

O KRZYWEJ NORMALNEJ Φ RODZAJU $p=3$, .

NAPISZAŁ

S. KĘPIŃSKI.

1. Każdy utwór algebraiczny, określony przez równanie np.

$$G(w, z) = 0,$$

można, jak wiadomo, dwójako interpretować: albo przez powierzchnie Riemanna, albo przez krzywe algebraiczne.

Między krzywymi algebraicznymi wybitne zajmuje miejsce t. zw. krzywa normalna Φ , którą określa się w ten sposób: Jeżeli przez p oznaczmy rodzaj utworu algebraicznego, przez $j_1, j_2, \dots, j_p$ — p liniowo od siebie niezależnych całek gatunku pierwszego, to

$$\varphi_i = \frac{dj_i}{dz}, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

przedstawiają p funkcij algebraicznych liniowo od siebie niezależnych. Jeżeli zaś wielkości te φ_i uważać będziemy jako proporcjonalne do współrzędnych jednorodnych punktu w przestrzeni $(p-1)$ — wymiarowej: R_{p-1} , to każdej parze wartości (w, z) utworu G odpowiadać będzie jeden punkt w R_{p-1} — i zbiór takich punktów utworzy krzywą normalną Φ ¹⁾.

Przytoczymy niektóre znane własności krzywej Φ , które w dalszym ciągu okażą się potrzebne.

¹⁾ Por. Brill-Nöther, Math. Ann. t. 7; Weber, t. 13; Nöther, ib. t. 17.

Ponieważ funkcya

$$\varphi = \sum_{i=1}^p c_i \varphi_i$$

posiada $2p-2$ zer ruchomych, a więc każda płaszczyzna $\sum_{i=1}^p c_i \varphi_i = 0$ w przestrzeni R_{p-1} , t. j. każda przestrzeń liniowa R_{p-2} przecina krzywą Φ w $(2p-2)$ punktach; a więc:

(Tw. 1). Krzywa normalna Φ jest krzywą stopnia $(2p-2)$ -go w przestrzeni $(p-1)$ -wymiarowej R_{p-1} ; oznaczmy ją przez C_{p-2}^{p-1} .

[W przypadku hypereliptycznym krzywa Φ redukuje się do krzywej stopnia $(p-1)$ -go: C_{p-1}^{p-1} , ale podwójnie pokrytej].

Krzywa Φ posiada dlatego tak wybitne znaczenie, że nie zależy od doboru równania, charakteryzującego utwór algebraiczny G , t. j. że pozostaje ta sama dla wszystkich równań algebraicznych, które można otrzymać z jednego z nich przez przekształcenie dwumierne. Istotnie przy takim przekształceniu całki j , ulegają, jak wiadomo, podstawieniom liniowym, a więc krzywe Φ , odpowiadające różnym równaniom G , przechodzą w siebie przez przekształcenia liniowe; takich zaś krzywych nie uważamy za różne:

W szczególności można, przy pomocy krzywej Φ , łatwo okazać, że ilość „modułów“ t. j. parametrów istotnych utworu algebraicznego rodzaju p , jest $3p-3$. Jakoż mamy następujące twierdzenie Weierstrassa.

(Tw. 2). Istnieje zawsze liczba skończona [dokładnie p^3-p] punktów na krzywej Φ , w której płaszczyzna pewna przestrzeni R_{p-1} : $u_\varphi = \sum u_\varphi \varphi_i = 0$ spotyka krzywą Φ w p punktach sąsiednich. Punkt taki nazywać będziemy punktem Weierstrassa, płaszczyznę $u_\varphi = 0$ płaszczyzną hyperoskulacyjną. Płaszczyzną ta $u_\varphi = 0$ przecina krzywą Φ w dalszych $p-2$ punktach; przez te $p-2$ punktów możemy zawsze poprowadzić inną płaszczyznę: $v_\varphi = \sum v_\varphi \varphi_i = 0$; wówczas płaszczyzny pęku $u_\varphi - \lambda v_\varphi = 0$ będą miały wszystkie też same $p-2$ punkty wspólne z krzywą. Stąd wynika, że parametr:

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{u_\varphi},$$

rozważany jako funkcya na krzywej Φ , przyjmuje każdą wartość w p różnych punktach krzywej, a wartość nieskończenie wielką w p punktach sąsiednich (Weierstrassa); funkcya λ jest zatem funkcją p -wartościową. Odpowiadająca więc tej funkcji λ powierzchnia Riemanna składa się z p liści i posiada w punkcie nieskończenie dalekim $(p-1)$ -krotny punkt rozgałęzienia. Ponieważ jednak powierzchnia m liściowa rodzaju p musi mieć

$2m + 2p - 2$ punktów rozgałęzienia, więc nasza powierzchnia, obok powyższej wymienionej $(p-1)$ -krotnej ma jeszcze $3p-1$ punktów rozgałęzienia (pojedynczych). Z tych dwa możemy, przy pomocy przekształcenia liniowego $\lambda' = a\lambda + b$, określić dowolnie — pozostaje więc $3p-3$ punktów rozgałęzienia nieoznaczonych, przedstawiających właśnie $3p-3$ modułów.

