zaznaczą tylko następujące dwa najważniejsze ²⁾:

1) Oba kompleksy mogą być specjalnymi kompleksami liniowymi. Przypadek ten prowadzi do znanego przekształcenia Ampère'a, polegającego na tem, że się wprowadza wszystkie proste, przecinające daną prostą, zamiast punktu lub płaszczyzny jako element przestrzenny. Równania, wyrażające przekształcenie Ampère'a:

$$X = p, \quad Y + y = 0, \quad Z + z + px = 0,$$

dają pomiędzy wielkościami (x, y, z, X, Y, Z) zależności:

$$Y + y = 0, \quad Z + z + Xx = 0,$$

które rzeczywiście przedstawiają postać szczególną i symetryczną równań (1).

2) Kompleks pierwszy może składać się z ogółu prostych, przecinających stożkową, mającą stałe położenie w przestrzeni, wtedy drugi jest liniowym ogólnym ³⁾. Ostatnie przekształcenie poddam szczegółowej analizie, przyjmując przytem, że stożkowa zasadnicza jest kołem urojonym w nieskończoności.

23. Wiemy, że oba kompleksy krzywych są kompleksami prostych, jeżeli równania wzajemności są liniowymi względem obu układów zmienionych (x, y, z, X, Y, Z) , i możemy sobie postawić pytanie, czy ten dostateczny warunek jest również i koniecznym ⁴⁾. Na pytanie to należy, jak tego

¹⁾ Reye: *Geometrie d. Lage*. 3-te Abth. 1892, str. 12.

Przyp. aut.

²⁾ Repräsentation des Imaginären. Acad. v. Chrystyanii, luty i sierpień 1869. Przestrzenne pokrewieństwo, rozważane w §§ 17, 25, 27, 28, 29 tej rozprawy, jest identyczne z naszym terazniejszym. W § 25 rozważam pierwszy z obu szczególnych wypadków.

Przyp. aut.

³⁾ Nöther podał już w „*Göttinger Nachrichten*“ 1896 (Zur Theorie der algebraischen Functionen) to odwzorowanie, które ja zresztą samodzielnie znalazłem. Jednak w wyżej wspomnianej nocie nie jest zaznaczone zasadniczo, według nas, pojmowanie obu układów przestrzennych, jako zawierających kompleksy, których linie otwarzają się jako punkty drugiego układu. Prócz tego zauważę, że pomyślnie oparcia zależności elementów powierzchni na odwzorowaniu powierzchni również nigdzie nie spotykałem. Przyp. aut.

⁴⁾ T. j. czy inne ogólniejsze równania nie mogą również przedstawiać odwzorowania 2-ch kompleksów prostoliniowych. Przyp. tłum.

zamierzamy dowieść, odpowiedzieć twierdząco, jeżeli tylko dodamy warunek, by odpowiedniość była jednoznaczna.

Dodamy jeszcze, że pytanie to, aczkolwiek przedstawia interes samodzielny, nie ma znaczenia w odniesieniu do teorii niżej podanych.

Jeżeli jeden z kompleksów jest prostoliniowym, to stożki elementarne drugiego kompleksu, który w ogóle jest kompleksem krzywych, muszą się rozłożyć na pewną liczbę stożków stopnia drugiego. Dowód tego twierdzenia polega na tem, że proste kongruencyi ogólnej prostych są styczne do powierzchni ogniskowej tylko w dwóch punktach ¹⁾. Jeżeli w szczególności jeden z kompleksów składa się ze stycznych do pewnej powierzchni, to stożki elementarne drugiego kompleksu przechodzą na płaskie pęki promieni ²⁾. Jeżeli teraz postawimy warunek, by odwzorowanie było jednoznaczne, to możliwe są tylko trzy następujące przypadki: 1) oba kompleksy prostych są kompleksami ogólnymi stopnia 2-go; 2) jeden z kompleksów jest kompleksem specjalnym; 3) oba kompleksy są liniowymi specjalnymi ³⁾.

Zaznaczymy tu, iż można stąd wyprowadzić, że równania (1) określają najogólniejsze jednoznaczne wzajemne odwzorowanie dwóch kompleksów liniowych, przyczem je-

dnak niezupełnie zostanie uwzględniony przypadek, kiedy oba kompleksy prostych są specjalnymi ¹⁾.

Jeżeli oba kompleksy są kompleksami ogólnymi stopnia 2-go, to odpowiednie powierzchnie punktów osobliwych nie mogą być, jak łatwo widzieć, powierzchniami krzyżowymi. Z każdego bowiem punktu takiej powierzchni wychodzą dwa płaskie pęki promieni, których proste odzwierciedlają się jako punkty jednej tylko prostej. Przytem wszystkie proste jednego z pęków przekształcają się na jeden i ten sam punkt. Ogół zaś prostych, nie mających samodzielnego odzworowania, nie może być kompleksem, a tylko składa się z pewnej liczby kongruencyj. Ponieważ zaś wszystkie płaskie pęki promieni, których wierzchołki leżą na danej powierzchni krzywej, koniecznie tworzą kompleks, zatem powierzchnia punktów osobliwych musi się składać z płaszczyzn i stąd można wywnioskować, że oba kompleksy stopnia drugiego należą do tych, które najprzód rozważał B i n e t.

Jeżeli kompleks specjalny stopnia 2-go i ogólny liniowy są wzajemnie do siebie odniesione, to będą możliwe a priori dwa przypadki: 1° Proste kompleksu stopnia 2-go mogą przecinać stożkową, lub też obwodzić powierzchnię rzędu 2-go. Rozważania, których nie przytaczam, doprowadziły mnie do wniosku, że tylko pierwszy przypadek jest możliwy ²⁾.

¹⁾ W istocie, weźmy jakąkolwiek powierzchnię f , należącą do 1-go układu i jedną z prostych (l) odpowiadającej jej kongruencji. Oba punkty styczności (f, l) określają dwa elementy liniowe, odtwarzające się w drugim układzie również jako dwa elementy liniowe. Te ostatnie przechodzą przez punkt powierzchni F , odpowiadający rozważanej prostej (l) i leżą w płaszczyźnie stycznej do F . Ponieważ w każdej innej płaszczyźnie leżą również dwa elementy, przechodzące przez ten punkt, zatem stożek elementarny jest rzędu 2-go.

²⁾ Rozumując w ten sam sposób, co i poprzednio, otrzymamy na prostej (l) kongruencji tylko jeden element liniowy styczny do przekształconej powierzchni; drugi zaś element należy do powierzchni, określającej kompleks. W drugim układzie mamy również tylko jeden element liniowy, skąd wynika, że stożki elementarne drugiego układu są stopnia 1-go. W podobny sposób wnosiśmy, że kompleksowi prostych, przecinających daną stożkową odpowiada w drugim układzie kompleks liniowy, t. j. taki, w którym stożki elementarne przechodzą na płaskie pęki promieni (por. końcowy ustęp N° 22).

³⁾ Dwa następujące przypadki są wykluczone: 1) oba kompleksy prostych są liniowymi ogólnymi i 2) jeden kompleks jest ogólnym liniowym, drugi specjalnym liniowym. W istocie, krzywe całkowite kompleksów powinny w obu układach, według N° 20, a, leżeć na powierzchniach, co nie ma miejsca dla ogólnego kompleksu liniowego, gdyż jego równanie różniczkowe, jak łatwo okazać (L i e, Geom. d. Berührungstransf., str. 210), nie jest całkowalne. Przeciwnie, w kompleksie specjalnym liniowym powierzchnie powyższe są płaszczyznami, tworzącymi pęk płaski, której osią jest oś kompleksu.

Przyp. tło.

¹⁾ Ustanowimy odpowiedniość jednoznaczna pomiędzy płaszczyznami dwóch liniowych pęków płaszczyzn. Odnieśmy następujące proste każdej z tych płaszczyzn do punktów odpowiadającej płaszczyzny. Otrzymamy w ten sposób odwzorowanie wzajemne dwóch specjalnych kompleksów liniowych; będzie ono ogólniejsze niż to, które wynika z równań A m p e r e'a.

Przyp. aut.

²⁾ Niemożliwość drugiego przypadku można okazać w następujący sposób. Punktem powierzchni f , której styczne tworzą kompleks w 1-ym układzie, odpowiada w drugim pewna kongruencya prostych. Ponieważ dany punkt (A) powierzchni f , połączony z sąsiednimi punktami, daje tyleż rozmaitych prostych, zatem prosta (a) drugiego układu, odpowiadająca A , winna przecinać całą sąsiednią prostych kongruencyi. W ogóle jednak dana prosta kongruencyi przecina tylko dwie nieskończenie bliskie proste, i wyjątek stanowią kongruencye, których powierzchnia ogniskowa przechodzi na krzywą linię (F) . Okażemy jeszcze, że każda prosta (l) kompleksu układu 2-go przecina tę krzywą. W istocie, niech punkt (L) , odpowiadający tej prostej, leży na linii (m) kompleksu 1-go; na tej ostatniej leżą dwa nieskończenie bliskie punkty (A_1, A_2) powierzchni f . Odpowiadające im proste układu 2-go a_1, a_2 muszą się przecinać na (F) , gdyż w przeciwnym wypadku kongruencya, do której należą te proste, musiałaby, prócz (F) , mieć jeszcze inną powierzchnię, lub krzywą ogniskową — co jest przeciwne założeniu.

Z uwagi, że kompleks układu 2-g, jest liniowy, określają proste (a_1, a_2) płaski pęk promieni o wierzchołku, leżącym na F ; przytem punktowi (L) prostej, zawierającej (A_1, A_2) odpowiada prosta (l) tego pęku, przecinająca oczywiście krzywą F w wierzchołku pęku wynika więc, że kompleks w układzie 2-im jest specjalnym kompleksem, co przeczy założeniu.

Przyp. tło.

§ 8

Wzajemność między kompleksem liniowym i ogółem prostych, przecinających koło urojone zerowe w nieskończoności.

24. Przechodzimy teraz do równań ¹⁾:

$$(1) \quad -Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z,$$

które, jak łatwo widzieć, są stopnia pierwszego względem (x, y, z) i (X, Y, Z) , zatem wyznaczają zależność między dwoma kompleksami prostych. Najprzód określamy równanie tych kompleksów w współrzędnych Plückera.

