O całkowaniu pewnych równań różniczkowych rzędu drugiego.

NAPISAŁ

St. PAJĄK [1]).

W artykule tym podajemy rozwiązanie pewnego zagadnienia z teoryi przekształcania równań różniczkowych. Rachunki te są zastosowaniem ogólnej metody S. Liego [2]), a w danym razie zastosowanie to doprowadza do całkowania uważanej kategoryi równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego za pomocą kwadratur.

Niechaj będzie równanie:

$$\frac{d^2 v}{du^2} = \left(\frac{dv}{du}\right)^m, \tag{1}$$

gdzie m oznacza stałą określoną. Całkowanie tego równania można wykonać bezpośrednio i otrzymuje się rezultat:

$$v = \frac{(1-m)^{\frac{2-m}{1-m}}}{2-m} \cdot (u + C_1)^{\frac{2-m}{1-m}} + C_2, \tag{2}$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnemi stałemi całkowania.

Wykonajmy na równaniu (1) podstawienie postaci:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \end{aligned} \tag{3}$$

[1]) Z seminaryum matematycznego prof. K. Żorawskiego w Krakowie.

[2]) Archiv for Math. og Naturv., Christiania, 1883.

gdzie u i v są funkcyami zmiennych niezależnych x, y. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left(u_{10}+u_{01}\frac{dy}{dx}\right)^3}\Big\{(v_{20}u_{10}-u_{20}v_{10}) + \Big[2(v_{11}u_{10}-u_{11}v_{10})+(v_{20}u_{01}-u_{20}v_{01})\Big]\frac{dy}{dx} \\ &\quad + \Big[(v_{02}u_{10}-u_{02}v_{10}) + 2(v_{11}u_{01}-u_{11}v_{01})\Big]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &\quad + (v_{02}u_{01}-u_{02}v_{01})\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (v_{01}u_{10}-u_{01}v_{10})\frac{d^2y}{dx^2}\Big\} \\ &\quad - \frac{\left(v_{10}+v_{01}\frac{dy}{dx}\right)^m}{\left(u_{10}+u_{01}\frac{dy}{dx}\right)^m} = 0, \end{aligned}$$

gdzie dla skrócenia przyjęto oznaczenie:

$$\frac{\partial^{i+k}\Phi}{\partial x^i\,\partial y^k} = \Phi_{ik}.$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} &v_{01}u_{10} - u_{01}v_{10} = a, \\ &v_{20}u_{10} - u_{20}v_{10} = a; \quad v_{11}u_{10} - u_{11}v_{10} = b; \quad v_{02}u_{10} - u_{02}v_{10} = c, \\ &v_{02}u_{01} - u_{02}v_{01} = a', \quad v_{11}u_{01} - u_{11}v_{01} = b'; \quad v_{20}u_{01} - u_{20}v_{01} = c', \end{aligned} \tag{4}$$

oraz oznaczenia:

$$\begin{aligned} &A = \frac{a'}{a}, \quad B = \frac{2b'+c}{a}, \quad C = \frac{2b+c'}{a}, \quad D = \frac{a}{a}, \\ &F = \frac{v_{01}}{v_{10}}, \quad L = \frac{u_{01}}{u_{10}}, \quad E = \left(\frac{v_{10}}{u_{10}}\right)^{m-2} \cdot v_{10}, \end{aligned} \tag{5}$$

mieć będziemy równanie przekształcone postaci:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C\frac{dy}{dx} + D = \frac{\left(1+F\frac{dy}{dx}\right)^m \cdot E}{\left(1+L\frac{dy}{dx}\right)^{m-3} \cdot (F-L)}, \tag{6}$$

którą możemy napisać tylko wtedy, gdy żadna z wielkości u_{10}, v_{10} nie równa się zeru. Obie te wielkości równocześnie nie mogą być równe zeru, bo wtedy jakobian funkcyj u i v byłby równy zeru.

