I na odwrót: każda krzywa stopnia 5-go posiadająca punkt, w którym jest styczna do siebie samej, może być odtworzona na krzywą stopnia 6-go w przestrzeni przecięcia się stożka z inną powierzchnią.

Wiedząc to, weźmy wspomniane równanie Valentina. Ma ono kształt:

$$y^3 + y\, f_2(x) + f_5(x) = 0,$$

gdzie $f_2(x)$, $f_5(x)$ są wielomianami stopnia odpowiednio 2-go i 5-go względem x: $f_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$; $f_5 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_5 x^5$. Wprowadzając spółrzędne jednorodne:

$$x = \frac{\zeta}{\xi}, \quad y = \frac{\eta}{\xi},$$

otrzymamy równanie:

$$\xi^2 \eta^3 + \xi\,\eta\, f_2(\xi,\zeta) + f_5(\xi,\zeta) = 0.$$

Przy pomocy metody Cramera łatwo znaleść, że krzywa, przedstawiona przez ostatnie równanie, posiada w okolicy wierzchołka trójkąta odniesienia $\xi = 0$, $\zeta = 0$ kształt krzywej:

$$\xi^2 \eta^3 + b_5 \zeta^5 = 0,$$

t. j. że w tym punkcie posiada punkt zwrotu „podwójny", w którym prosta $\xi = 0$ ma z krzywą pięć punktów spólnych. Jest to więc rzeczywiście punkt, w którym krzywa jest do siebie samej styczna.

Nadto: Z równania powyższego łatwo jest znaleść równania stożka i powierzchni stopnia 3-go; mnożąc bowiem to równanie przez ξ i podstawiając:

$$\varrho x_1 = \xi^2, \quad \varrho x_2 = \xi\eta, \quad \varrho x_3 = \xi\zeta, \quad \varrho x_4 = \zeta^2,$$

otrzymamy:

$$x_1 x_4 - x_3^2 = 0.$$

jako równanie stożka; zaś

$$x_2^3 + a_0 x_1^2 x_2 + a_1 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_2 x_4 + a_3 x_2 x_0 x_4$$
$$+ b_0 x_1^3 + b_1 x_1^2 x_3 + b_2 x_1 y_3^2 + h_3 x_3^3 + b_4 x_3^2 + b_5 x_3 x_4^2 = 0,$$

jako równanie powierzchni stopnia trzeciego (jednej z pięciu).

TWIERDZENIA OGÓLNE O CAŁKOWANIU ROŻNICZEK ABELOWYCH W POSTACI SKOŃCZONEJ.

PODAŁ

J. PTASZYCKI.

1. Twierdzenie Abela o formie, w której przedstawić można wartość całki abelowej, wyrażającej się w postaci skończonej, dało początek badaniom o najprostszych zadaniach natury algebraicznej, do których można sprowadzić pytanie o całkowaniu danej różniczki w postaci skończonej.

W badaniach tego rodzaju roztrząsane były dotychczas głównie te przypadki, kiedy dana funkcya algebraiczna nie jest dowolną, lecz tej lub innej postaci szczególnej. Przy obecnym wszakże stanie teoryi funkcyj algebraicznych łatwo rozciągnąć niektóre rezultaty, otrzymane w przypadkach szczególnych, na przypadek funkcyi algebraicznej ogólnej. Przegląd tych rezultatów uogólnionych stanowi cel główny pracy niniejszej; przy tem, dla pełności wykładu, nie wykluczamy z niej i tych wyników, na które przed nami zwrócono już uwagę.

2. Zadanie tedy, o którem mówić mamy, jest następujące:

Niech $F(x,y) = 0$ przedstawia równanie nieprzywiedlne danej krzywej [1]) algebraicznej rodzaju p; niech $f(x,y)$ będzie daną funkcyą wymierną zmiennych x i y; zbadać, czy całka

$$\int f(x,y)\, dx$$

[1]) Nazwa krzywej nie ma tu w ogóle realnego geometrycznego przedstawienia i użyta jest jedynie dla dogodności. W podobnym celu, pojmując przez a, b jakiebądź wartości, czyniące zadość równaniu $F=0$, mówić będziemy o punkcie (a, b) na krzywej. W następstwie punkt (a, b) będziemy oznaczali jedną literą a.

wyraża się w postaci skończonej i, w razie odpowiedzi twierdzącej, wyznaczyć wartość tej całki.