Plücker pisze równania prostej w postaci:

$$rz = x - \rho, \quad sz = y - \sigma,$$

i przyjmuje wielkości $r, s, \rho, \sigma, (r\sigma - s\rho)$, jak współrzędne prostej. W ten sposób równania (1), jeżeli w nich uważać będziemy (X, Y, Z) jako parametry, przedstawiają układ prostych, których współrzędne czynią zadość następującym zależnościom:

$$r = -Z, \quad \rho = X + iY, \quad s = X - iY, \quad \sigma = Z.$$

Z tych ostatnich zaś wynika:

$$(2) \quad r + \sigma = 0 \quad ^2).$$

¹⁾ W „Geom. der Berührstransf.“ str. 445 wprowadził Lie trochę odmienne oznaczenia; równania (1) mają kształt

$$(1) \quad X + iY + xZ + z = 0, \quad x(X - iY) - Z - y = 0.$$

i przechodzą na układ (1) za pomocą podstawienia $-z, -y, -x$, na miejsce x, y, z .

Przyp. tłóm.

²⁾ W oznaczeniu str. 445 kompleks liniowy (2), zwany także układem zerowym (Nullsystem), wyznaczony jest przez równanie:

$$-r\rho + s\sigma + 1 = 0 \quad (\text{t.j. } \eta + 1 = 0).$$

Można go określić jako ogół normalnych do torów punktów układu niezmiennego, obdarzonego ruchem śrubowym (skrętem) względem osi x (resp. z w oznaczeniu str. 445). Równanie różniczkowe tego kompleksu ma kształt:

$$zdy - ydz - dx = 0.$$

Normalne, odpowiadające danemu punktowi układu, tworzą płaski pęk promieni. Te z nich, które odpowiadają nieskończonemu odległemu punktowi układu, są prostopadłe do osi X . Wziąwszy więc nieskończenie odległy punkt płaszczyzny (xy) , nie leżący na osi y , znajdziemy, że odpowiadająca mu prosta, leżąca w tej płaszczyźnie, jest nieskończonemu odległą prostą.

Przyp. tłóm.

Kompleks prostych w układzie r jest zatem liniowym i do tego ogólnym kompleksem, zawierającym nieskończonemu odległą prostą ¹⁾ płaszczyzny xy .

Ażeby wyznaczyć kompleks układu R , należy zamienić równania (1) na równoznaczne:

$$\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) Z = X - \frac{1}{2} \left[x + \frac{y}{z} \right],$$

$$\frac{1}{2i} \left(z + \frac{1}{z} \right) Z = Y - \frac{1}{2i} \left[x - \frac{y}{z} \right],$$

Te ostatnie, porównane z równaniami ogólnymi prostej:

$$(3) \quad RZ = X - P, \quad SZ = Y - \Sigma,$$

dają następujące zależności:

$$R = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad P = \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{z} \right),$$

$$S = \frac{1}{2i} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \Sigma = \frac{1}{2i} \left(x - \frac{y}{z} \right),$$

i w ten sposób znajdujemy równanie powyższego kompleksu:

$$(4) \quad R^2 + S^2 + 1 = 0.$$

Ponieważ zaś z równań (3) wynika:

$$R = \frac{dX}{dZ}, \quad S = \frac{dY}{dZ},$$

można zatem równaniu (4) nadać kształt:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Kompleks prostych w układzie R jest zatem utworzony przez proste urojone o długości równej zeru ²⁾.

¹⁾ Prosta powyższa występuje przy odwzorowaniu jako twór zasadniczy. Wskutek tego nazywam ją czasem prostą zasadniczą (Fundamentalgerade) układu r . Przyp. aut.

Punkty nieskończonemu odległego koła zerowego odtwarzają się jako nieskończonemu odległe proste kompleksu, równoległe do tej prostej. Przyp. tłóm.

²⁾ Posiłkując się wygodną terminologią francuską, nazywam każdą prostą, przecinającą koło urojone w nieskończoności, prostą o długości zerowej. Przyp. aut.

Równania (1) odnoszą w taki sposób oba układy przestrzenne do siebie, że punktom układu r odpowiadają proste urojone o długości równej zeru, gdy tymczasem punkty układu przestrzennego R odtwarzają się jako proste kompleksu liniowego $r + \sigma = 0$.

Należy jeszcze zaznaczyć, że jeżeli punkt opisuje prostą kompleksu $r + \sigma = 0$, wtedy odpowiednia linia opisuje nieskończenie małą kulę, czyli kulę - punkt.

25. Według ogólnej teorii krzywych wzajemnych (§ 4, 12) można, za pomocą różniczkowania i rugowania, wyznaczyć krzywą, obwiedzioną przez proste jednego kompleksu, jeżeli dana jest krzywa, której styczne należą do drugiego kompleksu. Ponieważ zaś Lagrange ¹⁾ znalazł ogólne równanie wszystkich krzywych, których styczne przecinają koło urojone w nieskończoności, jest więc możliwe napisać ogólne równania krzywych, których styczne należą do kompleksu liniowego ²⁾.

Ażby nie oddalać się od naszego celu, nie będziemy zajmowali się bliżej prostymi związkami geometrycznymi pomiędzy krzywymi obu kompleksów ³⁾.

Określone przez równania (1) odwzorowanie powierzchni obu układów posiada osobliwe własności, które pokrótce podam, odsyłając zresztą do wywodów ogólnych § 4-go.

Jeżeli powierzchnia f ma ogólne położenie w r , to styczne jej, należące do kompleksu liniowego, obwiodą prócz tej drugiej powierzchnię φ ⁴⁾. Oznaczmy przez σ_r i σ_φ krzywe leżące na tych powierzchniach i mające jako styczne — proste kompleksu. Wzajemnie odpowiednie krzywe Σ_φ i Σ_r tworzą jedną i tą samą powierzchnię F , będącą zarazem odwzorowaniem powierzchni f , również jak i φ ⁵⁾.

¹⁾ Równania najogólniejszej krzywej tego rodzaju. t.j. t. zw. krzywej minimalnej — według późniejszej terminologii Lie'go; patrz Geom. d. Berührrstranf., str. 433.

Przyp. tłum.

²⁾ Z twierdzenia, podanego na str. 206 Geom. d. Berührrstranf., wynika również sposób wyznaczenia wszystkich krzywych całkowych liniowego kompleksu. Dość jest mianowicie mieć równanie ω^2 krzywych całkowych (w danym razie można wziąć ω^2 prostych kompleksu), by wyznaczyć równania pozostałych (patrz to samo dzieło str. 234—238 równania 61, 62).

Przyp. tłum.

³⁾ Zauważ tu jeszcze, że danej krzywej odpowiada styczna zwrotu (stationäre Tangente) w drugim układzie. W ogóle występują styczne zwrotu jako tworzy osobliwe zwyczajne (regelmässige), jeżeli przytem uważamy krzywe, jako utwory liniowe, t.j. jako tworzy, określone przez proste danego kompleksu.

Przyp. aut.

⁴⁾ Styczne te tworzą kongruencję której powierzchnia ogniskowa składa się z dwóch części (f i φ), sprzężonych wzajemnie względem danego kompleksu. (Geom. d. Berührrstranf., str. 453—457.

Przyp. tłum.

⁵⁾ Dowód tego twierdzenia patrz Geom. d. Berührrstranf. str. 457—459. Przyp. tłum.

Jeżeli przeciwnie weźmiemy dowolną powierzchnię $\mathcal{D}$ układu R , to linie kompleksu styczne do $\mathcal{D}$ nie obwiodą żadnej innej powierzchni ¹⁾. Krzywe Σ obwiedzione przez linie kompleksu naszej powierzchni, tworzą pasmo nieprzywiedlne, pokrywające powierzchnię $\mathcal{D}$ podwójnie. Krzywe wzajemne σ tworzą odpowiadającą powierzchnię, która nie zawiera żadnych innych krzywych, posiadających jako styczne — proste liniowego kompleksu.

Nakoniec muszę zaznaczyć, że nasze odwzorowanie przeprowadza następujące zagadnienia jedno na drugie:

Na powierzchni ogniskowej kongruencji, której proste należą do kompleksu liniowego, oznaczyć krawędzie zwrotu powierzchni rozwijalnej — i — Na danej powierzchni znaleźć linie geodezyjne, których długość jest równa zeru ²⁾.

26. W następstwie będę się posługiwał często obu następującymi twierdzeniami:

a) Powierzchnia n -tego rzędu, zawierająca nieskończenie odległe koło urojone jako linię p -krotną, jest odwzorowaniem kongruencji, której rząd i klasa są równa $n - p$.

Albowiem prosta urojona o długości równej zeru przecina powierzchnię F w $n - p$ punktach, leżących w skończoności i wskutek tego ta sama ilość prostych powyższej kongruencji przechodzi przez każdy punkt układu r . Wiadomo zaś, że w każdej kongruencji, należącej do kompleksu liniowego, klasa jest równa rządowi ³⁾.

¹⁾ Pochodzi to stąd, że kompleks prostych minimalnych jest kompleksem specjalnym, t.j. że w dowolnej kongruencji, należącym do niego, dana prosta przecina tylko jedną prostą w punkcie, leżącym poza kołem zerowym. Druga część powierzchni ogniskowej kongruencji przechodzi w tym przypadku właśnie na koło zerowe.

Przyp. tłum.

²⁾ Krzywym kompleksu liniowego w układzie (r) odpowiadają krzywe minimalne, których każdy element czyni załość równaniu $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$, t.j. posiada długość równą zeru. Wiadomo przytem, że płaszczyzna ściśle styczna linii minimalnej jest styczną do koła zerowego, jest zatem prostopadłą do stycznej do samej krzywej minimalnej, czyli inaczej przechodzi przez normalną do powierzchni, na której leży ta krzywa. Na tej podstawie nazywa Lie powyższe krzywe geodezyjnymi.

Przyp. tłum.