Zapytujemy teraz, które z równań postaci (6) istotnie można, za pomocą przekształcenia (3) zredukować do postaci (1), i jak znaleść to przekształcenie (3). Do tego celu prowadzą rozważania przekształceń grupy, przy których równanie (1) pozostaje bez zmiany. Niech takiem przekształceniem będzie:

$$Uf = \xi(u,v)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta(u,v)\frac{\partial f}{\partial v}, \tag{7}$$

gdzie funkcye ξ i η należy wyznaczyć z warunku, iż to przekształcenie nie zmienia równania (1). Biorąc waryacyę równania (1), mamy:

$$\frac{\delta v''}{\delta t} - m v'^{m-1}\frac{\delta v'}{\delta t} = 0,$$

co prowadzi do warunku:

$$\begin{aligned} &\eta_{20} + (2\eta_{11} - \xi_{20})v' + (\eta_{02} - 2\xi_{11})v'^2 - \xi_{02}v'^3 - m v'^{m-1}\eta_{10} \\ &- v'^m[(m-1)\eta_{01} - (m-2)\xi_{10}] + v'^{m+1}(m-3)\xi_{01} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

który musi być spełniony tożsamościowo, t. j. przy wszelkich wartościach v'. Do określenia przekształcenia otrzymujemy więc równania:

$$\begin{aligned} &\eta_{20} = 0, \quad 2\eta_{11} = \xi_{20}, \quad \eta_{02} = 2\xi_{11}, \quad \xi_{02} = 0, \quad \eta_{10} = 0, \\ &\xi_{01} = 0, \quad (m-1)\eta_{01} = (m-2)\xi_{10}. \end{aligned} \tag{9}$$

Z nich wynika, iż:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_3 u, \\ \eta &= c_2 + \frac{m-2}{m-1} c_3 v, \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są stałemi dowolnemi. Przekształcenie to ma miejsce w tych przypadkach, w których żadna z liczb: $(m-1)$, m, $(m+1)$ nie równa się 0, 1, 2, 3, t. j. gdy m nie równa się żadnej z liczb: — 1, 0, 1, 2, 3, 4. Ostatnie przypadki wyłączamy na razie z rozważania.

Równanie (1) pozostaje więc bez zmiany przy grupie trójczęściowej:

$$Uf = c_1\frac{\partial f}{\partial u} + c_2\frac{\partial f}{\partial v} + c_3\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{m-2}{m-1}v\frac{\partial f}{\partial v}\right). \tag{11}$$

Znajdźmy grupę, której podgrupą największą jest właśnie poprzednia grupa trójczęściowa. Z określenia podgrupy niezmiennej wynika, że oznaczając przekształcenie grupy szukanej:

$$Xf = \xi(u,v)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta(u,v)\frac{\partial f}{\partial v},$$

przekształcenia zaś podgrupy trójczęściowej przez:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad X_3 f = \beta u\frac{\partial f}{\partial u} + \gamma v\frac{\partial f}{\partial v},$$

mieć musimy:

$$\left\{\begin{aligned} (X_1X) &= \frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial\eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = \alpha_1\frac{\partial f}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial f}{\partial v} + \gamma_1\left(\beta u\frac{\partial f}{\partial u} + \gamma v\frac{\partial f}{\partial v}\right), \\ (X_2X) &= \frac{\partial\xi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial\eta}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = \alpha_2\frac{\partial f}{\partial u} + \beta_2\frac{\partial f}{\partial v} + \gamma_2\left(\beta u\frac{\partial f}{\partial u} + \gamma v\frac{\partial f}{\partial v}\right), \\ (X_3X) &= \beta u\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial\eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \gamma v\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial\eta}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right) - \beta\xi\frac{\partial f}{\partial u} - \gamma\eta\frac{\partial f}{\partial v} \\ &= \alpha_3\frac{\partial f}{\partial u} + \beta_3\frac{\partial f}{\partial v} + \gamma_3\left(\beta u\frac{\partial f}{\partial u} + \gamma v\frac{\partial f}{\partial v}\right). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Z tych tożsamości mamy równania:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \alpha_1 + \gamma_1\beta u, \quad \frac{\partial\eta}{\partial u} = \beta_1 + \gamma_1\gamma v,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = \alpha_2 + \gamma_2\beta u, \quad \frac{\partial\eta}{\partial v} = \beta_2 + \gamma_2\gamma v,$$

$$\beta u(\alpha_1 + \gamma_1\beta u) + \gamma v(\alpha_2 + \gamma_2\beta u) - \beta\xi = \alpha_3 + \gamma_3\beta u,$$

$$\beta u(\beta_1 + \gamma_1\gamma v) + \gamma v(\beta_2 + \gamma_2\gamma v) - \gamma\eta = \beta_3 + \gamma_3\gamma v.$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymamy:

$$\xi = \alpha_1 u + \gamma_1\beta u^2 + \frac{\gamma}{\beta}\alpha_2 v + \gamma_2\gamma uv - \frac{\alpha_3}{\beta} - \gamma_3 u,$$

$$\eta = \frac{\beta}{\gamma}\beta_1 u + \gamma_1\beta uv + \beta_2 v + \gamma_2\gamma v^2 - \frac{\beta_3}{\gamma} - \gamma_3 v,$$