Postaramy się wykazać, do jakich zadań najprostszych natury algebraicznej zadanie powyższe może być sprowadzone. Zobaczymy równocześnie, iż w pewnych razach może być ono nawet zupełnie rozwiązanem.

W badaniach naszych wychodzimy z twierdzenia zasadniczego Abela o którem mowa w N. 1; twierdzenie to jest następujące: Jeżeli całka $\int f(x,y)\,dx$ wyraża się w postaci skończonej, wtedy wartość jej może być wyznaczona według wzoru:

$$\int f(x,y)\,dx = \psi(x,y) + \sum A \log\varphi(x,y),$$

gdzie ψ, φ są funkcyami wymiernemi zmiennych x i y, A—spółczynnikami stałemi; suma Σ zawiera skończoną liczbę wyrazów.

Redukcya pierwsza.

3. Zwracając się do zadania N. 2 o całce $\int f(x,y)\,dx$, przedstawimy ją naprzód w postaci:

$$\begin{aligned} & a_1 I'_1 + \ldots\ldots + a_p I'_p \\ & + b_1 I''_1 + \ldots\ldots + b_p I''_p \\ & + c_1 I'''_1 + c_2 I'''_2 + \ldots\ldots + \psi_0(x,y), \end{aligned}$$

gdzie ψ_0 jest funkcyą wymierną; a, b, c—są spółczynnikami stałemi; $I'_1 \ldots I'_p$ całkami gatunku pierwszego liniowo-niezależnemi; $I''_1 \ldots I''_p$ całkami zasadniczemi gatunku drugiego; $I_1''', I_2''' \ldots$ całkami gatunku trzeciego.

Co do całek I', I'', I''', to zakładamy, że są tu one normowanemi według pewnego określonego sposobu, np. według metody Nöthera (Math. Ann. t. XXXVII). Powyższe przedstawienie całki, jak wiadomo, zawsze jest możliwe i da się uskutecznić za pomocą działań algebraicznych.

4. Weźmy następnie pod uwagę:

1) własność całek I', I'', według której żadna ich funkcya liniowa całkowita o spółczynnikach stałych nie może równać się funkcyi wymiernej zmiennych x i y;

2) własność funkcyj algebraicznych, a także całek I', I'', I''' co do zachowania się ich w miejscach nieskończonościowych;

3) pewną własność wyrażenia logarytmowego $\Sigma A \log\varphi(x,y)$ co do zachowania się w miejscach nieskończonościowych: jeżeli w punkcie a krzywej $F=0$, niektóre wyrazy sumy stają się nieskończonemi, wtedy, oczywiście, cała sama staje się nieskończoną w ten sam sposób, jak $B\log(x-a)$, gdzie $B = \Sigma An$, n zaś są liczby wymierne; otóż, jeśli teraz przypuścimy, że nasza suma jest sprowadzoną do możliwie najmniejszej liczby wyrazów, wtedy napewno mieć będziemy $B \neq 0$.

Własność ta, mniej znana od dwóch poprzednich, daje się udowodnić w kilku słowach: przypuśćmy, że $B=0$, t. j. że $\Sigma An=0$; pozwoliłoby to, wbrew założeniu, przedstawić naszą sumę przez mniejszą liczbę wyrazów logarytmowych, nie zmieniając wcale ich natury.

5. Zasadzając się na N. 4, możemy odrazu sprawdzić następujące własności całki N. 3:

I. Aby całka wyrażała się jedynie przez funkcye algebraiczne, koniecznym i dostatecznym jest warunek, by w przedstawieniu N. 3 całki było:

$$a_1 = \ldots = a_p = 0, \quad b_1 = \ldots = b_p = 0, \quad c_1 = c_2 = \ldots = 0.$$

II. Jeżeli spółczynniki $b_1, \ldots, b_p$ nie wszystkie są równe zeru, całka nie wyraża się w postaci skończonej.

III. Jeżeli $c_1 = c_2 = \ldots = 0$, i spółczynniki $a_1, \ldots, a_p$; $b_1, \ldots, b_p$ nie wszystkie są równe zeru, całka nie wyraża się w postaci skończonej.