Przy pewnych warunkach może krzywa Φ (i równanie G do niej należące) posiadać mniej niż $3p-3$ modułów. Przypadkami takimi zajmowali się ze strony algebraicznej Schottky ¹⁾ dla $p=3$, ogólniej zaś Valentin ²⁾ i Klein w wyżej wspomnianych wykładach. Ten ostatni określa pewne szczególne przypadki, w których utwór algebraiczny posiada mniej niż $3p-3$ modułów w następujący sposób:

Miedzy wyżej wspomnianymi powierzchniami p -liściowymi o rodzaju p istnieć będą napewno powierzchnie, których np. 1-y i 2-gi liść są z sobą związane w $(p-1)$ -krotnym punkcie rozgałęzienia w nieskończoności i w punkcie jednokrotnym rozgałęzienia A , a wszystkie inne punkty rozgałęzienia łączą z sobą pozostałe liście. Zmieniając współczynniki odpowiedniego równania $G = 0$, można zawsze do tego doprowadzić, że punkt A zjedzie się z punktem rozgałęzienia w nieskończoności; w skutek tego jeden liść odpadnie, a pomimo to rodzaj powierzchni się nie zmieni. Otrzymamy tym sposobem powierzchnię $(p-1)$ liściową Riemanna, rodzaju p , posiadającą tylko $3p-4$ moduły. Stąd, że powierzchnia w tym przypadku posiada $p-1$ liści, wynika oczywiście, że między funkcjami algebraicznymi, należącymi do utworu G , istnieje funkcya $p-1$ wartościowa, stającą się nieskończenie wielką tylko w punkcie Weierstrassa krzywej Φ i to $p-1$ -krotnie. Z tą powierzchnią $p-1$ liściową możemy tak postąpić, jak poprzednio z powierzchnią p -liściową i t. d.; otrzymamy funkcje m wartościowe $m \leq p$, stające się nieskończenie wielkimi w je innym punkcie.

Takimi funkcjami m wartościowymi $m \leq p$ zajmują się właśnie w swych rozprawach Schottky ¹⁾ i Valentin ²⁾. Idzie o zbadanie, czy i które z przypadków, wyliczonych przez Valentiną, odpowiadają przypadkom, uzyskanym przez Kleiną, i jakie jest geometryczne znaczenie dla krzywych wszystkich tych przypadków.

Odpowiedź na to ostatnie pytanie dla utworu algebraicznego, którego rodzaj $p=3$, podał Klein w swoich wykładach „Abel'sche Functionen“ 1888 r., nie uzasadniając jednak dokładnie swoich rezultatów.

Owóż celem pracy niniejszej jest rozważenie szczegółowe powyższego zadania dla $p=3$ i rozwiązanie tegoż zadania dla utworu algebraicznego rodzaju $p=4$.

¹⁾ Schottky: Crelle's J. t. 83, str. 317—319.

²⁾ Valentin: De aequatione algebraica etc. Dissertatio inauguralis, Berlin 1879.

¹⁾ Por. Klein, Vorlesungen über Riemann'sche Flächen, Göttingen 1892.

Obok wyżej opisanego przedstawienia utworu G przez krzywą Φ wprowadzimy do rozważania krzywe płaskie stopnia n -tego: C_n . Wtedy, jak wiadomo, funkcje φ są przedstawione przez krzywe dołączone C_{n-3} stopnia $n-3$ -go, przechodzące przez wszystkie punkty osobliwe, t. j. wielokrotne i mianowicie $(k-1)$ -razy przez punkt k -krotny krzywej C_n .

(Tw. 1'). Nie zważając na punkty przecięcia się krzywych C_n i C_{n-3} w punktach osobliwych, powiemy, stosownie do tw. 1, że: krzywe C_{n-3} mają z krzywą C_n tylko $2p-2$ punktów przecięcia się ruchomych. Stąd wynika, że przez punkt „ogólny“ krzywej przechodzić może tylko $p-1$ liniowo od siebie niezależnych krzywych C_{n-3} . W przeciwnym bowiem razie wszystkie p funkcje φ stawałyby się w tym samym punkcie zerem, a więc nie posiadałyby $2p-2$ punktów ruchomych. Podobnie przez dwa punkty krzywej C_n nie może przechodzić jednocześnie więcej niż $p-2$ liniowo-niezależnych φ i t. d., przez p punktów, w ogóle mówiąc, żadna C_{n-3} .

Weźmy na uwagę m punktów A_i dowolnych krzywej; liczbę krzywych $\varphi = C_{n-3}$, przez nie przechodzących, nazwijmy τ . Przez te m punktów poprowadźmy krzywą dołączoną f ; ona przetnie krzywą C_n w dalszych punktach B_k . Przez punkty B_k poprowadźmy inną krzywą dołączoną f_1 . Wówczas wyrażenie

$$R = \frac{f_1}{f}$$

przedstawia funkcję m wartościową, t. j. funkcję, która każdą wartość M przyjmuje w m punktach. Liczbę stałych, zachodzących w takiej funkcji, nazwijmy r ; wówczas, według twierdzenia Riemanna-Rocha, mamy:

$$(Tw. 3). \quad r = m - p + \tau + 1.$$

Jeżeli M zmienia swą wartość, to na krzywej C otrzymujemy coraz to inną grupę m punktów; wszystkie takie grupy tworzą „pasma (Schaar) grup punktów z sobą równoważnych“ i twierdzenie Riemanna-Rocha można także tak wysłowić: Grupa m punktów na krzywej C_n , w której jednocześnie stają się zerem τ od siebie liniowo niezależnych funkcji φ , należy do pasma liniowego, $(m-p+\tau)$ -krotnie nieskończonego, równoważnych z sobą grup punktów.