Wartości powyższe muszą atoli czynić zadość także czterem pierwszym równaniom, gdyż one są jednoczesne z dwoma ostatniemi, z których określiliśmy ξ i η. Otrzymujemy tą drogą:

$$\beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0,$$

a stałe: α_1, β_2, α_3, β_3, pozostają dowolne. Otrzymamy przeto:

$$(13) \quad \begin{cases} \xi = \alpha_1 u - \dfrac{\alpha_3}{\beta}, \\[2ex] \eta = \beta_2 v - \dfrac{\beta_3}{\gamma}, \end{cases}$$

t. j. grupę czteroczęściową:

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad v\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Wiemy już, że równanie (1) pozostaje bez zmiany przy przekształceniach grupy, której nieskończenie małe przekształcenie ma postać:

$$(11) \qquad Uf = e_1\frac{\partial f}{\partial u} + e_2\frac{\partial f}{\partial v} + e_3\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{m-2}{m-1}v\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Aby otrzymać bliższe określenie szukanych funkcyj u i v, uważajmy grupę uzupełnioną względem pochodnych zmiennych u i v, branych co do x i y aż do drugiego rzędu włącznie; jej nieskończenie małe przekształcenie jest:

$$(14) \quad \begin{cases} Vf = e_1\dfrac{\partial f}{\partial u} + e_2\dfrac{\partial f}{\partial v} + e_3\Big(u\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{m-2}{m-1}v\dfrac{\partial f}{\partial v} + u_{10}\dfrac{\partial f}{\partial u_{10}} + u_{01}\dfrac{\partial f}{\partial u_{01}} \\[2ex] \quad + \dfrac{m-2}{m-1}v_{10}\dfrac{\partial f}{\partial v_{10}} + \dfrac{m-2}{m-1}v_{01}\dfrac{\partial f}{\partial v_{01}} + u_{20}\dfrac{\partial f}{\partial u_{20}} + u_{11}\dfrac{\partial f}{\partial u_{11}} \\[2ex] \quad + u_{02}\dfrac{\partial f}{\partial u_{02}} + \dfrac{m-2}{m-1}v_{20}\dfrac{\partial f}{\partial v_{20}} + \dfrac{m-2}{m-1}v_{11}\dfrac{\partial f}{\partial v_{11}} + \dfrac{m-2}{m-1}v_{02}\dfrac{\partial f}{\partial v_{02}}\Big). \end{cases}$$

Dla wyznaczenia niezmienników aż do drugiego rzędu włącznie mamy równania:

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial v} = 0, \\[2ex] V_1 f = u_{10}\dfrac{\partial f}{\partial u_{10}} + u_{01}\dfrac{\partial f}{\partial u_{01}} + \dfrac{m-2}{m-1}v_{10}\dfrac{\partial f}{\partial v_{10}} + \dfrac{m-2}{m-1}v_{01}\dfrac{\partial f}{\partial v_{01}} + u_{20}\dfrac{\partial f}{\partial u_{20}} \\[2ex] \quad + u_{11}\dfrac{\partial f}{\partial u_{11}} + u_{02}\dfrac{\partial f}{\partial u_{02}} + \dfrac{m-2}{m-1}v_{20}\dfrac{\partial f}{\partial v_{20}} + \dfrac{m-2}{m-1}v_{11}\dfrac{\partial f}{\partial v_{11}} \\[2ex] \quad + \dfrac{m-2}{m-1}v_{02}\dfrac{\partial f}{\partial v_{02}} = 0. \end{cases}$$

Niezmienników rzędu pierwszego od siebie niezależnych jest trzy i łatwo sprawdzić, że są one następujące:

$$(16) \qquad I = \frac{u_{01}}{u_{10}}, \quad K = \frac{v_{01}}{v_{10}}, \quad G = \left(\frac{v_{10}}{u_{10}}\right)^{m-2} \cdot v_{10}.$$