IV. Jeżeli $\psi_0(x,y) = 0$ i $b_1 = \ldots = b_p = 0$, wtedy całka wyraża się jedynie przez logarytmy, o ile tylko wyraża się w postaci skończonej.

6. Te twierdzenia wskazują, że sprowadzenie całki danej do postaci N. 3, pozwoli rozróżnić trzy przypadki w zadaniu N. 2: albo otrzymamy na to zadanie odpowiedź twierdzącą i równocześnie wyznaczymy wartość całki (twierdzenie I), albo otrzymamy odpowiedź przeczącą (twierdzenia II, III), albo, nareszcie, sprowadzimy zadanie do innego bardziej prostego, jeżeli wnależyty sposób skorzystamy z twierdzenia IV.

A mianowicie, jeżeli mamy $b_1 = \ldots = b_p = 0$ i nie wszystkie spółczynniki $c_1, c_2, \ldots$ są równe zeru, w takim razie kładąc:

$$f(x,y) - \frac{d\psi_0(x,y)}{dx} = f_1(x,y),$$

przejdziemy do zadania następującego:

Zbadać, czy całka $\int f_1(x,y)\,dx$ wyraża się przez logarytmy, t. j. przez $\Sigma A \log\varphi(x,y)$. Do tego uproszczonego zadania zwrócimy się w N. 9.

7. Twierdzenie I przypisują Weierstrassowi (zob. Acta math. t. X, str. 281)

Twierdzenia II, III, IV przedstawiają uogólnienie twierdzeń Liouville'a (J. de l'école polyt. cah. XXIII) i Czebyszewa (J. de math., 1853), podanych dla przypadku, kiedy y jest pierwiastkiem z wielomianu.

8. Zwróćmy tutaj uwagę na to, że twierdzenia II i III w przypadku, w którem p, t.j. rodzaj krzywej $F=0$, jest większy od zera, dają możność wskazania takich całek, które na pewno nie wyrażają się w postaci skończonej. Ta uwaga pozwala nam wypowiedzieć wniosek następujący:

Aby całka $\int f(x,y)\,dx$ przy każdej wartości funkcyi $f(x,y)$ wyrażała się w postaci skończonej, koniecznym i dostatecznym jest warunek, aby krzywa $F(x,y)=0$, od której całka zależy, była jednobieżną.

Redukcya druga.

9. Zwracając się do zadania N. 6 o wyrażeniu przez logarytmy całki $\int f_1(x,y)\,dx$, bierzemy ją w postaci:

$$a_1 I_1' + \;.\;.\;.\;.\;.\; + a_p I_p'$$
$$+ c_1 I_1''' + c_2 I_2''' + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;,$$

wskazanej w N. 3.

Przekształćmy obecnie to przedstawienie. Dajmy, że spółczynniki $c_1, c_2, \ldots$ są wyrażone przez funkcye liniowo-jednorodne ze spółczynnikami całkowitemi możliwie najmniejszej liczby pewnych wielkości stałych, a mianowicie, niechaj będzie:

$$c_1 = n_1^{(1)} \sigma_1 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + n_1^{(s)} \sigma_s\,,$$
$$c_2 = n_1^{(1)} \sigma_1 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + n_2^{(s)} \sigma_s\,,$$
$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

gdzie wszystkie liczby n są całkowitemi. Na tej podstawie część

$$c_1 I_1''' + c_2 I_2''' + \;.\;.\;.\;.\;.$$

danej całki możemy zastąpić sumą s wyrazów postaci:

$$\sigma\,[n_1 I_1''' + n_2 I_2''' + \;.\;.\;.\;].$$

10. Przepisawszy w ten sposób całkę, możemy sprowadzić zadanie N. 6 o wyrażeniu tej całki przez logarytmy do pytania prostszego, a mianowicie do s zadań typu następującego:

Zbadać, czy całkę, równą $n_1 I_1''' + n_2 I_2''' + \ldots\ldots$, można przedstawić w postaci $\frac{1}{m}\log\varphi(x,y) - I'$, gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią, I' — całką gatunku pierwszego.