³⁾ Przez każdy punkt przestrzeni przechodzi w ogóle stożek n -go rzędu, należący do kompleksu n -go stopnia, i w każdej płaszczyźnie leży krzywa n -ej klasy, obwiedzona przez proste kompleksu. Ponieważ kongruencję prostych można uważać jako przecięcie dwóch kompleksów, więc rząd jej będzie równy ilości wspólnych tworzących dwóch elementów stożków (t.j. n, n_1); klasa zaś — ilości wspólnych, stycznych do krzywych kompleksów (t.j. również n, n_1).

Przyp. tłum.

b) Krzywa (C) n -tego rzędu, przecinająca koło nrojone (w nieskończoności) w (p) punktach, odtwarza się jako powierzchnia liniowa (c) rzędu $(2n-p)$.

Prosta kompleksu $r+\sigma=0$ przecina powyższą powierzchnię liniową w takiej samej liczbie punktów, w jakiej przecinają się krzywa C i kula-punkt ¹⁾, przyczem jednak nie należy liczyć nieskończenie odległych punktów.

§ 9.

Geometria prostoliniowa Plückera może być przekształcona na geometrię kulistą,

26. W tym § uzasadnić zamierzam podstawową zależność między Plückerowską geometrią liniową i geometrią, której elementem jest kula.

Równania (1) ostatniego § przekształcają proste układu r na kule drugiego układu i to przekształcenie może być pojmowane w podwójny sposób. Z jednej strony przekształcają się te proste liniowego kompleksu $r+\sigma=0$, które przecinają dowolną prostą l_1 i odpowiadającą jej wzajemnie względem kompleksu prostą l_2 [według jednego z poprzednich twierdzeń (N^0 26, a)] ²⁾ na punkty kuli; z drugiej strony zaś punkty prostych l_1 i l_2 przechodzą na prostoliniowe tworzące tej kuli (2b, b). Następujące analityczne rozważania prowadzą do zależności pomiędzy współrzędnymi prostych l_1 i l_2 , oraz współrzędnymi środka (X', Y', Z) i promieniem (H') odpowiadającej im kuli, Niech:

$$xz = x - q, \quad sz = y - \sigma,$$

oznaczają równania prostej (l_1) lub (l_2); przypomniawszy sobie, że proste kompleksu $r+\sigma=0$ przedstawiają się w sposób następujący:

$$(1) \quad -Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z;$$

widzimy, że należy wyrugować (x, y, z) z powyższych czterech równań, aby prostą (1) poddać warunkowi przecięcia się z prostą l_1 . W ten sposób znajdziemy, że współrzędne (X, Y, Z) naszych prostych kompleksu, lub też, co na

¹⁾ Krzywa n -go rzędu i powierzchnia 2-go n przecinają się w $2n$ punktach. Punkt układu R należy uważać za kulę, gdyż przedstawia on przecięcie ∞^2 prostych minimalnych, odpowiadających punktom powyższej prostej. Przyp. tłóm.

²⁾ Kula jest powierzchnią rzędu 2 go, zawierającą koło zerowe w nieskończoności jako linię pojedynczą, zatem $n = p = 1$. Otrzymujemy więc w układzie (r) kongruencję rzędu 1-go i klasy, której wszystkie proste, jak wiadomo, przecinają dwie proste stałe (l_1 i l_2). Przyp. tłóm.

jedno wychodzi, współrzędne (X, Y, Z) odwzorowujących je punktów, czynią zadość równaniu:

$$[X - (\overline{q+s})]^2 + [Y - i(s-q)]^2 + (Z - \overline{\sigma-r})^2 = (\sigma+r)^2.$$

Tak więc twierdzenie nasze jest analitycznie dowiedzione, przytem otrzymujemy dla środka kuli i jej promienia następujące wzory:

$$(2) \quad X' = q + s; \quad iY' = q - s; \quad Z' = \sigma - r; \quad \pm H' = \sigma + u,$$

lub też równoznaczne z niemi:

$$(3) \quad q = \frac{1}{2} (X' + iY'); \quad s = \frac{1}{2} (X' - iY'); \quad \sigma = \frac{1}{2} (Z' \pm H');$$

$$r = -\frac{1}{2} (Z' \mp H'),$$

w których zresztą skazniki można opuścić, gdyż w naszym pojmowaniu punkt układu R gra rolę kuli, której promień jest nieskończenie mały.

Formuły (2) i (3) ¹⁾ wykazują, że dana prosta układu r przechodzi na zupełnie określoną kulę, przeciwnie dana kula $[X, Y, Z, H^2]$ odtwarza się za pomocą dwóch prostych:

$$[X, Y, Z, +H], \quad [X, Y, Z, -H],$$

będących biegunowemi wzajemnemi względem kompleksu

$$\pm H = r + \sigma = 0.$$

Równania te wyznaczają oczywiście, jeżeli H przyrównamy do zera, zależność między kulami-punktami układu R i prostami kompleksu $H=0$.

Plaszczyzna, t. j. kula o promieniu nieskończenie wielkim, przekształca się, według równań (2), na dwie proste l_1 i l_2 , przecinające prostą nieskończenie odległą płaszczyzny (x, y) ²⁾. Przytem, według poprzedniego, punkty prostych l_1 i l_2 są obrazem wszystkich prostych naszej płaszczyzny, prze-

¹⁾ Z tych formuł łącznie z analitycznie dowiedzionym twierdzeniem poprzedniego numeru można jak zauważył Klein w rozmowie ze mną, bezpośrednio wyprowadzić zależność między geometrią prostych i kul. Przyp. aut.

²⁾ Jeżeli $H = r + \sigma = \infty$, to są możliwe dwa przypadki: 1) $r = \infty$, wtedy z równań prostej wynika $z = 0$; 2) $\sigma = \infty$, wtedy $z = \text{const}$; otrzymujemy zatem zawsze proste równoległe do płaszczyzny (x, y). Przyp. tłóm.

chodzących przez jej punkty urojone kołowe. W szczególności odtwarza się płaszczyzna styczna do koła urojonego w nieskończoności, jako równoległa do płaszczyzny (x, y) prosta kompleksu ¹⁾.

28. Dwie proste przecinające się (liż) odwzorowują się jako kule styczne jedna do drugiej ²⁾.

Ponieważ biegunowe wzajemne z danymi prostymi względem kompleksu $H=0$ przecinają się również, zatem odpowiednie kule mają dwie proste wspólne, należące do dwóch rozmaitych szeregów jej tworzących. Wiadomo jednak, że jeżeli krzywa przecięcia dwóch powierzchni rzędu 2-go rozpada się na stożkową i parę prostych, to powierzchnie owe styczne są do siebie w trzech punktach (podwójnych punktach krzywej przecięcia). Obie kule mają zatem trzy punkty styczności, z których dwa nie wchodzą w rachubę jako nieskończenie odległe i urojone. Analitycznie można dowieść tego twierdzenia w sposób następujący:

Warunek przecięcia się obu prostych:

$$\begin{aligned} r_1 z &= x - \varrho_1, & r_2 z &= y - \varrho_2, \\ s_1 z &= y - \sigma_1, & s_2 z &= z - \sigma_2, \end{aligned}$$

wyraża się równaniem:

$$(r_1 - r_2)(\sigma_1 - \sigma_2) - (s_1 - s_2)(\varrho_1 - \varrho_2) = 0,$$

które przez użycie wzorów (3) przechodzi na następujące:

$$(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 = (H_1 \pm H_2)^2,$$

t. j. na warunek styczności obu kul, będących obrazem danych prostych.

Dwie przecinające się kule przekształcają się na dwie pary prostych, których położenie wzajemne jest tego rodzaju, że każda prosta jednej pary przecina prostą drugiej.

§ 10.

Rozmaite odwzorowania.

29. Rozważmy proste pęku płaskiego promieni w układzie r , następnie odpowiadające im względem $H=0$ biegunowe, które będą tworzyły również płaski pęk promieni, wreszcie kule układu R , będące obrazem tych prostych. Łatwo zauważyć, że wszystkie te kule zawierają dwie wspólne proste, te mianowicie, które odpowiadają wierzchołkom obu pęków; wynika stąd, że kule powyższe są do siebie styczne w punkcie przecięcia tych obu prostych. Proste płaskiego pęku promieni odtwarzają się jako ogół kul stycznych do siebie we wspólnym punkcie. Wynika stąd, że dana powierzchnia f i wszystkie jej styczne w danym punkcie odtwarzają się jako pewna powierzchnia i ogół kul, stycznych do niej w pewnym punkcie (§ 5, 15). Można to wyrazić najprościej w następującym twierdzeniu:

Wszystkie elementy powierzchniowe układu r , zawierające dwa przyległe punkty jednej i tej samej prostej, odtwarzają się jako elementy kuli, odpowiadające tej prostej.

Prosta, leżąca na powierzchni f , t. j. styczna do tej ostatniej w nieskończenie wielu punktach, przechodzi na kulę, styczną do odpowiedniej powierzchni w nieskończenie wielu punktach, t. j. według pewnej krzywej. Stąd wynika, że powierzchnia skośna (prostoliniowa) przechodzi na obwiednię kul (powierzchnię rurową). Powierzchnia rozwijalna przekształca się na powłóczącą ∞^1 kul, podległych warunkowi, by dwie sąsiednie z nich były do siebie styczne. Otrzymujemy w ten sposób rozważane przez Monge'a powierzchnie urojone prostoliniowe, w których oba układy linii krzywiznowych zredukowały się do tworzących prostoliniowych. Z uwagi że powierzchnia skośna przechodzi na obwiednię kul, wynika, że powierzchnia stopnia 2-go, zawierająca, jak wiadomo dwa układy prostych, przekształca się na powierzchnię, którą można rozważać w dwojaki sposób jako obwiednię kul; w ten sposób mianowicie otrzymujemy najogólniejszą powierzchnię, mającą tę własność, t. j. cyklidę Dupina ¹⁾.

30. Z jednego z poprzedzających twierdzeń (§ 9 N° 28) wynika, że wszystkie proste, przecinające prostą daną, odtwarzają się jako kule styczne do danej kuli; jest to więc odwzorzenie kompleksu specjalnego liniowego.

¹⁾ Jeżeli płaszczyzna staje się styczną do koła zerowego, natenczas oba punkty zerowe zlewają się w jeden; to samo się tyczy obu pęków prostych minimalnych, leżących na tej płaszczyźnie. Dlatego też odpowiadające tym pękom proste układu r zlewają się ze sobą, t. j. dają prostą, należącą do kompleksu $(r + z = 0)$. Przyp. tłom.