Zauważyć tu jednak wypada przy tem wysłowieniu, że wszystkie grupy punktów pewnego pasma mogą mieć jeden lub więcej punktów wspólnych, które przy tworzeniu funkcji, odpowiadającej temu pasmu, odpadają.

Przy pomocy przytoczonych twierdzeń można, dla ogólnego punktu

krzywej C_n , wyprowadzić twierdzenie Weierstrassa ¹⁾ (Lückensatz) następujące:

(Tw. 4). Dla każdego punktu ogólnego krzywej (C_n lub Φ) znaleźć można funkcję m wartościową, należącą do utworu G , która tylko w tym punkcie staje się m -krotnie nieskończenie wielką; m przybierać może wszystkie wartości z wyjątkiem p początkowych: $m=1, 2, 3, \dots, p$.

Istotnie dla $m=1, 2, \dots, p$ jest $r=p-1, p-2, \dots$, a więc $r-1=0$. Istnieją zatem w ogólnym punkcie funkcje m -wartościowe, dla których $m \geq p+1$.

Twierdzenie Weierstrassa stosuje się, z małemi zmianami, także do jakiegokolwiek punktu „szczególnego“ krzywej, w którym funkcje φ przechodząc przez jeden układ punktów krzywej, przechodzą jeszcze przez dalsze jej punkty. W takim razie, gdy m (t. j. wartościowość funkcji) zrasta o 1, niekoniecznie τ musi, jak poprzednio, maleć o 1, a wskutek tego r może otrzymać wartości większe od jedności nawet dla $m < p$. Istnieją więc dla takich szczególnych punktów krzywej funkcje mniej niż p -wartościowe. Zawsze jednak dla pewnych p wartości m nieistnieją funkcje algebraiczne tak iż:

(Tw. 5). Nawet w punkcie szczególnym dla wszystkich wartości m — z wyjątkiem pewnych p wartości m — istnieją funkcje m -wartościowe, należące do G i stające się tylko w tym punkcie m -krotnie nieskończenie wielkimi.

Bliżej rzecz tę rozważymy dla $p=3, 4$.

Twierdzenia powyższego dowiódł Nöther w XCIV-ym tomie *Zeitschrift für Mathematik und Physik* Crellego, opierając się na twierdzeniu Riemanna-Rocha i na twierdzeniu następującem:

(Tw. 6). Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby w grupach złożonych z m punktów, równoważnych z daną grupą $a_1, a_2, \dots, a_m$, zachodził ten sam punkt a_1 , jest to, aby istniała funkcja φ , która się staje równą zeru we wszystkich punktach $a_2, a_3, \dots, a_m$, lecz jest różna od zera w punkcie a_1 .

(Tw. 7). Z tego twierdzenia wynika: p liczb m , dla których nie istnieją funkcje algebraiczne m wartościowe, stające się m -krotnie nieskończenie wielkimi w punkcie „szczególnym“ krzywej, należy szukać między liczbami $1, 2, 3, \dots, 2p-1$.

Jakoż z uwagi, że funkcje φ mają tylko $2p-2$ zer ruchomych wynika, że dla $m > 2p-2$ punktów sąsiednich żadna z funkcji φ nie staje się zerem. Jeżeli zaś w $2p-2$ punktach sąsiednich jest równa zeru, to, według twierdzenia (6), nie istnieją funkcje $2p-1$ -wartościowe — i to jest końcowy przypadek.

¹⁾ Nöther, Crelle J. t. 92, str. 301.

(Tw. 8). W dalszym ciągu potrzebne nam jeszcze będzie jedno twierdzenie, wyprowadzone przez Valentina l. c.: Jeżeli przez m_0 nazwiemy najmniejszą z liczb, dla której w danym punkcie krzywej istnieje funkcja algebraiczna ξ_{m_0} , to obok ξ_{m_0} istnieje zawsze co najwyżej (m_0-1) „niezależnych“ funkcji: $\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \dots, \xi_{m_{m-1}}$ odpowiednio $m_1, m_2, \dots$ wartościowych, przy pomocy których można wszystkie inne funkcje ξ przedstawić w następujący sposób wymierny i całkowity:

$$(M) \quad \xi = A_1(\xi) \xi_{m_1} + A_2(\xi) \xi_{m_2} + \dots + A_{m-1}(\xi) \xi_{m_{m-1}};$$

co się tyczy liczb

$$m_0 < m_1 < m_2, \dots, < m_{m-1},$$

- to a) nie wszystkie mają ten sam spólny dzielnik;
b) żadna z liczb m_i nie czyni zadość równaniu;

$$m_i = \gamma m_0, \quad m_i = \gamma m_0 + m_i;$$

Nadto: Jeżeli mniej niż m_0 funkcji np. (m_0-n) funkcji ξ_{m_i} niezależnych wystarcza do przedstawienia dowolnej funkcji ξ_1 w sposób wymierny i całkowity, to można dobrać takich n funkcji ξ_{m_i} „zależnych“, gdzie $\lambda = \gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2, \dots$ iż wzór (M) pozostaje bez zmiany. W każdym zaś razie między liczbami p i m_i ($i=0, 1, \dots, m-1$) istnieje związek:

$$(N) \quad m_0 p = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda m_i - \frac{m_0(m_0-1)}{2}.$$

Przedstawiając funkcje $\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \dots$ według wzoru (M), otrzymuje Valentin szereg równań, z których następnie wyprowadza równania między funkcją ξ_{m_0} i którąkolwiek z funkcji ξ_{m_i} . Te równania przekształca przy pomocy wzorów:

$$\xi_{m_0} = x_{m_0},$$

$$\xi_{m_1} = x_{m_1} + c'_1,$$

$$\xi_{m_2} = c_2 x_{m_2} + c'_2 x c_{m_1} + c''_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

na równania między funkcją x_{m_0} i którąkolwiek z funkcji x_{m_i} , zawierające prawdziwą ilość modułów.