Tę redukcyę zadania N. 6 podał Goursat [1]) (Comptes rendus, 1894) i szczegółowy jej opis można znaleść w dziele: Appell et Goursat, Théorie des fonctions algébriques.

Odpowiada ona redukcyi, wskazanej przez Czebyszewa (Jour. de math., 1853) dla przypadku, w którym y jest pierwiastkiem z wielomianu.

11. Redukcyę N. 10 należy jeszcze uzupełnić przez twierdzenie następujące:

Aby całka N. 9 wyrażała się przez logarytmy, koniecznem i dostatecznem, by spełniały się dwa warunki: wszystkie s zadań N. 10 powinny mieć odpowiedź twierdzącą i oprócz tego suma s wyrazów kształtu $\sigma I'$ (gdzie I' określa się przez rozwiązanie tych zadań), powinna się sprowadzić do części $a_1 I_1' + \ldots a_p I_p'$.

Że przy spełnieniu się warunku pierwszego, drugi będzie tu dostatecznym — to oczywista; a że będzie on i koniecznym, wypływa to zaraz z twierdzenia III N. 5.

12. Zadanie N. 10 jest oczywiście równoważne z następującem:

Zbadać, czy istnieje funkcya wymierna $\varphi(x,y)$ i liczba całkowita dodatnia m takie, że funkcya φ pozostaje skończoną i różną od zera we wszystkich punktach krzywej $F(x,y)=0$, przy wyłączeniu q punktów danych $a_1, a_2, \ldots, a_q$, które powinny być miejscami zerowemi m-krotnemi, oraz q innych punktów danych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, które powinny być miejscami nieskończonościowemi m-krotnemi dla funkcyi szukanej φ.

Do tego zadania zwrócimy się w N. 16; uprzednio zaś w N. 13 uczynimy jednę uwagę co do liczby q, wskazanej w naszem zadaniu.

Uwaga. Wypowiadając ostatnie zadanie korzystaliśmy, dla dogodności, z oznaczeń odmiennych od tych, których używaliśmy w N. 10. Jeśli pomiędzy liczbami całkowitemi $n_1, n_2, \ldots$, wskazanemi w N. 10, znajdują się różne od ± 1, wtedy niektóre z punktów a naszego zadania zlewają się; toż samo mieć będziemy i odnośnie do punktów α.

[1]) Zadanie N. 6 nieco się różni od zadania Goursata, lecz, biorąc pod uwagę to, co mówimy w następującym N-rze, z łatwością przekonamy się, iż możemy i nasze zadanie, zredukować w sposób tu wskazany.

Redukcya trzecia.

13. Liczba całkowita dodatnia q, wskazana w zadaniu N. 12, może być dowolną. Lecz łatwo jest okazać, iż można zawsze przyjąć, że q nie przewyższa liczby p, rodzaju krzywej $F=0$.

W rzeczy samej, zadanie nasze zawsze możemy przekształcić w sposób następujący:

Szukamy funkcyi wymiernej $\theta(x,y)$ rzędu możliwie najniższego, któraby, między innemi, posiadała q pojedyńczych miejsc zerowych $a_1, a_2, \dots a_q$, oraz q pojedyńczych miejsc nieskończonościowych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$.

Funkcya taka może mieć kilka wartości; my uwzględniamy tu jednę z nich jakąkolwiek. Znajdziemy ją, jak łatwo okazać, za pomocą działań algebraicznych.

Niechaj teraz $a'_1, a'_2, \dots, a'_{q_1}$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{q_1}$ przedstawiają odpowiednio dodatkowe pojedyńcze miejsca zerowe i nieskończonościowe otrzymanej funkcyi θ; liczba q_1, tu wskazana, będzie, jak wiadomo, w każdym razie $\leqq p$; w szczególności zaś zachodzić będzie jeden z dwu przypadków:

Jeżeli okaże się, że $q_1=0$, wtedy przy pomocy naszego działania rozwiązaliśmy już zadanie N. 12; otrzymujemy odpowiedź twierdzącą i możemy położyć:

$$m=1\,,\quad \varphi(x,y)=\theta(x,y)\,.$$

Jeżeli zaś otrzymaliśmy $q_1>0$, wtedy zadanie N. 12 będziemy mogli zastąpić przez inne tegoż samego rodzaju, w którem zamiast $2q$ miejsc a, α początkowo danych, mamy $2q_1$ nowych miejsc a', α'. Możliwość takiej zamiany jednego zadania na drugie jest prostem następstwem tego, iż oba zadania mają jednocześnie albo odpowiedź twierdzącą, albo przeczącą, co jest oczywistem.