²⁾ Inny dowód porówn. Geom. d. Berührgstr., str. 464.

Przyp. tłom.

¹⁾ Porówn Geom. d. Berührgstr., str. 471.

Według Plückera, równanie kompleksu liniowego ogólnego ma postać:

$$(r\sigma - s\mu) + mr + n\sigma + p\varrho + qs + t + 0.$$

Stąd zaś wyprowadza się równanie odpowiadającego mu kompleksu liniowego kul:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2) + MX + NY + PZ + QH + T = 0 \quad 1).$$

W równaniu tem M, N, P, Q, T oznaczają stałe zależne od m, n, p, q, t , zaś X, Y, Z, H muszą być uważane jako współrzędne niejednorodne kuli.

Łatwo widzieć jeszcze, że równanie powyższe wyznacza wszystkie kule, przecinające stałą powierzchnię kulistą pod kątem stałym; te kule są właśnie obrazem wszystkich prostych, należących jednocześnie do kompleksu (1) i do $H=0$. Jeżeli niezmiennik jednoczesny tych obu kompleksów jest równy zeru, t. j. jeżeli oba kompleksy leżą w inwolucyi ²⁾, to łatwo okazać, że wyżej wspomniany stały kąt jest równy 90° .

Kule, przecinające daną powierzchnię kulistą pod kątem stałym, przekształcają się na proste dwóch kompleksów liniowych, sprzężonych względem $H=0$. W szczególności

¹⁾ Równaniu temu można nadać kształt:

$$(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 + (Z-Z_0)^2 + (iH-iH_0) = \text{const.}$$

Przyp. aut

Należy zaznaczyć, że przyjmąwszy (X_0, Y_0, Z_0, H_0) jako współrzędne stałej kuli, otrzymamy inny kształt równania powyższego kompleksu kul:

$$(X-X_0')^2 + (Y-Y_0')^2 + (Z-Z_0')^2 = H^2 + H_0'^2 - 2HH_0' \cos \alpha,$$

gdzie α oznacza kąt, pod którym kule kompleksu przecinają kulę stałą.

Z ostatniego równania wynika, że promień stałej kuli H_0' jest równy $\sqrt{c^2 + H_0'^2}$. (X_0, Y_0, Z_0) zaś są współrzędnymi jej środka.

Przyp. tólm.

²⁾ Termin ten został wprowadzony przez Kleina (Math. Ann. t. II, str. 201; porówn. Lie, Geom. d. Berührtr., str. 297). Niezmiennik jednoczesny dwóch-liniowych kompleksów, wyrażonych przez współrzędne jednorodne prostej p_{ik} :

$$\sum_1 a_{ik} p_{ik} = 0, \quad \sum_1 \beta_{ik} p_{ik} = 0,$$

będzie równy:

$$(\alpha\beta) = \alpha_{12}\beta_{34} + \alpha_{13}\beta_{24} + \alpha_{14}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{14} + \alpha_{24}\beta_{13} + \alpha_{34}\beta_{12}.$$

Jeżeli równanie $(\alpha\beta) = 0$, wyrażone przez współrzędne niejednorodne (r, s, p, q, η) zastosować do kompleksów (1) i $[r+c=0]$, wtedy łatwy rachunek wykaże, iż odpowiednie równaniu (1) równanie kompleksu kul zawiera H tylko w drugiej potęgę; stąd zaś wynika, że $\cos \alpha = 0$, t. j. $\alpha = 90^\circ$.

Przyp. tólm.

ści kule, tworzące z daną kąt prosty, są obrazem prostych kompleksu liniowego, będącego w inwolucyi z $H=0$.

Równanie kształtu:

$$(2) \quad ar + b\sigma + c\varrho + ds + e = 0,$$

przetwarza się na równanie liniowe między współrzędnymi kuli, skąd wynika, że kompleks odpowiedni kul składa się z ogółu kul, przecinających daną płaszczyznę pod kątem stałym. Można byłoby to samo wnieść stąd, że kompleks (2) zawiera nieskończenie odległą prostą płaszczyzny x, y , że zatem kompleksy (2) i $H=0$ przecinają się wzdłuż kongruencji liniowej, której kierownice są równoległe do płaszczyzny x, y . Jeżeli wreszcie kompleksy (2) i $H=0$ leżą w inwolucyi, to otrzymujemy ogół kul, których środki leżą w danej płaszczyźnie.

Cztery kompleksy:

$$H = 0 = \varrho + s, \quad iY = 0 = \varrho - s,$$

$$Z = 0 = \sigma - r, \quad H = 0 = \sigma + r.$$

leżą, jak łatwo się rachunkiem można przekonać, w inwolucyi i zawierają w skutek tego, wspólną prostą, mianowicie nieskończenie odległą prostą płaszczyzny x, y ¹⁾. Wynika stąd, że następujące pięć kompleksów:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad H = 0, \quad \text{const} = 0 \quad 2),$$

z których ostatni liczy się podwójnie (jako kompleks specjalny, będący ze sobą samym w inwolucyi ³⁾, tworzą układ, który można uważać jako zniekształcenie układu zasadniczego Kleina ⁴⁾. Jasne jest przytem, że cztery współrzędne

¹⁾ W istocie równania tych kompleksów są szczególnymi przypadkami ogólnego równania (2), którego kompleks zawiera powyższą prostą. Przyp. tólm.

²⁾ Jeżeli $\text{const} = 0$ (porów. uwagę na poprzed. str.), t. j. jeżeli:

$$(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 + (Z-Z_0)^2 + (iH-iH_0) = 0,$$

natenczas kąt α równa się zeru ($\cos \alpha = 1$); kompleks kul składa się z kul, stycznych do stałej kuli i odtwarza się jako kompleks specjalny liniowy. Przyp. tólm.

³⁾ Dowód twierdzenia, według którego każdy kompleks specjalny jest sam ze sobą w inwolucyi, porów. Geom. d. Berührtransf. str. 299, twierdz. 17. Przyp. tólm.

⁴⁾ Według Kleina (Math. Ann. Tom II) niezmiennik jednoczesny każdych dwóch z sześciu zasadniczych kompleksów jest równy zeru, t. j. każde takie dwa kompleksy są w inwolucyi. Przekonać się o tem łatwo, podstawiając w (α, β) odpowiednie wartości.

Przyp. tólm.

kuli (X, Y, Z, H) można uważać jednocześnie jako niejednorodnie spólrzędne prostej.

Godnem uwagi jest również, że każdy z ∞^1 kompleksów, przedstawionych przez równanie:

$$H = \text{const},$$

odtworza się jako ogół kul danej wielkości. Kompleksy te styczne są do siebie wzdłuż wspólnej kongruencji specjalnej, której kierownice zlewają się z nieskończenie odległą prostą płaszczyzny x, y ¹⁾. Proste tej kongruencji odtwarzają się jako ogół płaszczyzn, stycznych do koła urojonego w nieskończoności.

31. Wiadomo, że bezpośrednim wnioskiem z teorii Plückera, jest, że jeżeli $l_1=0$ i $l_2=0$ są równaniami dwóch kompleksów liniowych, to równanie $l_1 + ul_2 = 0$, w którym u jest parametrem, przedstawia szereg kompleksów liniowych, mających wspólną kongruencję liniową. Nasze odwzorowanie przekształca to twierdzenie na następujące:

Kule K , przecinające dwie stałe kule S_1 i S_2 pod danymi kątami V_1 i V_2 są w podobnym stosunku względem ∞^1 kul S . Istnieją przytem dwie kule S , analogiczne do kierownicy kongruencji i styczne do wszystkich kul K .

Kompleks zmienny $l_1 + ul_2 = 0$ przecina kompleks $H=0$ wzdłuż kongruencji liniowej, której obie kierownice opisują powierzchnię stopnia 2-go, będącą przecięciem trzech kompleksów $l_1=0$, $l_2=0$, $H=0$. Wynika stąd, że wyżej wspomniane kule S obwodzą cyklidę Dupina ²⁾, która przechodzi na koło wspólne tym wszystkim kołom.

Zauważę tu jeszcze, że odwzorowanie nasze przeprowadza pewne interesujące grupy nieciągłe prostych na odpowiednie grupy kul. Np. można

¹⁾ Równaniom $H \equiv r + \sigma = 0$ i $r + \sigma = \text{const}$ czynią zadość tylko nieskończenie wielkie wartości r i σ , prostym zaś. równoległym do osi x, y , odpowiadają właśnie nieskończenie wielkie wartości r, s, ρ, σ przy $\frac{r}{s} = \frac{\rho}{\sigma}$.

²⁾ Kule o promieniu równym zeru, należące do danych kompleksów, są punktami, leżącymi na powierzchni kul S ; odtwarzają się one przytem jako proste wspólne kompleksom $l_1 + ul_2 = 0$ oraz $H=0$. Kierownice kongruencji utworzonej przez te proste, odpowiadają w drugim układzie kulom S , z czego wynika, że powierzchnia, utworzona przez te kierownice, odtwarza się w ogóle jako obwiednia kul S , t. j. jako cyklida (porówn. No 29). Ponieważ zaś powyższa powierzchnia rzędu 2-go może być utworzona przez proste kompleksu $H=0$, więc odtwarza się ona w szczególności jako krzywa. Jeżeli zaś ∞^1 kul ma wspólną krzywą, to ta krzywa może być tylko kołem (drugą część krzywej przecięcia rzędu 4-go stanowi koło urojone w nieskończoności).

Przyp. tłóm.

wnosić ze znanej teorii 27-miu prostych na powierzchni rzędu 3-go ¹⁾ o istnieniu grupy, złożonej z 27-miu kul, z której każda jest styczną do dziesięciu innych kul grupy. Z drugiej strony pewne układy kul przechodzą na szczególne układy prostych.

§ 11.

Odpowiedniość wzajemna zagadnień, odnoszących się do kul i do prostych.

32. W tym § rozwiążemy kilka znanych i bardzo prostych zagadnień, odnoszących się do kul, poddanych pewnym warunkom, a to mianowicie przez rozważanie odpowiednich zagadnień, tyjących się linii prostych.

a) Wiele istnieje kul stycznych do czterech kul danych?