Niezmienników rzędu drugiego od siebie niezależnych jest sześć. Otrzymać je można albo przez różniczkowanie względem x i y niezmienników rzędu pierwszego, albo przez całkowanie równania:

$$V_1 f = 0.$$

Widoczna, że mamy niezmienniki:

$$(17) \quad \begin{cases} i' = \dfrac{u_{11}}{u_{10}}, \quad k' = \dfrac{v_{11}}{v_{10}}, \\[2ex] i'' = \dfrac{u_{20}}{u_{10}}, \quad k'' = \dfrac{v_{20}}{v_{10}}, \\[2ex] i''' = \dfrac{u_{02}}{u_{10}}, \quad k''' = \dfrac{v_{02}}{v_{10}}; \end{cases}$$

przez różniczkowanie zaś niezmienników rzędu 1-go otrzymujemy:

$$(17') \qquad I_{10}, \quad I_{01}, \quad K_{10}, \quad K_{01}, \quad G_{10}, \quad G_{01},$$

których wyrażenia przez poprzednie są:

$$(18) \quad \begin{aligned} I_{10} &= i' - Ii'', & I_{01} &= i''' - Ii', \\ K_{10} &= k' - Kk'', & K_{01} &= k''' - Kk', \\ G_{10} &= (m-1)\,Gk'' - (m-2)\,Gi'', & G_{01} &= (m-1)\,Gk' - (m-2)\,Gi'. \end{aligned}$$

Można też oczywiście niezmienniki (17) wyrazić przez niezmienniki (17′) i to w postaci:

$$i' = \frac{1}{(m-2)\,G(I-K)}\{I(KG_{10}-G_{01})+G[(m-1)IK_{10}-(m-2)KI_{10}]\},$$

$$i'' = \frac{1}{(m-2)\,G(I-K)}\{KG_{10}-G_{01}+G[(m-1)K_{10}-(m-2)I_{10}]\},$$

$$i''' = \frac{1}{(m-2)\,G(I-K)}\{I^2(KG_{10}-G_{01})+(m-2)\,IG\,(I_{01}-KI_{10})$$

(19) $$+\,G[(m-1)\,I^2K_{10}-(m-2)\,KI_{01}]\},$$

$$k' = \frac{1}{(m-1)\,G(I-K)}\{K(IG_{10}-G_{01})+G[(m-1)IK_{10}-(m-2)KI_{10}]\},$$

$$k'' = \frac{1}{(m-1)\,G(I-K)}\{IG_{10}-G_{01}+G[(m-1)K_{10}-(m-2)I_{10}]\},$$

$$k''' = \frac{1}{(m-1)\,G(I-K)}\{K^2(IG_{10}-G_{01})+(m-1)\,KG\,(IK_{10}-K_{01})$$

$$+\,G[(m-1)\,IK_{01}-(m-2)\,K^2I_{10}]\}.$$

Przez różniczkowanie niezmienników (17) rzędu drugiego względem zmiennych x i y otrzymuje się dziesięć niezmienników rzędu trzeciego:

(20) $$\begin{array}{lllll} i'_{10}, & i'_{01}, & i''_{10}, & i'''_{10}, & i'''_{01}; \text{ niezmiennik } i''_{01} \equiv i'_{10}, \\ k'_{10}, & k'_{01}, & k''_{10}, & k'''_{10}, & k'''_{01}; \quad \text{"} \quad k''_{01} \equiv k'_{10}. \end{array}$$

One zależą odpowiednio od następujących pochodnych rzędu trzeciego:

(21) $$\begin{array}{lllll} u_{21}, & u_{12}, & u_{30}, & u_{12}, & u_{03}, \\ v_{21}, & v_{12}, & v_{30}, & v_{12}, & v_{03}. \end{array}$$

Z zależności tej widać, iż między temi niezmiennikami mogą istnieć dwa związki różniczkowe, jak być zresztą powinno, bo niezależnych niezmienników rzędu trzeciego może być tylko ośm. Związki te są:

(22) $$\begin{aligned} i'_{01}+i'^2 &= i'''_{10}+i''.\,i''', \\ k'_{01}+k'^2 &= k'''_{10}+k''.\,k'''. \end{aligned}$$