Co do tych równań między ξ_{m_0} i ξ_{m_i} lub (x_{m_0}, x_{m_i}) , to są one oczywiście stopnia m_0 -tego względem $\xi_{m_i}(x_{m_i})$ a m_i -ego względem $\xi_{m_0}(x_{m_0})$. Jeżeli

więc $\xi_{m_0}(x_{m_0})$ przyjmiemy za zmienną niezależną, to powierzchnia Riemanna odpowiadająca jest m_0 -liściowa i posiada (m_0-1) -krotny punkt rozgałęzienia w nieskończoności.

2. Równania i krzywe rodzaju $p=3$.

Przy pomocy powyższych twierdzeń (5–8) łatwo już nam będzie wyliczyć wszystkie możliwe przypadki, w których równanie posiada $3p-3=6$ albo mniej modułów.

Niech mianowicie m oznacza, jak poprzednio, wartościowość funkcji albo, co na jedno wychodzi, rząd nieskończoności funkcji w pewnym punkcie utworu G lub krzywej; r niech oznacza liczbę stałych, zachodzących w tej funkcji, t. j. $r-1$ = ilości funkcji; ponieważ dla $p=3$ mogą zachodzić tylko trzy wartości m , dla których funkcje nie istnieją, i tych wartości (według 7) należy szukać między liczbami 1, 2, 3, 4, 5 = $2p-1$, więc mamy następujące możliwe przypadki:

	I	II	III	IV	V	VI
m	$r-1$	$r-1$	$r-1$	$r-1$	$r-1$	$r-1$
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1
3	0	1	1	0	0	2
4	1	0	2	0	2	0
5	2	2	0	2	0	0
6	3	3	3	3	3	3

Z tych przypadków I przedstawia przypadek ogólny; nim się zajmować nie będziemy. Lec z pozostałych niektóre trzeba wyłączyć z rozważania jako niemożliwe. Zauważmy mianowicie, że równanie (N) redukuje się do

$$(N') \quad 3m_0 = \sum_{i=1}^{m-1} m_i - \frac{m_0 \cdot m_0 - 1}{2}.$$

Dla IV mamy:

$$m_0 = 2, \quad m_1 = 5;$$

a więc według poprzedniego równania: $6 = 5 - 1$, co jest niemożliwe ¹⁾.

Podobnie przypadek VI okazuje się niemożliwym i pozostają do rozważania tylko przypadki II, III i V.

II. W tym przypadku jest:

$$m_0 = 3, \quad m_1 = 5, \quad m_2 = 7,$$

(wszystkie trzy funkcje ξ_m są niezależne, w myśl Valentina) i równanie (N') jest sprawdzone. Liczba stałych w równaniu oblicza się, według Valentina, przy pomocy wzoru:

$$C = p-1 + \frac{2m_1 + \varepsilon}{3},$$

gdzie $\varepsilon = m_1 \pmod{3}$ a więc:

$$C = 6.$$

Równanie więc posiada pełną liczbę modułów, i jako takie przedstawia krzywą ogólną rodzaju $p=3$.

$$\text{III.} \quad m_0 = 3, \quad m_1 = 4, \quad m_2 = 8.$$

Mamy tu $\xi_{m_2} = \xi_{m_1}^2$, a więc funkcja ξ_{m_2} jest „zależna”; równanie (N') jest sprawdzone; liczba stałych w równaniu wynosi:

$$C = \frac{5p + \varepsilon}{3},$$

$\varepsilon = -2p \pmod{3}$, a więc:

$$C = 5,$$

równanie posiada o jeden moduł mniej, a więc przedstawia krzywą szczególną.

$$\text{V.} \quad m_0 = 2, \quad m_1 = 7,$$

równanie (N') jest sprawdzone, liczba stałych jest $2p-1=5$.

¹⁾ Sprzeczność IV w tym się zresztą okazuje, że tu funkcja czterowartościowa ξ_4 ma nie istnieć, podczas gdy ξ_2^2 jest właśnie taką funkcją.

Ponieważ w przypadku tym istnieje funkcja dwuwartościowa ξ_2 , więc utwór algebraiczny jest hypereliptyczny.

Przypadek ten można otrzymać z ogólnego przypadku II w sposób podany przez Kleina, w § 1-ym przytoczony. Jakoż do II należy powierzchnia 3-liściowa, mająca w nieskończoności punkt rozgałęzienia podwójny, a inne punkty rozgałęzienia tak można dobrać, aby liście 1-szy i 2-gi posiadały obok punktu rozgałęzienia w nieskończoności tylko jeszcze jeden pojedynczy punkt rozgałęzienia (A). Jeżeli ten punkt przesunie się do ∞ , to 1-szy liść odpadnie i otrzymamy powierzchnię 2-liściową rodzaju $p=3$.