Cztery kule przekształcają się na cztery pary prostych: $(l_1 l_1)$, $(l_2 l_2)$, $(l_3 l_3)$, $(l_4 l_4)$. Weźmy po jednej prostej z każdej pary, połączmy otrzymane w ten sposób linie w grupy i szukajmy obu poprzecznych tej grupy. Znajdziemy w ten sposób 16 grup, które jednak parami są sprzężone względem $H=0$, np.

$$l_1, l_2, l_3, l_4 \quad \text{ i } \quad \lambda_1, l_2, l_3, l_4,$$

Oczywiście, obie pary poprzecznych

$$l_1 l_2, \quad \tau_1 \tau_2,$$

dwóch grup takich są również sprzężone i odtwarzają się tylko jako dwie kule. Istnieje zatem 16 kul (uporządkowanych w 8 par) stycznych do 4 kul danych.

b) Wiele istnieje kul, przecinających cztery dane kule pod kątami danymi?

Kule, przecinające daną kulę pod tym samym kątem, odtwarzają się jako proste dwóch kompleksów liniowych, sprzężonych względem $H=0$. Musimy więc rozważyć cztery pary kompleksów liniowych $(l_1 l_1)$, $(l_2 l_2)$, $(l_3 l_3)$, $(l_4 l_4)$ i uporządkować je najprzód w grupy po cztery w ten sposób, aby kompleksy jednej grupy miały zawsze rozmaite skądźniki. Powtóre, należy znaleźć wszystkie proste, należące do czterech kompleksów każdej grupy. Otóż cztery kompleksy liniowe zawierają dwie wspólne proste, zatem, postępując jak w pierwszym zadaniu, otrzymamy jako rozwiązanie 16 kul, ugrupowanych w 8 par.

¹⁾ Twierdzenia tego dowiódł pierwszy Cayley. Dowód syntetyczny por. Reye. Geometrie der Lage, tom II, wyd. 3, str. 83. Przyp. tłóm.

Zadanie powyższe upraszcza się, jeżeli jeden lub niektóre dane kąty są równe 90° , gdyż kule, przecinające daną pod kątem prostym, odtwarzają się jako proste jednego tylko kompleksu, która z ($H=0$) leży w inwolucji. Jeżeli wreszcie wszystkie cztery kąty są równe 90° , natenczas trzeba określić wspólną prostą czterech liniowych kompleksów, będących z $H=0$ w inwolucji. Otrzymane w ten sposób obie proste są sprzężone względem $H=0$, t. j. istnieje tylko jedna kula, przecinająca cztery dane pod kątem prostym.

c) Wyznaczyć wszystkie kule, przecinające pięć danych kul pod tym samym kątem.

Nasze odwzorowanie redukuje powyższe zagadnienie do tego, by uporzędować pięć par prostych $(l_1, l'_1), (l_2, l'_2), \dots, (l_5, l'_5)$ wszystkimi sposobami w grupy po 5, z ograniczeniem, aby dwie proste jednej grupy nie zawierały tego samego skaznika i, na koniec, by znaleźć wszystkie kompleksy liniowe, zawierające wszystkie linie którejkolwiek z powyższych grup¹⁾. Istnieją 32 rozmaite grupy sprzężone po dwie względem $H=0$, wskutek czego otrzymujemy 32 sprzężonych (po dwa) kompleksów liniowych, odtwarzających się jako 16-liniowych kompleksów kul. Otóż 16 kul, z których każda przecina pod kątem stałym kule takiego kompleksu, stanowi rozwiązanie naszego zagadnienia.

Dwie grupy prostych, jakoto:

$$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \quad l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$$

zawierają cztery wspólne proste (l_1, l_2, l_3, l_4) i dlatego odpowiednie kompleksy liniowe przecinają się wzdłuż kongruencji liniowej, której kierownice są poprzecznymi tych czterech prostych. Kompleks $H=0$ przecina tę kongruencję wzdłuż powierzchni stopnia 2-go, będącej obrazem koła przecięcia dwóch z szukanych kul, a zarazem dwóch kul, odpowiadających prostych d_1 i d_2 ²⁾. Te ostatnie kule można jeszcze określić jako styczne do czterech z 5-in danych kul. Wynika stąd, że na każdej z pomiędzy szesnastu kul, przecinających pod tym samym kątem pięć danych, można znaleźć pięć kół w przypuszczeniu, że można zbudować kule, styczne do czterech kul danych.

¹⁾ Wiadomo, że kompleks liniowy jest określony jednoznacznie przez 5 należących do niego prostych.

Przyp. t.łom.

²⁾ Kule, rozwiązujące ostatnie zagadnienie, przecinają pod stałym kątem kompleks kul, określony przez pięć kul danych. Niektóre z kul kompleksu są punktami; są to te, które się odtwarzają jako proste kompleksu $L=0$. Wyżej wymieniona powierzchnia rzędu 2-go zawiera więc ∞^1 tych prostych, odtwarzających się jako punkty krzywej przecięcia dwóch z szukanych kul, t. j. jako wspólne koło przecięcia. Z drugiej strony powierzchnia rzędu 2-go zawiera proste (d_1, d_2) , a zatem odtwarza koło przecięcia kul, odpowiadających tym kierownicom.

Przyp. t.łom.

§ 12.

Nasze odwzorowanie przekształca linie asymptotyczne danej powierzchni f na linie krzywiznowe odpowiadającej jej powierzchni F .

33. Rozważane w ostatnich §§ odwzorowanie zasługuje na szczególną uwagę w skutek następującego twierdzenia:

Linie krzywiznowe danej powierzchni F przekształcają się na powierzchni prostoliniowe, styczne do odpowiedniej powierzchni f wzdłuż krzywych asymptotycznych tej ostatniej.

Ponieważ styczne do powierzchni f przechodzą na kule, styczne do F , to samo więc już naprowadza na myśl, że styczne główne (Haupttangenten) odtwarzają się jako kule krzywiznowe (Hauptkugeln) drugiej. W istocie, powierzchnia f przecina się ze styczną główną w trzech zlewających się ze sobą punktach, a więc trzy proste nieskończenie bliskie, leżące na odpowiedniej kuli, są styczne do powierzchni F . Krzywa przecięcia obu powierzchni ma, w skutek tego, ostrze, a zatem rozważana przez nas kula jest kulą krzywiznową.

Zważywszy jeszcze, że kierunek tego ostrza jest styczny do pewnej linii krzywiznowej, widzimy, że dwa punkty nieskończenie bliskie linii asymptotycznej odtwarzają dwie proste urojone, styczne do F w dwóch punktach nieskończenie bliskich linii krzywiznowej, że zatem wszystkie punkty linii asymptotycznej przechodzą na tworzące powierzchni liniowej, stycznej do F wzdłuż pewnej linii krzywiznowej. Stąd zaś wynika powyższe twierdzenie (porówn. § 7 i 21)¹⁾.

Dla sprawdzenia poprzedzającego niech służy następujące przykłady: Kula przekształca się na kongruencję liniową, której powierzchnia ogniskowa składa się z dwóch kierownic. Otóż, jak wiadomo, każda krzywa na powierzchni kuli jest linia krzywiznową i dlatego kierownice kongruencji liniowej są liniami asymptotycznymi na każdej powierzchni liniowej, należącej do kongruencji. Z drugiej strony wiadomo, że dana hyperboloidea f odtwarza się jako cyklida Dupin'a, a ponieważ powierzchnie prostoliniowe, styczne do f wzdłuż jej linii asymptotycznych (t. j. tworzących prostoliniowych) i należące do kompleksu $H=0$ są również stopnia 2-go, a więc otrzymu-

¹⁾ Dowód, podany w „Geom. d. Berührtransf.“ str. 472—474 polega na określeniu linii asymptotycznych jako takich, wzdłuż których dwa nieskończenie bliskie elementy powierzchni leżą na jednej prostej, i linii krzywiznowych, wzdłuż których dwa nieskończenie bliskie elementy odpowiadającej powierzchni leżą na jednej i tej samej kuli. Przyp. t.ł.

jemy znane twierdzenie: linie krzywiznowe cyklidy Dupina są dwoma szeregami kół.

Przytaczamy tu interesujące zastosowanie poprzedniego twierdzenia:

Powierzchnia Kummera rzędu 4-go z szesnastoma punktami osoblwemi ma krzywe asymptotyczne algebraiczne rzędu 16-go, które stanowią całkowite przecięcie danej powierzchni z powierzchniami prostoliniowymi rzędu 8-go stycznymi do niej ¹⁾,

Powierzchnia Kummera z 16-ma punktami osoblwemi jest, jak wiadomo, powierzchnią ogniskową kongruencji ogólnej rzędu 2-go i klasy 2-jej. Jeżeli ten układ prostych stanowi część $H=0$, to odtwarza się on (§1, 26a) jako powierzchnia rzędu 4-go (F_4), zawierająca koło urojone w nieskończoności jako linię podwójną ²⁾. Otóż Darboux i Moutard znaleźli, że linie krzywiznowe takiej powierzchni F_4 są krzywymi rzędu 8-go; przecinają one koło urojone w ośmiu punktach, a zatem (§ 8, 26, b) powierzchnie będące ich obrazem są rzędu 8-go i ich tworzące są podwójnymi stycznymi powierzchni Kummera. Stąd zaś wynika bezpośrednio nasze twierdzenie.

Oczywiście i znieszczałcenie powierzchni Kummera, jako to powierzchnia falowa, Plückerowska powierzchnia kompleksu, Steinerowska powierzchnia rzędu 4-go i klasy 3-jej ³⁾, dalej niektóre powierzchnie liniowe rzędu 4-go z dwiema prostymi podwójnymi, które mogą się zlewać również w jedną powierzchnię prostoliniową rzędu 3-go i t. d. muszą mieć linie asymptotyczne algebraiczne.

34. Darboux dowiódł, że na każdej powierzchni można w ogólności znaleźć linię krzywiznową, leżącą w skończoności, mianowicie linię styczn-

¹⁾ Klein, któremu zakomunikowałem, że krzywe asymptotyczne są algebraicznymi, znalazł, że są one identyczne z układem krzywych, rozpatrywanych już przedtem przez niego z innego punktu widzenia (Math. Ann. II, str. 219). Porów. nasz wspólny referat w „Monatsberichte der Berliner Academie“ za grudzień 1870. Przyp. aut.