Wprowadzając w nie za i'', i''', k'', k''' wartości ze związków (18), możemy je doprowadzić do postaci:

$$I(i'_{01}-I_{11}-I.\,i'_{10})-I_{01}(i'-I_{10}) = 0,$$

$$K(k'_{01}-K_{11}-Kk'_{10})-K_{01}(k'-K_{10}) = 0,$$

lub oznaczając:

$$i'-I_{10} = \lambda, \quad k'-K_{10} = \mu,$$

mamy jeszcze inną postać:

(22′) $$\begin{aligned} I(\lambda_{01}-Ii'_{10})-I_{01}\lambda &= 0, \\ K(\mu_{01}-Kk'_{10})-K_{01}\mu &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli w te związki z jednej strony za λ, λ_{01}, i'_{10}, z drugiej strony za μ, μ_{01} k'_{10} wstawimy wartości określone ze wzorów (19), to przekonamy się, iż oba związki są identyczne i wyrażają się wspólnym jednym wzorem, którego postać przy uwzględnieniu oznaczeń:

$$\varrho = IK_{10}-K_{01},$$

$$\sigma = KI_{10}-I_{01},$$

jest:

(23) $$\begin{aligned} &(I-K)\{(m-2)\,G^2(I_{11}-KI_{20})+G(G_{02}+IKG_{20})-(m-1)\,G^2(K_{11}-IK_{20}) \\ &\quad +(I+K)\,(G_{10}G_{01}-GG_{11})-(IKG^2_{10}+G^2_{01})\} \\ &+(\varrho-\sigma)\{(m-1)\,G^2K_{10}-GG_{01}-(m-2)\,G^2I_{10}\}+GG_{10}(I\varrho-K\sigma) = 0. \end{aligned}$$

Niezmienników niezależnych rzędu 4-go będzie 10, w ogóle niezależnych niezmienników rzędu n-go będzie $2(n+1)$. Wiedząc to, można okazać, że pomiędzy pochodnemi rzędu drugiego funkcyj I, K, G nie istnieją żadne inne związki prócz (23), a między pochodnemi rzędów wyższych tylko związki, wynikające z (23) przez różniczkowanie względem x i y.

Uważajmy układ niezależnych od siebie niezmienników rzędu n-go:

$$\begin{array}{llllll} i'_{n-2,\,0}, & i'_{n-3,\,1}, & \ldots\ldots, & i'_{0,\,n-2}, & i''_{n-2,\,0}, & i'''_{0,\,n-2}, \\ (u_{n-1,\,1}, & u_{n-2,\,2}, & \ldots\ldots, & u_{1,\,n-1}, & u_{n,\,0}, & u_{0,\,n}) \\ k'_{n-2,\,0}, & k'_{n-3,\,1}, & \ldots\ldots, & k'_{0,\,n-2}, & k''_{n-2,\,0}, & k'''_{0,\,n-2}, \\ (v_{n-1,\,1} & v_{n-2,\,2}, & \ldots\ldots, & v_{1,\,n-1}, & v_{n,\,0}, & v_{0,\,n}), \end{array}$$

gdzie wskazano od jakich pochodnych rzędu n-go zależą te niezmienniki. Wszystkich niezmienników rzędu n-go, otrzymujących się przez różniczko-

icm©

wanie z i', i'', i''', k', k'', k''', jest $6(n-1)$, mamy przeto $6(n-1)-2(n+1)=4(n-2)$ niezmienników zależnych, które są:

$$i''_{n-3,1},\ i''_{n-4,2},\ \ldots\ldots,\ i''_{0,n-2},\ i'''_{n-2,0},\ i'''_{n-3,1},\ \ldots\ldots,\ i'''_{1,n-3},$$

$$(u_{n-1,1},\ u_{n-2,2},\ \ldots\ldots,\ u_{2,n-2},\ u_{n-2,2},\ u_{n-3,3},\ \ldots\ldots,\ u_{1,n-1}),$$

$$k''_{n-3,1},\ k''_{n-4,2},\ \ldots\ldots,\ k''_{0,n-2},\ k'''_{n-2,0},\ k'''_{n-3,1},\ \ldots\ldots,\ k'''_{1,n-3},$$

$$(v_{n-1,1},\ v_{n-2,2},\ \ldots\ldots,\ v_{2,n-2},\ v_{n-2,2},\ v_{n-3,3},\ \ldots\ldots,\ v_{1,n-1}).$$