Przedstawienie geometryczne powyższych przypadków II, III i V.

ad II. Dla $p=3$ krzywa Φ jest krzywą płaską (w przestrzeni R_2) stopnia 4-go, nie posiadającą punktów podwójnych. Według tego, cośmy powiedzieli na str. 2-iej, krzywa ta posiada $24 (=p^3-p)$ punktów Weierstrassa, w których $p=3$ sąsiadnie punkty leżą w przestrzeni H_1 , t. j. na prostej. Są to więc punkty przegięcia krzywej.

W takim punkcie poprowadzmy styczną φ ; ona przecina krzywą $\Phi = C_4$ jeszcze w jednym punkcie P . Przez ten punkt poprowadzmy prostą dowolną φ' ; wówczas pęk prostych $\varphi - \lambda\varphi' = 0$ określi nam parametr:

$$\lambda = \frac{\varphi'}{\varphi}$$

jako funkcję ξ_3 trójwartościową, stającą się nieskończenie wielką tylko w punkcie P , w stopniu trzecim.

Ponieważ proste na płaszczyźnie, są to właściwie krzywe $\varphi = C_{n-3} = C_1$ dołączone i jedna z tych funkcji ma z krzywą C_4 trzy punkty wspólne, więc według tw. 6, nie może dla tego punktu istnieć funkcja 4-wartościowa.

Znaczy to, że jeżeli przez punkt przegięcia P poprowadzimy krzywą dowolną algebraiczną F , mającą z C_4 cztery punkty sąsiadnie wspólne, a przez pozostałe punkty przecięcia się F z C_4 poprowadzimy inną krzywą F tegoż samego stopnia co F , to krzywa F' przechodzi także przez punkt przegięcia].

Istnieć jednak będą funkcje pięciowartościowe, które możemy otrzymać następującym sposobem: Przez punkt przegięcia poprowadzimy dowolną krzywą stopnia 3-go F , mającą z C_4 w tym punkcie pięć punktów sąsiadnych wspólnych. Przez pozostałe siedem punktów przecięcia się krzywej F z krzywą C_4 poprowadzimy inną krzywą F . Takich krzywych F , można, jak wiadomo, poprowadzić ∞^2 . Wówczas

$$\lambda = \frac{F'}{F}$$

przedstawia żadaną funkcją pięciowartościową.

ad III. Równanie w tym przypadku, według Valentina, ma kształt:

$$y^3 + (a_0 + 2a_1x + a_2x^2)y + b_0 + 4b_1x + 6b_2x^2 + 4b_3x^3 + b_4x^4 = 0,$$

czyli po podstawieniu

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

w formie jednorodnej

$$x_2^2 x_3 + (a_0 x_3^2 + 2a_1 x_3 x_1 + a_2 x_1^2) x_2 x_3 + b_0 x_3^4 + 4b_1 x_3^3 x_1 + 6b_2 x_3^2 x_1^2 + 4b_3 x_3 x_1^3 + b x_1^4 = 0.$$

Zakładając w tem równaniu $x_3=0$, otrzymamy $a_1^4=0$; a więc z uwagi, że krzywa ta, będąca rodzaju $p=3$, nie może mieć punktu wielokrotnego, wynika, że punkt $x_1=0$, $x_3=0$ jest punktem undulacyjnym i mianowicie $x_3=0$ jest styczną do krzywej w tym punkcie, t. j. ma z krzywą cztery sąsiednie punkty wspólne. [Punkt taki, jak wiadomo, należy uważać za przejście graniczne między dwoma punktami przegięcia rzeczywistemi a urojeniami].

Naodwrot, łatwo jest utworzyć funkcje algebraiczne, istniejące w tym punkcie krzywej. Jakoż niech $\varphi = 0$ przedstawia styczną w takim punkcie, zaś φ' dowolną prostą, przez ten punkt przechodzącą. Wówczas

$$\lambda = \frac{\varphi'}{\varphi}$$

przedstawia funkcję trójwartościową ξ_3 , stającą się tylko w tym punkcie nieskończenie wielką w stopniu trzecim.

Funkcję czterowartościową ξ_4 otrzymamy, biorąc obok stycznej $\varphi=0$ dowolną prostą na płaszczyźnie φ'' i tworząc

$$\lambda = \frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Ponieważ takich pęków prostych $\psi'' - \lambda\varphi = 0$ istnieje ∞^1 , więc i funkcji czterowartościowych jest ∞^1 .

Z uwagi na twierdzenie Nöthera (6) nie mogą istnieć funkcje pięciowartościowe w punkcie undulacyjnym, istnieje bowiem funkcja φ , mająca z krzywą cztery i tylko cztery punkty wspólne.

Także dalsze funkcyje łatwo otrzymać: $\xi_6 = \xi_3^2$, $\xi_7 = \xi_4 \xi_3$, i t. d.

3. Równania i krzywe rodzaju $p=4$.

Niech podobnie, jak poprzednio, $r-1$ przedstawia liczbę funkcyj m wartościowych, istniejących w pewnym punkcie krzywej. Z uwagi, że $2p-1=7$, a więc, że cztery wartości na odnoszące się do funkcyj nie istniejących, znajdujące się mogą tylko w pierwszych siedmiu wierszach, mamy możliwie następujące przypadki:

[illegible]

Z tych przypadków należy usunąć, jako niemożliwe, przypadki VI, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XVI i t. d. W każdym bowiem z nich zachodzi ta sprzeczność, iż ma nieistnieć funkcja np. m_2 -wartościowa, którą jednak z istniejących mniej wartościowych utworzyć można. I tak np. w VI ma nie istnieć funkcja 6 wartościowa ξ_6 — istnieje jednak funkcja trójwartościowa ξ_3 , a $\xi_3^2 = \xi_6$, i t. d.