²⁾ Ponieważ w danym przypadku powierzchnia Kummera utworzona jest przez kongruencję $r+s=0$ i kompleks prostych 2-go rzędu: $\zeta(r, s, p, q, rs-sp)=0$, gdzie ζ jest funkcją jednorodną 2-go stopnia argumentów $r, s, p, q, rs-sp$, zatem równanie powierzchni, odpowiadającej tej kongruencji, będzie miało kształt:

$$f_2(X+iY, X-iY, Z; X^2+Y^2+Z^2) = 0.$$

Z uwagi, że wyraz najwyższego, t. j. 4-go stopnia w tem równaniu jest:

$$a(X^2+Y^2+Z^2)^2,$$

wynika, że powierzchnia ta zawiera koło urojone jako linię podwójną. Przyp. tłóm.

³⁾ Clebsch wyznaczył linie asymptotyczne powierzchni Steinera; są to krzywe rzędu 4-go (por. Borchardts Journal t. LXV I).

Przyp. aut.

ści z powierzchnią rozwijalną, styczną jednocześnie do danej powierzchni i koła urojonego w nieskończoności ¹⁾.

Odpowiednio do tego można w ogóle znaleźć na powierzchni ogniskowej każdej kongruencji, należącej do kompleksu liniowego, linię asymptotyczną, będącą geometrycznym miejscem wszystkich punktów, dla których płaszczyzna styczności jest jednocześnie płaszczyzną, odpowiadającą temu punktowi w kompleksie liniowym ²⁾.

Dowodzenie. Kule nieskończenie małe, styczne do danej powierzchni F , dzielą się na dwa układy: 1° punkty powierzchni F ; 2° punkty wyżej wspomnianej powierzchni rozwijalnej urojonej. Zatem i linie kompleksu $H=0$, styczne do powierzchni f , rozpadają się na układ stycznych podwójnych i na ogół prostych, stycznych do f wzdłuż pewnej krzywej c . Ta krzywa zaś, będąc obrazem urojonej powierzchni liniowej, stycznej do F wzdłuż linii krzywiznowej, jest linią asymptotyczną na powierzchni f . Oznaczenie to jednak będzie złudnem, jeżeli jest daną nie kongruencja, lecz tylko jej powierzchnia ogniskowa, lub też jedynie część nieprzywiedlna tej ostatniej. Mianowicie na danej powierzchni znajduje się tylko skończona liczba punktów, których płaszczyzna styczna odpowiada tym punktom względem danego kompleksu liniowego. Najprościej można poprzednie rozważania wyrazić w sposób następujący:

Jeżeli dana powierzchnia jest identyczna ze swą wzajemną biegunową względem kompleksu liniowego, to zawiera ona linię asymptotyczną, której styczne należą do kompleksu. Tę krzywą szczególną można wyznaczyć za pomocą różniczkowania i rugowania ³⁾.

Wziąwszy pod uwagę, że każda powierzchnia prosto-liniowa, której tworzące należą do kompleksu liniowego, jest zarazem swą biegunowo-

¹⁾ Płaszczyzny styczne do danej powierzchni wzdłuż owej linii krzywiznowej będą płaszczyznami minimalnymi. Sąsiednie proste przecięcia nieskończenie bliskich płaszczyzn minimalnych będą, jako proste minimalne, z jednej strony prostopadłe do odpowiednich płaszczyzn stycznych, z drugiej strony będą się przecinały wzajemnie jako nieskończenie bliskie tworzące powierzchni rozwijalnej. Zatem dana krzywa ma tę własność, że każde z nieskończenie bliskich normalnych do powierzchni, przeprowadzone w punkcie tej pierwszej, przecinają się. Krzywa ta jest więc linią krzywiznową. Przyp. tłóm.

²⁾ Ponieważ płaszczyzna minimalna, styczna w danym punkcie urojonej linii krzywiznowej do powierzchni F , odpowiada punktowi styczności w kompleksie prostych minimalnych, zatem i płaszczyzna styczna w odpowiednim punkcie powierzchni f również (§ 6, 18) odpowiada temu punktowi w kompleksie $H=0$. Przyp. tł.

³⁾ Krzywa ta jest, jak zauważył Klein, zarazem krzywą począwornej styczności dla powierzchni. Przyp. aut.

wzajemną względem kompleksu, możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Na każdej powierzchni prostoliniowej, zawartej w kompleksie liniowym, leży w ogólności pewna krzywoliniowa asymptotyczna¹⁾, której styczne należą do kompleksu. Linię tę można wyznaczyć bez całkowania.

Clebsch dowiódł (Borchardts Journal, t. LXVIII), że jeżeli na powierzchni prostoliniowej wiadoma jest, oprócz tworzących, tylko jedna linia asymptotyczna, natenczas wyznaczenie pozostałych linii asymptotycznych wymaga wykonania jednej kwadratury. Wynika stąd, że wyznaczenie linii asymptotycznych na powierzchni prostoliniowej, należącej do kompleksu liniowego, zależy również tylko od jednej kwadratury.

Stosując nasze przekształcenie do powyższego twierdzenia Clebscha, jak również i do wyprowadzonego stąd wniosku, otrzymujemy dwa następujące twierdzenia:

Jeżeli na dowolnej powierzchni rurowej (obwiedniej kul), dana jest jedna (nie będąca kołem) linia krzywiznowa, natenczas pozostałe mogą być wyznaczone za pomocą kwadratury.

Jeżeli ∞^1 kul przecina daną kulę S pod kątem stałym, to na obwiedniej tych kul można wyznaczyć jedną linię krzywiznową za pomocą różniczkowania i integracji, pozostałe zaś za pomocą kwadratury.

Że na rozważanej powierzchni rurowej można wyznaczyć jedną linię krzywiznową wynika bezpośrednio stąd, że ta powierzchnia przecina kulę S pod kątem stałym. Krzywa przecięcia jest zaś linią krzywiznową na kuli S , a zatem, według znanego twierdzenia²⁾, będzie w takim samym stosunku względem powierzchni rurowej.

§ 13.

Odpowiedniość wzajemną przekształceń w obu układach.

35. Przekształcenie nasze wyraża się, jak wiadomo (§ 5), za pomocą równań, które wyznaczają którąkolwiek wielkość jednej z grup (x, y, z, p, q) , (X, Y, Z, P, Q) , jako funkcje wielkości, zawartych w drugiej grupie.

¹⁾ Przytaczamy następujące ciekawe zastosowanie tego twierdzenia: Proste kongruencji liniowej należą, według Plückera, do ∞^1 liniowych kompleksów, w skutek tego każda powierzchnia skośna, której linie przecinają dwie proste, zawiera ∞^1 krzywych algebraicznych asymptotycznych, z których każda jest obwiedzią pewnego liniowego kompleksu (por. Cremona, Ann. di mat. ser. II, t. I). Przep. aut.

²⁾ Joachimsthal, Journ. f. Math., t. XXX, str. 347 (1846).

Jeżeli jeden z układów, np. r , poddamy przekształceniu, przy którym powierzchnie, styczne do siebie, przechodzą na takież powierzchnie, to odpowiednie przekształcenie w drugim układzie będzie posiadało tę samą własność. Przekształcenie takie bowiem wyraża się przez pięć równań między $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ i $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$, przy czem oba składowe oduwają się do obu stanów układu r , i te równania przechodzą, w skutek równań przekształcenia, na pięć zależności pomiędzy $(X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1)$ i $(X_2, Y_2, Z_2, P_2, Q_2)$ c. b. do okazania.

Jeżeli ograniczymy się na przekształcenia liniowych¹⁾ układu r , to w pośród odpowiednich przemian w drugim układzie znajdziemy: wszystkie ruchy (przemieszczenia, obroty i skręty) przekształcenia równoległościowe²⁾, które oznaczają przejście od danej powierzchni do powierzchni, równoległych do niej, przekształcenie biegunowo-wzajemne, podane przez Bonnet'a, przekształcenie wzajemne względem danej cyklidy i t. d.; wszystkie one, odpowiadając przekształceniom liniowym, mają własność przeprowadzania linii krzywiznowych na takież linie przekształconej powierzchni. Poniżej dowiodę, że te przekształcenia układu R są jedynymi, przy których powierzchnie styczne wzajemnie wzdłuż linii krzywiznowych, przechodzą na takież powierzchnie.

36. Weźmy najprzód pod uwagę te przekształcenia liniowo-punktowe układu r , którym odpowiadają przekształcenia liniowe drugiego układu; jasnym jest, że wejdą tu tylko takie przekształcenia liniowe układu R , w których koło urojone w nieskończoności pozostaje niezmiennem — i odwrotnie; w ten sposób otrzymamy wszystkie takie przekształcenia. Wynika to stąd, że posiadają one z jednej strony własność przeprowadzania prostych, przecinających koło urojone w nieskończoności, na takież proste, z drugiej strony — kul na kule; zatem odpowiednie przekształcenie układu r jest jednocześnie przekształceniem punktowem i liniowem, co było do okazania.

Ogólne przekształcenie liniowe, przy którym koło urojone zachowuje swe położenie³⁾, zawiera siedm niezależnych stałych i, jak wiadomo, może być złożone z przemieszczeń, obrotów i przekształceń, zachowujących podobieństwo. Odpowiednie przekształcenie układu r zawiera również siedm stałych i może być zcharakteryzowane w ten sposób, że pozostawia ono niezmiennym kompleks liniowy $H=0$ i jedną z jego prostych ($\text{const} = 0$)⁴⁾.

¹⁾ Przez przekształcenia liniowe należy tu rozumieć rzutowe przekształcenia r , przy których spółrzędne $r, s, p, q, (rs - sp)$ przekształcają się rzutowo (por. Geom. d. Berthstransf. str. 285). Przep. tl.

²⁾ Zwane przez Bonnet'a rozsunieściami (dilatations).

³⁾ Por. Lie-Engel, Transformationsgruppen Bd. 3, str. 310.

⁴⁾ Wynika to stąd, że odpowiednie przekształcenie układu R jest punktowem, t. j. przeprowadza punkty na punkty. Przep. tl.