Atoli między niemi są ze sobą identyczne; ponieważ były dwa niezmienniki 3-go rzędu identyczne, więc identycznych niezmienników rzędu n-go będzie $2(n-2)$; różnych więc od siebie zależnych niezmienników będzie: $4(n-2)-2(n-2)=2(n-2)$. Oprócz zatem tych identyczności tyle powinno istnieć związków między niezmiennikami n-go rzędu. Różniczkując związki (22) rzędu trzeciego $n-3$ razy względem zmiennych x i y, otrzymamy właśnie $2(n-2)$ związków różniczkowych, a więc wszystkie możliwe. Ponieważ związki (22) były ze sobą identyczne, więc odmiennych od siebie związków między niezmiennikami n-go rzędu będzie tylko $n-2$, t. j. tyle, ile otrzymuje się przez różniczkowanie ze związku (23), co właśnie należało udowodnić.

Spółczynniki równania (6) możemy wyrazić przez niezmienniki rzędu pierwszego i drugiego. Korzystając ze wzorów (5), (16) i (17) mamy:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &L = I,\quad F = K,\quad E = G,\\ &A = \frac{k'''.\,I - i'''.\,K}{K-I},\\ &B = \frac{2(k'I - i'K) + k''' - i'''}{K-I},\\ &C = \frac{2(k'-i') + Ik'' - Ki''}{K-I},\\ &D = \frac{k''-i''}{K-I}, \end{aligned}\right.$$

gdzie $K-I$ jest odmienne od zera, bo w przeciwnym razie jakobian funkcyj u, v byłby równy zeru; stąd wynika, że L i F muszą być od siebie odmienne.

Zważywszy, że wszystkie niezmienniki wyrażają się przez I, K, G i ich pochodne, widzimy, że pomiędzy spółczynnikami równania (6) musi istnieć szereg związków różniczkowych, które otrzymamy, korzystając ze wzorów (19) i (23). Związki te są następujące:

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &(m-1)(m-2)E(L-F)\{L(A+F_{01}) - F(A-L_{01})\} - F^2L^2E_{10}\\ &+ FLE_{01}\{(m-1)L - (m-2)F\} - FL.E\{(m-1)LF_{10}\\ &\qquad - (m-2)FL_{10}\} = 0,\\ &(m-1)(m-2)E(L-F)\{B(L-F) - (L_{01}-F_{01})\} + E_{01}\{(m-1)L^2\\ &+ 2FL - (m-2)F^2\} + \{(m-3)L - nF\}.[E\{(m-1)LF_{10}\\ &\qquad - (m-2)FL_{10}\} + LFE_{10}] = 0,\\ &(m-1)(m-2)CE(L-F)^2 + E_{10}\{(m-2)L^2 - 2FL - (m-1)F^2\}\\ &+ E_{01}\{mL - (m-3)F\} + (m-1)EF_{10}\{(m-4)L - (m-1)F\}\\ &\qquad - (m-2)EL_{10}\{(m-2)L - (m+1)F\} = 0,\\ &(m-1)(m-2)DE(L-F)^2 + E_{10}\{(m-2)L - (m-1)F\} + E_{01}\\ &\qquad + E\{(m-2)L_{10} - (m-1)F_{10}\} = 0,\\ &E^2\{(L-F)[(m-2)(L_{11} - FL_{20}) - (m-1)(F_{11} - LF_{20})]\\ &+ (LF_{10} - F_{01} - FL_{10} + L_{01}).[(m-1)F_{10} - (m-2)L_{10}]\}\\ &+ E\{(L-F)(E_{02} + LFE_{20}) - E_{11}(L^2 - F^2)\\ &- E_{01}(LF_{10} - F_{01} - FL_{10} + L_{01}) + E_{10}[L(LF_{10} - F_{01})\\ &- F(FL_{10} - L_{01})]\} + E_{10}E_{01}(L^2 - F^2) - (L-F)(LFE_{10}^2 + E_{01}^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Związki te są warunkami koniecznemi i dostatecznemi na to, ażeby równanie postaci (6) można było za pomocą podstawienia kształtu (3) doprowadzić do równania (1)

Załóżmy teraz, że te związki (25) rzeczywiście są spełnione i zapytajmy, jak określić przekształcenie (3), za pomocą którego istotnie możnaby było wykonać tę redukcyę. Łatwo dostrzedz, że to określenie wykonać można za pomocą kwadratur. Istotnie zobaczymy zaraz, że niezmienniki I, i', i'', K, k', k'' można wyrazić przez spółczynniki równania, a zważywszy na wyrażenia tych niezmienników przez pochodne u i v, widzimy, że u_{10} określi się ze wzoru:

$$(26)\qquad \log u_{10} = \int (i''\,dx + i'\,dy),$$

gdzie warunek całkowalności spełniony jest na mocy wzorów (20). Ażeby w dalszym ciągu wyznaczyć u, należy wykonać kwadraturę:

$$(27)\qquad u = \int (u_{10}\,dx + u_{10}\,I\,dy),$$

gdzie warunek całkowalności jest także spełniony.