Lecz w zadaniu nowem, jakeśmy zuważyli, w każdym razie mieć będziemy $q_1\leqq p$; a więc twierdzenie, wypowiedziane na początku N-ru, jest zupełnie udowodnioném.

14. Uwagi. W szeregu punktów a' mogą znaleść się i zlewające się; toż samo należy powiedzieć i o punktach α'.

Może okazać się, iż niektóre z punktów a' schodzą się z niektóremi z punktów α, lub też niektóre z punktów α' schodzą się z niektóremi z punktów a; wtedy znaleziona przez nas funkcya θ nie będzie, właściwie mówiąc, czyniła zadość wszystkim wymaganym warunkom, lecz, oczywiście, okoliczność ta nie stanowi żadnej przeszkody i podana tu redukcya zawsze może być stosowana.

15. Wyłożona przez nas redukcya daje natychmiast twierdzenie o całce (N. 9):

$$n_1 I_1''' + n_2 I_2''' + \dots\dots,$$

odpowiadające twierdzeniu o całkach eliptycznych, którem się zajmował Czebyszew (Jour. de math., 1858).

Redukcya czwarta.

16. Przystępując do zadania N. 12 zauważmy, iż w celu jego rozwiązania byłoby naturalnem zwrócić się do prób, a mianowicie badać kolejno czy nie czynią zadość naszemu zadaniu liczby $m=1,2,\dots$. Każda taka próba da się uskutecznić za pomocą działań algebraicznych; lecz stosując naszkicowane tu postępowanie bez należytych uproszczeń napotkalibyśmy podwójną niedogodność, ponieważ wszystkie działania wypadałoby przerabiać nanowo dla każdej nowej wartości m i prócz tego, działania te coraz byłyby trudniejsze, gdyż rząd funkcyi badanej wzrasta wraz ze wzrostem liczby m.

Pokażemy jak wskazana niedogodność da się usunąć; zobaczymy naówczas, iż nasze zadanie można zastąpić innem, prostszem i bardziej określonem. W tym celu dość będzie skorzystać w odpowiedni sposób ze znanej nam redukcyi N° 13.

16. Najprzód zastępujemy zadanie N° 12 następującem, bardziej określonem:

Znaleść funkcyę wymierną $\psi_m(x,y)$ dla $m=1,2,\dots$ rzędu możliwie najniższego, dla której, między innemi, q danych punktów $a_1, a_2, \dots, a_q$ powinny przedstawiać m-krotne miejsca zerowe i q punktów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ m-krotne miejsca nieskończonościowe.

To zadanie dla każdego m będzie miało przynajmniej jedno rozwiązanie; jedno z nich bierzemy tu pod uwagę.

Jest oczywistem, iż jeśli zadanie N° 12 ma odpowiedź twierdzącą, wtedy funkcya $\varphi(x,y)$ znajdzie się napewno pomiędzy funkcyami $\psi_1, \psi_2, \dots$, skąd zaraz to zadanie możemy sprowadzić do obliczenia funkcyj ψ.

Pokażmy teraz, że obliczenie tych funkcyi ψ da się sprowadzić do wyznaczenia funkcyj znacznie prostszych.

18. Oznaczmy przez $\theta_1(x,y)$ funkcyę wymierną rzędu możliwie naj-

niższego, dla której, między innemi, q punktów $a_1, a_2, \dots, a_q$ powinny przedstawiać pojedyńcze miejsca zerowe, i q punktów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ — pojedyńcze miejsca nieskończonościowe; niech $a'_1, a'_2, \dots, a'_{q_1}$; $\alpha'_1\, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{q_1}$ będą dodatkowemi pojedyńczemi miejscami zerowemi i nieskończonościowemi tej funkcyi.