Nadto wyłączymy z rozważania przypadek I jako ogólny.

A) W przypadkach II, III, IV najmniej wartościową funkcją istniejącą jest funkcja czterowartościowa: $m=4$. Równanie (N) Valentina redukuje się do równania:

$$(N') \quad m_1 + m_2 + m_3 = 22.$$

$$\text{ad II} \quad m_1 = 6, \quad m_2 = 7, \quad m_3 = 9.$$

Funkcje ξ_4, ξ_7, ξ_9 są niezależne (według ust. II Valentina, l. c. str. 18 i nast).

Ilość stałych modułów jest 9, a więc jest pełna ilość modułów, t. j. przypadek ten przedstawia ogólne równanie algebraiczne albo ogólną krzywą algebraiczną rodzaju $p=4$.

$$\text{ad III.} \quad m_1 = 5, \quad m_2 = 7, \quad m_3 = 10.$$

Jest więc $\xi_{m_1} = \xi_{m_2}^2$, t. j. funkcja ξ_{m_1} jest zależna (por. Valentin § 6 a) str. 22). Ilość modułów jest równa 8.

$$\text{ad IV.} \quad m_1 = 5, \quad m_2 = 6, \quad m_3 = 11.$$

Jest więc $\xi_{m_1} = \xi_{m_2} \xi_{m_3}$, t. j. ξ_{m_1} jest znowu funkcją zależną (por. Valentin § 6, d) str. 23. Liczba modułów jest tu równa 7.

Dla wszystkich tych trzech przypadków można zbudować powierzchnię Riemanna czteroliściową, posiadającą, między innymi, punkt rozgałęzienia trzykrotny w nieskończoności (por. str. 3).

B) W przypadkach V i VII najmniej wartościową funkcją jest trójwartościowa $\xi_m = \xi_3$. Równanie (N) redukuje się do

$$(N'') \quad m_1 + m_2 = 15.$$

Mamy więc:

$$\text{ad V.} \quad m_0 = 3, \quad m_1 = 7, \quad m_2 = 8.$$

Funkcje ξ_3, ξ_7, ξ_8 są, w myśl Valentina, niezależne. Liczba mo-

dułów, należących do utworów algebraicznych, jest 8 (Valentin str. 15), t. j. o 1 mniejsza niż w przypadku ogólnym.

$$\text{ad VII.} \quad m = 3 \quad m_1 = 5, \quad m_2 = 10.$$

Funkcja $\xi_{10} = \xi_5^2$ jest zależna; liczba modułów utworu algebraicznego tu należącego jest 7 (Valentin str. 17).

Powierzchnie Riemanna, tym przypadkom odpowiadające, są trójliściowe (jeżeli ξ_3 jest zmienną niezależną) i posiadają, między innymi, punkt rozgałęzienia dwukrotny w nieskończoności. Można je otrzymać z odpowiednich powierzchni czteroliściowych, używając przejścia granicznego Kleina (str. 5), przy którym jeden liść się odłącza.

C) Nakoniec w przypadku XV najmniej wartościową funkcją jest dwuwartościowa ξ_2 , a więc utwor algebraiczny jest hypereliptyczny.

Powierzchnię tę Riemanna dwuliściową otrzymać można sposobem Kleina, odłączając z odpowiedniej powierzchni trójliściowej jeden liść.

4. Znaczenie geometryczne.

Krzywą normalną Φ rodzaju $p=4$ jest krzywa stopnia 6-go ($2p-2=6$) w przestrzeni $R_3 (=R_{p-1})$. Weber¹⁾ i Nöther²⁾ okazali, że przez tę krzywą przechodzi jedna powierzchnia stopnia 2-go i pięć różnych powierzchni stopnia 3-go (dwie powierzchnie 2-go nie mogą przechodzić, krzywa bowiem byłaby stopnia 4 go). A więc:

Krzywa $\Phi = C_6^3$ jest zupełnem przecięciem powierzchni stopnia 2-go i powierzchni stopnia 3-go.

Dla bliższego zbadania tej krzywej używa się z korzyścią odwzorowania powierzchni stopnia 2 go na płaszczyznę³⁾. Przy tem odwzorowaniu występuje na powierzchni stopnia 2-go punkt szczególny A (środek rzutu) i dwie proste rodzaje, przechodzące przez A , zwane prostymi zasadniczymi płaszczyźnie zaś odwzorowania występują 2 szczególne punkty O, O' zwane zasadniczymi i prosta je łącząca. Owóż jako odwzorowanie każdej krzywej stopnia 6-go na powierzchni otrzymamy krzywą stopnia 6-go K_6 , która a razy przechodzi przez punkt O , zaś $a'=6-a$ razy przez punkt O' . Z krzywych jednak takich stopnia 6-go tylko krzywe, dla których $a=a'=3$ są krzywymi rodzaju $p=4$. Takie krzywe K_6 nie posiadają, obok powyższych punktów O i O' potrójnych, żadnych innych punktów wielokrotnych.