Tak samo określimy v na podstawie wzorów:

$$(28)\qquad \log v_{10} = \int (k'' dx + k' dy), \quad v = \int (v_{10} dx + v_{10} K dy).$$

Rzeczone niezmienniki można otrzymać jako funkcye wielkości L, F, E i ich pochodnych na mocy pierwszych trzech z równań (24) oraz pierwszego, drugiego, czwartego i piątego z równać (19). Ponieważ w przypadku, który uważamy, ani u_{10} ani v_{10} nie równa się zeru, więc z tych wzorów nasze niezmienniki istotnie można określić.

W poprzednim przypadku ogólnym zakładaliśmy, że ani u_{10} ani v_{10} nie równa się zeru. Przypuszczając teraz, że naprzód $u_{10} = 0$, otrzymamy równanie różniczkowe kształtu:

$$29)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(1 + F\frac{dy}{dx}\right)^m . E}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-3}},$$

gdzie spółczynniki A, B, C, E, F wyrażają się przez pochodne cząstkowe, jak następuje:

$$(30)\qquad \begin{aligned} A &= -\frac{v_{02}}{v_{10}} + \frac{u_{02}}{u_{01}} . \frac{v_{01}}{v_{10}}, \quad B = -2\frac{v_{11}}{v_{10}} - \frac{u_{02}}{u_{01}}, \\ C &= -\frac{v_{20}}{v_{10}}, \quad E = \left(\frac{v_{10}}{u_{01}}\right)^{m-2} . v_{10}, \quad F = \frac{v_{01}}{v_{10}}. \end{aligned}$$

Za pomocą takich samych rozumowań jak poprzednio łatwo dostrzedz, że, by można było stosować powyższą metodę, muszą być spełnione związki warunkowe między spółczynnikami i ich pochodnemi cząstkowemi aż do 2-go rzędu włącznie, następujące:

$$(31)\qquad \begin{cases} (m-2)E\{A + F_{01} + FF_{10}\} + E_{01}F = 0, \\ (m-2)E\{B + 2F_{10}\} + E_{10}F + E_{01} = 0, \\ (m-2)EC + E_{10} = 0, \\ E\{(m-2)EF_{20} + FE_{20} - E_{11} + E_{10}F_{10}\} - FE^2_{10} + E_{10}E_{01} = 0, \end{cases}$$

Jeżeli warunki te są spełnione, to przy pomocy niezmienników i, k', k'' K których wyrażenia przez spółczynniki są:

$$(32)\qquad \begin{cases} i = \frac{1}{(m-2)E}(E_{10}F - E_{01}), \\ k' = \frac{1}{(m-2)E}\{(m-2)EF_{10} + E_{10}F\}, \\ k'' = \frac{1}{(m-2)E} . E_{10}, \\ K = F, \end{cases}$$

można obliczyć szukane przekształcenie na podstawie wzorów:

$$(33)\qquad \begin{aligned} &\log u_{01} = \int i\, dy, \quad u = \int u_{01}\, dy, \\ &\log v_{10} = \int (k'' dx + k' dy), \quad v = \int (v_{10} dx + K v_{10} dy). \end{aligned}$$

Warunki całkowalności tych dwumianów są spełnione na mocy związków ograniczających stosowalność metody.