Przekształcenie to jest zarazem najogólniejszym z tych, które pozostawiają niezmienną pewną kongruencję liniową.

Następujące rozważanie analityczne prowadzi do wyznaczenia przekształceń układu r , odpowiadających przesunięciom układu drugiego. Przesunięcia, jako przekształcenie kul, wyrażają równania następujące:

$$X_1 = X_2 + A, \quad Y_1 = Y_2 + B, \quad Z_1 = Z_2 + C, \quad H_1 = H_2,$$

które po użyciu wzorów (2) § 9-go przechodzą na następujące:

$$r_1 = r_2 + a, \quad s_1 = s_2 + b, \quad \varrho_1 = \varrho_2 + c, \quad \sigma_1 = \sigma_2 + d.$$

Po wstawieniu tych wyrażeń w równania prostej:

$$r_1 z = x - \varrho_1, \quad s_1 z = y - \sigma_1,$$

otrzymamy, jako określenie szukanego przekształcenia:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + a z_2 + c, \quad y_1 = y_2 + b z_2 + d.$$

Również łatwo jest znaleźć przekształcenie, odpowiadające przekształceniom układu R , zachowującym podobieństwo. Równania:

$$X_1 = m X_2, \quad Y_1 = m Y_2, \quad Z_1 = m Z_2, \quad H_1 = m H_2,$$

dają mianowicie, po użyciu wzorów (2) § 9:

$$r_1 = m r_2, \quad s_1 = m s_2, \quad \varrho_1 = m \varrho_2, \quad \sigma_1 = m \sigma_2.$$

Te ostatnie równania określają przekształcenie, które można również wyrazić przez wzory:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = m x_2, \quad y_1 = m y_2,$$

są to przekształcenia liniowo-punktowe, przy których punkty dwóch prostych zachowują położenie niezmiennie.

Geometrycznie można dowieść, że i obroty układu R przechodzą na przekształcenia wyżej wymienionego rodzaju. W istocie, niech A będzie osią obrotu, M, N niechaj będą punktami koła urojonego, pozostającymi na miejscu przy obrocie. Wtedy jasnym jest, że i wszystkie proste urojone, przecinające A i przechodzące zarazem przez M i N , zachowują swe położenie przy obrocie; wynika stąd, że i punkty, będące obrazem tych prostych i tworzące dwie

linie proste, pozostaną również nieruchomymi przy odpowiednich przekształceniach układu r .

37. Przekształcenie przez promienie odwrotne w układzie R przeprowadza punkty na punkty, kule na kule i wreszcie proste, przecinające urojone koło w nieskończoności, na podobne linie; a więc odpowiednie przekształcenie układu r jest liniowo-punktowe i kompleks $H=0$ pozostaje przy nim bez zmiany. Jeżeli następnie weźmiemy pod uwagę, że rozważane przekształcenie pozostawia bez zmiany punkty i prostoliniowe tworzące pewnej kuli, to wnosimy, że to samo stosuje się do punktów pewnych dwóch prostych przy odpowiednich przemianach układu r . Klein zauważył tu, że ostatnie przekształcenie (układu r) można utworzyć z dwóch przekształceń wzajemnych względem dwóch leżących z sobą w inwolucji kompleksów liniowych; w danym przypadku mianowicie $H=0$ jest jednym z tych kompleksów, gdy tymczasem drugi odtwarza się jako układ kul, przecinających pod kątem prostym tę, która stanowi podstawę przy przekształceniach przez promienie odwrotne ¹⁾.

Powierzchnia F , która pozostaje niezmienną przy powyższem przekształceniu, odtwarza się zatem w układzie r jako kongruencja, zlewająca się ze swoją wzajemną odnośnie do kompleksu liniowego, leżącego z $H=0$ w inwolucji. Odpowiednia powierzchnia ogniskowa zlewa się ze swą wzajemną względem każdego z obu kompleksów leżących w inwolucji, a zatem układ jej stycznych podwójnych rozpada się na dwie kongruencje; z nich je-

¹⁾ Słuszności tej uwagi można dowieść w następujący sposób: Kompleks kul prostopadłych do kuli o promieniu równym jednostki, opisanej z początku układu, wyraża się równaniem:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + H^2) - 1 = 0,$$

t. j. w spólrzędnych prostej: $(r_0 - s_0) - 1 = 0$ (t. j. $\eta - 1 = 0$). Jeżeli zaś przez $(r, s, \varrho, \sigma, \eta)$ ($= r_0 - s_0$) i $(r_1, s_1, \varrho_1, \sigma_1, \eta_1)$ oznaczmy spólrzędne biegunowych wzajemnych względem ($\eta - 1 = 0$), to, według „Geometrie d. Berührtransf.“ str. 457, można napisać wzory:

$$r_1 = -\frac{r}{\eta}, \quad s_1 = -\frac{s}{\eta}, \quad \varrho_1 = -\frac{\varrho}{\eta}, \quad \sigma_1 = -\frac{\sigma}{\eta},$$

które po wprowadzeniu w nie spólrzędnych kul: (X, Y, Z, H) (X_1, Y_1, Z_1, H_1) przyjmą kształt:

$$(\alpha) \quad X_1 = -\frac{X}{\eta}, \quad Y_1 = -\frac{Y}{\eta}, \quad Z_1 = -\frac{Z}{\eta}, \quad H_1 = -\frac{H}{\eta} \quad (\eta = X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2).$$

Przejście zaś do danej prostej do jej biegunowej względem kompleksu $H=0$ zmienia tylko znak wielkości H . Pierwsze więc trzy równania (α) nie ulegną zmianie, ostatnie przyjmie kształt: $H_1 = \frac{H}{\eta}$.

Właśnie równania te wyrażają analogiczne przekształcenie przez promienie odwrotne.

1) rzyp. tđm.

dną należy do kompleksu $H=0$, druga zaś zawarta jest w drugim kompleksie.

38. Rozważmy najogólniejsze przekształcenia liniowe układu r , dla których przecinanie się prostych jest własnością niezmienniczą i z drugiej strony odpowiednie przekształcenie układu R , przeprowadzające oczywiście kule na kule, oraz kule wzajemnie styczne — na także kule. Przy powyższym przekształceniu liniowym przechodzą styczne danej powierzchni na ogół stycznymi innej powierzchni, przyczem w szczególności odpowiadać sobie muszą wzajemnie krzywe asymptotyczne obu powierzchni, jeżeli przekształcenie jest liniowo-punktowe, jak również kiedy jest liniowo-dualistycznym¹⁾. Przy odpowiednim przekształceniu układu R przechodzi ogół ∞^3 kul stycznych do danej powierzchni F_1 na ogół kul, będących w tym samym stosunku do innej powierzchni F_2 ; w szczególności zaś odpowiadają sobie kule krzywiznowe. Wynika stąd, że linie krzywiznowe tych powierzchni odpowiadają sobie w tem znaczeniu, że z równania:

$$(1) \quad F(X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1) = 0,$$

mającego miejsce dla punktów pewnej linii krzywiznowej na F_1 , wynika dla punktów odpowiedniej linii krzywiznowej na F_2 równanie, które otrzymamy z F_1 po podstawieniu za $(X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1)$ ich wartości, wyrażonych przez $(X_2, Y_2, Z_2, P_2, Q_2)$.

Poniżej dowiodę, że można otrzymać wszystkie przekształcenia, dla których styczność jest własnością niezmienniczą, a z drugiej strony linie krzywiznowe są krzywymi spółzmiennymi, jeżeli zastosujemy nasze odwzorowanie do wszystkich przekształceń liniowo-punktowych (lub też liniowo-dualistycznych) układu r .

Dla okazania powyższego uważmy, że istnieją dwa rodzaje powierzchni, na których wszystkie krzywe są liniami krzywiznowymi; są to mianowicie kule i urojone powierzchnie rozwijalne, zawierające koło urojone w nieskończoności. Jasnym jest, że szukane przekształcenie musi przeprowadzać taką powierzchnię na powierzchnię, należącą do jednej z oł u powyższych kategorii, przyczem łatwo okazać, że w szczególności kule muszą przechodzić na kule. Wyżej wspomniane powierzchnie urojone rozwijalne czynią bowiem zadość równaniu różniczkowemu cząstkowemu:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0,$$

¹⁾ Dowodzenie Darboux'a, Théorie des Surfaces, t. I, N° 95, 109. Przyp. tł.

a zatem odpowiadające im w r powierzchni nie muszą również czynić zadość pewnemu równaniu różniczkowemu:

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Że zaś pośród powierzchni całkowych tego równania może być najwyżej ∞^3 kul¹⁾, zatem w ogólności kule nie mogą przechodzić na powierzchnie urojone rozwijalne.

Przekształcenie nasze jest zatem przekształceniem kul i przytem przeprowadza ono kule styczne jedną do drugiej na także kule. Odpowiednie przekształcenie układu r jest, w skutek tego, przekształceniem prostych, dla którego przecinanie się tychże prostych jest własnością niezmienniczą, co ma, jak wiadomo, miejsce tylko dla przekształceń liniowo-punktowych i dualistycznych.

Z uwagi, że wszystkie przekształcenia punktowe, dla których linie krzywiznowe są krzywymi spółzmiennymi, przeprowadzają kule nieskończonostkowe na także i że w skutek tego są to najogólniejsze przekształcenia punktowe, zachowujące podobieństwo w nieskończeniu małych częściach²⁾, można wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Wszystkie przekształcenia liniowe układu r , pozostawiające kompleks $H=0$ bez zmiany, przechodzą w skutek naszego odwzorowania na przekształcenia punktowe, zachowujące podobieństwo w nieskończeniu małych częściach.

Uwzględniając poprzednie wywody, otrzymujemy zarazem następujące, przez Liouville'a dowiedzione twierdzenie:³⁾

Każde przekształcenie punktowe, zachowujące podobieństwo w nieskończeniu małych częściach, można złożyć z przekształcenia przez promienie odwrotne i z pewnego przesunięcia.

39. Rozsuniecie (dylatacja), t. j. przejście od danych powierzchni do równoległych do nich — przeprowadza, jak wiadomo, linie krzywiznowe

¹⁾ Gdyby wszystkie (∞^4) kule czyniły zadość jednemu i temu samemu równaniu cząstkowemu 1-go rzędu, wtedy wszystkie (∞^3) elementy powierzchniowe przestrzeni należałyby do tegoż równania — co jest niemożliwe. Przyp. tłóm.