Na odwrót więc wniesć możemy, że nasza krzywa Φ w przestrzeni nie

¹⁾ Math. Ann. t. LXXIII.

²⁾ Math. Ann. t. XVII.

³⁾ Clebsch - Lindemann: Vorl. über Geom. t. II, str. 414.

posiada punktów istotnie podwójnych, tylko punkty pozornie podwójne. Liczba zaś tych punktów pozornie podwójnych jest $h=6$. Nadto z uwagi, że przy tem odtworzeniu obie rodziny prostych rodzących na powierzchni stopnia 2-go, odtwarzają się jako pęki prostych, o wierzchołkach w punktach zasadniczych O i O' , a każda prosta takiego pęku przecina krzywą K_6 , pominawszy punkty O i O' , jeszcze w trzech innych punktach, wynika, że krzywa Φ przecina każdą prostą rodzącą w trzech punktach różnych od siebie.

Dla krzywych w przestrzeni wyprowadził Cayley szereg wzorów, które są zastosowaniem wzorów Plückera do krzywych płaskich, otrzymanych w następujący sposób:

Niech m będzie rzędem krzywej w przestrzeni, n jej klasą, r porządkiem (Rang), α liczbą punktów hyperoskulacyjnych (t. j. punktów zwrotu płaszczyzn ściśle stycznych), β liczba punktów zwrotu krzywej, h ilość punktów pozornie podwójnych, g liczba prostych stycznych do krzywej, które leżą w dowolnej płaszczyźnie, x liczba punktów przecięcia się dwu stycznych, leżących w dowolnej płaszczyźnie, y liczba płaszczyzn stycznych dwukrotnie do krzywej i przechodzących przez dowolny punkt, na koniec p niech będzie rodzajem krzywej.

Wówczas: 1) biorąc rzut krzywej w przestrzeni z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę, otrzymamy krzywą płaską, rodzaju p , rzędu $\mu=m$, klasy $\nu=r$, posiadającą $\delta=h$ punktów podwójnych, $\tau=y$ stycznych podwójnych, $k=\beta$ punktów zwrotu i $i=n$ punktów przecięcia. Stąd mamy wzory Plückera:

$$\begin{aligned} a) \quad r &= m(m-1) - 2h - 3\beta, & m &= r(r-1)2y - 3n, \\ n &= 3m(m-2) - 6h - 8\beta, & \beta &= 3r(r-2) - 6y - 8n. \end{aligned}$$

2) Utwórzmy dla krzywej w przestrzeni powierzchnię odwijalną i przetnijmy ją dowolną płaszczyzną. Otrzymamy krzywą płaską, dla której

$$p=p, \quad \mu=r, \quad \nu=n, \quad \delta=x, \quad \tau=g, \quad k=m, \quad i=a,$$

a więc według wzorów Plückera:

$$\begin{aligned} b) \quad n &= r(r-1) - 2x - 3m, & r &= n(n-1) - 2g - 3a, \\ a &= 3r(r-2) - 6x - 8m, & m &= 3n(n-2) - 6g - 8a. \end{aligned}$$

W obu zaś razach: $2p-2 = m+n-2r$.

Przy pomocy tych równań, mając dane trzy z wielkości $p, m, \dots$, znaleźć można resztę.

Dla krzywej Φ ogólnej stopnia 6-go, rodzaju $p=4$, znamy: $p=4, m=6, h=6$; stąd otrzymamy:

$$n=36, \quad r=18, \quad g=531, \quad a=10, \quad \beta=0, \quad x=126, \quad y=96.$$

Obok wymienionych własności krzywa może w szczególnych przypadkach posiadać inne. Z tych na jedną własność szczególną zwrócimy uwagę. Krzywa Φ może posiadać prostą styczną, mającą z krzywą trzy sąsiednie punkty wspólne (stationäre Tangente). Idzie o to, czy zjawienie się takiej osobiwej stycznej wpływa na inne własności krzywej, i o ile.

Niech więc krzywa posiada θ punktów (miejsc), w których prosta styczna ma z krzywą trzy sąsiednie punkty wspólne; wówczas w układzie wzorów a) podstawić należy $i=n+\theta$ zamiast $i=n$, gdyż ilość punktów przecięcia rzutu powiększy się o θ ; w układach zaś wzorów b) za $k=m$ należy podstawić $k=m+\theta$; tu bowiem ilość punktów zwrotu się powiększy o θ . Otrzymamy więc wzory:

$$\begin{aligned} a') \quad r &= m(m-1) - 2h - 3\beta, & m &= r(r-1) - 2y - 3(n+\theta), \\ n+\theta &= 3m(m-2) - 6h - 8\beta, & \beta &= 3r(r-2) - 6y - 8(n+\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b') \quad n &= r(r-1) - 2x - 3(m+\theta), & r &= n(n-1) - 2g - 3a, \\ a &= 2r(r-2) - 6x - 8(m+\theta), & m+\theta &= 3n(n-2) - 6g - 8a. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jakkolwiekby się krzywa Φ zmieniła, to w naszym badaniu z góry musimy żądać, aby jej rodzaj $p=4$ i rząd $m=6$ pozostał bez zmiany, gdyż krzywa jest przecięciem się powierzchni stopnia 2-go i 3-go; nadto z odtworzenia powyższego krzywej na płaszczyznę widać, że także $h=6$ zmienić się nie może. Stąd wynika $\beta=0$; jest bowiem $p=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-h-\beta$, a z powyższych równań a') i b') otrzymamy dalej:

$$\begin{aligned} r &= 18, \quad y=96, \quad n+\theta=36, \quad x+\theta=126, \quad a+\theta=60, \\ g &= 531 - \frac{1}{2}\theta(65-\theta). \end{aligned}$$