Przypuszczając wreszcie, że $v_{10} = 0$, otrzymamy równanie różniczkowe kształtu:

$$(34)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C\frac{dy}{dx} = \frac{E . \left(\frac{dy}{dx}\right)^m}{\left(1 + L\frac{dy}{dx}\right)^{m-3}},$$

gdzie:

$$(35)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{v_{02}u_{01}}{v_{01}u_{10}} - \frac{u_{02}}{u_{10}}, \quad B = \frac{v_{02}}{v_{01}} - 2\frac{u_{11}}{u_{10}}, \\ C &= -\frac{u_{20}}{u_{10}}, \quad E = \left(\frac{v_{01}}{u_{10}}\right)^{m-2} . v_{01}, \quad L = \frac{u_{01}}{u_{10}}. \end{aligned}$$

W analogiczny jak poprzednio sposób znajdujemy następujące związki, określające stosowalność metody:

$$(36)\qquad \begin{cases} (m-2)E(A + L_{01} + LL_{10}) - LE_{01} = 0, \\ (m-2)E(B + 2L_{10}) - E_{01} - LE_{10} = 0, \\ (m-2)EC - E_{10} = 0, \\ E\{(m-2)EL_{20} - LE_{20} + E_{11} - E_{10}L_{10}\} + LE^2_{10} + E_{10}E_{01} = 0. \end{cases}$$

Przy zachowaniu warunków (36) możemy za pomocą niezmienników k, i', i'', I, których wyrażenia przez spółczynniki są:

$$(37)\quad \begin{cases} k = \dfrac{1}{(m-2)\,E}\,(E_{01} - L E_{10}), \\[2ex] i' = \dfrac{1}{(m-2)\,E}\,\{(m-2)\,E L_{10} - E_{10} L\}, \\[2ex] i'' = -\dfrac{1}{(m-2)\,E}\cdot E_{10}, \\[2ex] I = L, \end{cases}$$

znaleść szukane przekształcenie na podstawie wzorów:

$$(38)\quad \begin{cases} \log v_{01} = \int k\,dy, \quad v = \int v_{01}\,dy, \\[2ex] \log u_{10} = \int (i''\,dx + i'\,dy), \quad u = \int (u_{10}\,dx + I u_{10}\,dy). \end{cases}$$

Warunki całkowalności tych dwumianów są spełnione na mocy związków, ograniczających stosowalność metody.

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że m nie równa się żadnej z liczb $-1, 0, 1, 2, 3, 4$. Zwracając się teraz do tych przypadków wyjątkowych, załóżmy najpierw, że $m = -1$. W tym przypadku nieskończenie małe przekształcenia grupy określają się z równań:

$$(39)\qquad \eta_{20} = 4\,\xi_{01},\ 2\eta_{11} = \xi_{20},\ \eta_{02} = 2\,\xi_{11},\ \xi_{02} = 0,\ \eta_{10} = 0,\ 2\,\eta_{01} = 3\,\xi_{10},$$

i łatwo dostrzedz, że te równania są jednobrzmiące z równaniami (9), t. j. że otrzymujemy tę samą grupę, co poprzednio.

To samo można powiedzieć o przypadku $m=4$, w którym otrzymujemy równania:

$$(40)\qquad \eta_{20} = 0,\ 2\eta_{11} = \xi_{20},\ \eta_{02} = 2\xi_{11},\ \xi_{02} + 4\eta_{10} = 0,\ \xi_{01} = 0,\ 3\eta_{01} = 2\xi_{10},$$

które znowu są jednobrzmiące z równaniami (9).

Pozostają zatem jeszcze do osobnego traktowania przypadki $m=0,1,2,3$. W każdym z tych przypadków można równanie (1) za pomocą odpowiedniego przekształcenia doprowadzić do postaci:

$$\frac{d^2\bar{v}}{d\bar{u}^2} = 0.$$

Przekształcenia te są następujące:

$$\text{dla } m = 0 : u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} + \frac{\bar{u}^2}{2},$$

$$\text{„ } m = 1 : \bar{u} = e^{u}, \quad \bar{v} = v,$$

$$\text{„ } m = 2 : \bar{u} = u, \quad \bar{v} = e^{-v},$$

$$\text{„ } m = 3 : u = \bar{u} - \frac{\bar{v}^2}{2}, \quad v = \bar{v}.$$

Zatem w czterech tych przypadkach dojdziemy do równania, które pozostaje bez zmiany przy grupie przekształcań rzutowych.

Równania, które można zredukować do tego typu, mają inną teoryę całkowania, doprowadzającą do całkowania równania liniowego rzędu 3-go i do kwadratur. Rachunki, odnoszące się do tego przypadku, znajdujemy w części rozwinięte w zacytowanej wyżej pracy S. Liego i one nie wchodzą już w zakres niniejszego artykułu.