Oznaczymy dalej przez $\theta_2(x,y)$ funkcyę wymierną rzędu możliwie najniższego, dla której $q+q_1$ punktów $a_1, a_2, \dots, a_q$; $a'_1, a'_2, \dots, a'_{q_1}$ stanowią pojedyńcze miejsca zerowe i tyleż punktów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{q_1}$ — pojedyńcze miejsce nieskończonosciowe, i niech $a_1'', a_2'', \dots a_{q_2}''$; $\alpha_1'', \alpha_2'', \dots, \alpha_{q_2}''$ będą dodatkowemi miejscami zerowemi i nieskończonościowemi tej funkcyi.

Oznaczmy w podobnyż sposób przez $\theta_3(x,y)$ funkcyę wymierną rzędu możliwie najniższego, dla której $q+q_2$ punktów $a_1, a_2, \dots, a_q$; $a_1'', a_2'', \dots, a_{q_2}''$ stanowią pojedyńcze miejsca zerowe i tyleż punktów $\alpha_1, \alpha_2 \dots\dots, \alpha_q$; $\alpha_1'', \alpha_2'', \dots\dots \alpha_{q_2}''$ — pojedyńcze miejsca nieskończonościowe.

Funkcye $\theta_1, \theta_2, \dots,$ w powyższy sposób określone znajdą się za pomocą działań algebraicznych i wskazane przy nich liczby $q_1, q_2, \dots\dots$ będą napewno $\leqq p$.

U w a g i. Jeśli θ_m ma kilka wartości, bierzemy tu jednę z nich którąkolwiek. Do punktów $a^{(m)}$, $\alpha^{(m)}$ stosuje się, co było powiedzianem w N⁰ 14.

19. Funkcye $\theta_1, \theta_2, \dots$ wyżej określone mają dla nas nader ważne znaczenie; bezpośrednio przekonywamy się o następnjących ich własnościach:

I. Rząd funkcyi θ_m, jako równy liczbie $q+q_{m-1}+q_m$ nie przewyższa liczby stałej $q+2p$.

II. Za pomocą funkcyj θ możemy wyznaczyć wszystkie funkcye $\psi_1, \psi_2, \dots$; a mianowicie mamy:

$$\psi_1 = \theta_1\,; \qquad \psi_m = \psi_{m-1}\,\theta_m\,; \qquad m > 1\,.$$

III. Aby zadanie N⁰ 12 miało odpowiedź twierdzącą, koniecznym i dostatecznym jest warunek, aby pomiędzy liczbami $q_1, q_2, \dots$ znalazła się liczba $q_m = 0$; przy spełnieniu się tego warunku mieć będziemy:

$$\varphi(x,y) = \psi_m(x,y)\,.$$

IV. Aby zadanie N⁰ 12 miało odpowiedź twierdzącą, koniecznym i dostatecznem jest warunek, aby rząd nieokreślony funkcyj $\theta_1, \theta_2, \dots$ mógł być uważany jako peryodyczny.

Twierdzenia powyższe wskazują, że zadanie N⁰ 12 może być sprowadzone do obliczenia funkcyj θ i zarazem uzasadniają wniosek, wypowiedziany w końcu N⁰ 16.

20. Redukcya czwarta odpowiada dwom znanym rezultatom, odnoszącym się do najprostszego założenia co do punktów a, α. Pierwszy rezultat

został otrzymany przez A b e l a za pomocą ułamków ciągłych i odnosi się do przypadku, gdy y jest pierwiastkiem kwadratowym z wielomianu. Drugi, podany przez C z e b y s z e w a, odnosi się do przypadku, gdy y jest pierwiastkiem sześciennym (Ouvres. t. I, Mémoire, 24).

W szczególności twierdzenie IV N⁰ 19 odpowiada twierdzeniu A b e l a o peryodyczności ułamku ciągłego.

Przy wykładzie naszych redukcyj wskazywaliśmy już, iż można je dopełnić za pomocą działań algebraicznych; badanie zaś szczegółowsze najodpowiedniejszych ku temu sposobów wychodzi po za zakres pracy niniejszej.

Nie będziemy tu również zatrzymywali się nad wskazaniem funkcyj y, dla których nasze zadania mogą być mniej lub więcej uproszczone.

Zauważmy wreszcie, że dla pewnych celów jest korzystnem zmodyfikować nieco myśl niektórych z wyłożonych tu redukcyj.