²⁾ Dowód tej własności przekształceń punktowo-cząstkowych patrz Geom. d. Berührungstranf. str. 422 (Satz 6). Przyp. tłóm.

³⁾ Dowód twierdzenia Liouville'a: patrz Note au sujet de l'article précédent Journ. d. Math. pures et appliqués, 1847, str. 265; również Geometrie der Berührungstranf. str. 425 (Theorem 16). Przyp. tłóm.

na takież linie, dlatego też, jak łatwo okazać, przekształcenie to jest obrazem pewnego liniowego przekształcenia układu r .

W istocie, równaniem:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2, \quad H_1 = H_2 + A,$$

odpowiadają (N° 36) równania kształtu następującego:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + az_2 + b, \quad y_1 = y_2 + cz_2 + d,$$

które dowodzą naszego twierdzenia.

Bonnet kilkakrotnie rozważał przekształcanie, określone przez równania:

$$Z_1 = iZ_2 \sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2}, \quad X_1 = X_2 + P_2 Z_2, \quad Y_1 = Y_2 + Q_2 Z_2;$$

dowiodł on, prócz tego, że to przekształcenie jest wzajemnem, że przeprowadza linie krzywiznowe na takież linie i że wreszcie mają tu miejsce zależności:

$$\zeta_1 = iH_2, \quad H_1 = -i\zeta_2,$$

w których H_1, H_2 oznaczają promienie krzywizny odpowiadających sobie punktów, ζ_1 i ζ_2 zaś — współrzędne (z) należących do nich środków krzywizny.

Poniżej okazemy, że przekształcenie Bonnet'a jest obrazem wzajemnego odwzorowania układu r względem kompleksu liniowego:

$$Z + iH = 0.$$

W istocie, według Kleina, współrzędne dwóch prostych (X_1, Y_1, Z_1, H_1) (X_2, Y_2, Z_2, H_2), sprzężonych wzajemnie względem tego kompleksu czynią załość równaniem:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = iH_2, \quad H_1 = -iZ_2.$$

Równania te określają, jeżeli (X, Y, Z, H) będziemy uważali jako współrzędne kuli, odpowiadanie sobie wszystkich kul w przestrzeni, identyczne z przekształceniem Bonnet'a ¹⁾.

¹⁾ Przekształcenie Bonnet'a podporządkowuje punktom przestrzeni kule, których środki leżą w pewnej płaszczyźnie. Jeżeli zastąpimy kulę każdym razem kołem przecięcia tejże z powyższą płaszczyzną, natenczas otrzymamy godną uwagi zależność między przekształceniem Bonnet'a i interesującym pomysłem Möbiusa (Abh. d. Sächs. Akad. 1854). Pomysł ten polega na tem, by jako element przestrzeni o trzech wymiarach przyjąć koło na płaszczyźnie i jako współrzędne tego ostatniego wybrać współrzędne środka i promienia. Przyp. aut.

Pośród przekształceń liniowych przestrzennych grają, jak wiadomo: przekształcenia wzajemne względem powierzchni stopnia 2-go rolę pierwszorzędą; naprowadza to na myśl rozważania odpowiednich przekształceń kul. Te ostatnie odnoszą się do obu grup kul danej cyklicy Dupina, a to w sposób następujący: Dana kula Q_1 jest styczna do dwóch kul z każdej grupy S_1, S_2 i Σ_1, Σ_2 : wiadomo, że oprócz tej kuli istnieje jeszcze piętnaście kul stycznych do tych samych S i Σ , i pośród tych wybieramy tę kulę Q_2 , która w wiadomy sposób jest dobrana do kuli Q_1 . Otóż Q_1 i Q_2 odpowiadają sobie w powyżej wymienionem przekształceniu kul. Godnem uwagi szczególnie jest przypadek, kiedy tworzące jednego układu na przyjętej początkowo powierzchni stopnia 2 go należą do kompleksu liniowego $H=0$. Natenczas cyklida sprowadza się do koła, a przekształcenie kul staje się punktowem. Spotykamy tu więc szczególne przekształcenie punktowe, zachowujące podobieństwo cząsteczkowe i mające pewne koło w skończoności jako utwór zasadniczy.

Sumując najważniejsze wyniki tego, § widzimy, że przy naszym odwzorowaniu odpowiadają sobie:

a) Wszystkie przekształcenia przestrzenne liniowo-punktowe (t. j. rzutowe) i liniowo-dualistyczne.

b) Wszystkie (∞^{10}) przekształcenia liniowe, zachowujące bez zmiany pewien kompleks liniowy.

c) Wszystkie (∞^7) przekształcenia liniowe, zachowujące bez zmiany pewną kongruencję liniową speyalną.

a) Wszystkie przekształcenia dla których styczność wzdłuż linii krzywiznowych jest własną ściegą niezmienniczą.

b) Wszystkie przekształcenia liniowe, zachowujące podobieństwo cząsteczkowe.

c) Ogół przekształceń cząstkowych, będących zarazem rzutowymi, i zachowujących bez zmiany koło urojone w nieskończoności.

Rozważania te prowadzą do ważnych wyników, i tak np. weźmy następujący rezultat:

Ogół przekształceń, przy których przecinające się proste przechodzą na takież proste, można, według Kleina, utworzyć z przekształceń wzajemnych względem kompleksów liniowych ¹⁾. Odpowiednio do tego

¹⁾ Wiadomo, że każde takie przekształcenie może być określone warunkiem, aby pewnemu (nie leżącemu na płaszczyźnie) pięciobokowi (1, 2, 3, 4, 5) odpowiadał pewien inny określony pięciobok (I, II, III, IV, V). Jeżeli prztem odpowiadają sobie wzajemnie wierzchołki tych pięciu boków — mamy rzutowe przekształcenie; jeżeli zaś punktem (1...4) odpowiada pięć [płaszczyzn, przechodzących przez każde dwa przyległe (VI, III, I, II—II, III i t. d.), wtedy otrzymujemy dualistyczne przekształcenie. Otóż przy prze-

znajdujemy, że wszystkie nasze przekształcenia, przy których linie krzywiznowe są krzywymi spółzmiennymi, mogą być utworzone z przekształceń przez promienie odwrotne i z rozsunieć.

Jeżeli będziemy, idąc za Kleinem uważali, geometryę kul lub prostych, opartą na spółrzędnych X, Y, Z, H , jako geometryę metryczną o czterech zmiennych, to łatwo widzieć, że moje liniowe przekształcenie kul identyczne jest z ogółem wszystkich zachowujących podobieństwo cząsteczkowe przekształceń punktowych tej przestrzeni kulistej ¹⁾.

Zresztą mam zamiar te ostatnie teorie przedstawić wyczerpująco w innej rozprawie, poświęconej w ogóle geometrii przestrzeni wielowymiarowych ²⁾.

ksztalceniach biegunowych względem kompleksów liniowych mogą być dane dowolnie 1° pary biegunowych wzajemnych, które określają ós kompleksu, i 2° prosta kompleksu, p zostająca przy przekształceniu bez zmiany. Zważywszy to możemy przejście od (I,2,3,4,5) do (I,II,III,IV,V) odbyć stopniowo, t j: a) proste (1,2,3,4,5) przechodzą na (I',2',3',4',5'); b) drugi kompleks określony tak, by (I) była jego prostą i proste (I,2',3',4',5') przechodziły na (I,2'',III,4'',V); c) trzeci kompleks określony tak, by proste (2'',4'') przeszły na (II,IV); ponieważ zaś proste (I,III,V) przecinają pary biegunowych wzajemnych (2''-II) i (4''-IV), więc pozostaną one przy tem przekształceniu bez zmiany. Tak więc w końcu otrzymamy transformację dualistyczną: (1,2,3,4,5) na (I,2',III,4',V),

Przyp. tórn.

²⁾ Odpowiednie twierdzenie dla geometrii o n wymiarach podałem w r. 1871 w Göttinger Nachrichten N° 7. Następnie zauważyłem jeszcze, że wszystkie przekształcenia przestrzeni R_n , zachowujące podobieństwo cząsteczkowe, mogą być utworzone z przesunięć, przekształceń zachowujących podobieństwo i przekształceń przez promienie odwrotne ^{*}). W związku z powyższem jest twierdzenie, polegające na tem, że jeżeli $x, \dots, x_n$ są takimi funkcjami-zmiennymi $y_1, y_2, \dots, y_n$, że

$$\sum dx^2 = \Phi(y_1, \dots, y_n) \sum dy^2,$$

to zachodzi równanie postaci:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) = \Pi(y_1, \dots, y_n) \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2.$$

Przyp. aut.

^{*}) Por. Lie, Theorie d. Transformationsgruppen, t. III, str. 351; pierwszy dowód tego ogólnego twierdzenia podał Darboux. Stosuje się on do przestrzeni o jakiegokolwiek liczbie wymiarów z wyjątkiem $n=2$. Przyp. tórn.

O RÓWNANIU O POCHODNYCH CZĄSTKOWYCH

$$\Delta u + \xi u + f = 0$$

I O FUNKCYACH HARMONICZNYCH.

NAPISAZ

S. ZAREMBA.

I. Wstęp.

1. Wiadomo, że różne pytania fizyki matematycznej prowadzą do zagadnienia następującego:

Niechaj $f(x, y, z)$ będzie funkcją daną spółrzędnych prostokątnych x, y, z punktu zmiennego, określoną w obszarze (D) , ograniczonym powierzchnią zamkniętą (S) , ξ zaś — parametrem zespolonym; wyznaczyć funkcję u zmiennych x, y, z , czyniącą zadość w całym obszarze (D) równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$(1) \quad \Delta u + \xi u + f(x, y, z) = 0,$$

gdzie:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

i gdzie nadto na ograniczeniu spełnia się warunek:

$$(2) \quad \frac{du}{dN} = hu,$$

w którym $\frac{du}{dN}$ oznacza pochodną funkcji u , wziętą według normalnej wewnętrznej, h zaś oznacza stałą rzeczywistą i nieujemną.