Ze związku $a+\theta=60$ wynika, że największa liczba możliwa punktów (θ) jest $\theta=30$ i że punkt taki (w którym styczna ma z krzywą 3 punkty sąsiednie wspólne) jest równoważny z dwoma punktami (a) zwrotu płaszczyzn ściśle stycznej, t. j. dwoma punktami, w których płaszczyzna ściśle styczna ma z krzywą cztery punkty wspólne, czyli staje się płaszczyzną hyperoskulacyjną.

Zauważymy, że punkty (a) są to właśnie punkty Weierstrassa (ilość ich $p^2-p=60$).

Przejdźmy do omówienia oddzielnych przypadków:

A) Istnieją funkcje 4-o wartościowe, jako najmniej wartościowe.

ad II) Istnieją funkcje 4-o, 6-o, 7-o, ... wartościowe. Funkcje te otrzymamy w następujący sposób geometryczny (por. § 1).

W jednym z 60-u punktów Weierstrassa W poprowadzimy płaszczyznę hyperskularyną $\varphi=0$ (mającą cztery punkty sąsiednie wspólne z krzywą). Ona przecina krzywą jeszcze w dwu innych punktach P_1, P_2 . Przez prostą P_1P_2 poprowadzimy dowolną płaszczyznę $\varphi'=0$, wówczas

$$\lambda = \frac{\varphi'}{\varphi},$$

jest właśnie funkcją 4-wartościową.

Pęk płaszczyzn $\varphi' - \lambda\varphi=0$ wycina na krzywej pasmo grup punktów równoważnych z sobą, a między nimi jedną z grup są właśnie cztery punkty sąsiednie w punkcie Weierstrassa W . Ponieważ istnieje φ , stające się zerem tylko w 4-ch punktach sąsiednich, a które w 5-ym jest od zera różne, więc (według tw. 6) nie mogą istnieć funkcje pięciowartościowe, i t. d.

ad III) Istnieją funkcje 4-o, 5-o, 7-o i t. d. wartościowe.

Jeżeli dwie płaszczyzny hyperskularyne schodzą się z sobą w punkcie W tak, że płaszczyzna przez to powstała φ ma w punkcie W pięć punktów sąsiednich wspólnych, a szósty punkt P przecięcia się φ z krzywą leży osobno, wówczas, prowadząc przez prostą WP płaszczyznę dowolną φ' i tworząc iloraz

$$\lambda = \frac{\varphi'}{\varphi},$$

otrzymamy funkcję czterowartościową ξ_4 , stającą się czterokrotnie nieskończenie wielką tylko w punkcie W .

Prowadząc zaś przez punkt P dowolną płaszczyznę φ'' , nie przechodzącą jednocześnie przez punkt W i tworząc

$$\lambda = \frac{\varphi''}{\varphi},$$

otrzymamy funkcję pięciowartościową ξ_5 , nieskończenie wielką 5-krotnie w punkcie W .

Wskutek dowolności w doborze płaszczyzny φ'' mieć będziemy ∞^1 różnych pęków płaszczyzn $\varphi'' - \lambda\varphi=0$; istnieje więc ∞^1 funkcji ξ_5 .

Według twierdzenia (7) nie istnieją funkcje ξ_6 istnieją dopiero $\xi_7, \xi_8, \dots$

Że krzywa Φ , powyżej opisana, należy rzeczywiście do przypadku III-go, możemy sprawdzić bezpośrednio przy pomocy należącego tu równania Valentina.

Odwzorujemy mianowicie krzywą Φ znany sposób na dowolną płaszczyznę, przyjmując jako środek rzutu A , np. punkt P . Wówczas na płaszczyźnie rzutu otrzymamy krzywą stopnia 6-go, rozpadającą się na prostą OO' i krzywą stopnia 5-go K_5 . Przy tem odwzorowaniu każde przecięcie stożkowe na powierzchni stopnia 2-go, przechodzące przez punkt P , przechodzi na prostą OO' i prostą T .

Ponieważ przecięcie stożkowe S , powstałe wskutek przecięcia się płaszczyzny φ z powierzchnią stopnia 2-go, posiada z krzywą Φ pięć wspólnych punktów sąsiednich w punkcie W , a więc odpowiednia prosta T posiadać musi pięć punktów wspólnych z krzywą K_5 i nawzajem.

Owóz równanie Valentina dla przypadku III ma kształt:

$$y^4 + f_1y_3 + f_2y^2 + g_1y + h_1y^2 = 0,$$

gdzie f_i, g_i, h_i są wielomianami stopnia i -go względem x .

Podstawiając w tem równaniu

$$y = \frac{\xi}{\zeta}, \quad x = \frac{\eta}{\zeta},$$

otrzymamy:

$$\xi^4\zeta + f_1(\zeta, \eta)\xi^3\zeta + f_2(\zeta, \eta)\xi^2\zeta + g_1(\zeta, \eta)g_2(\zeta, \eta)\xi\zeta + g_1(\zeta, \eta)g_2^2(\zeta, \eta) = 0$$

Mamy więc w okolicy punktu $\eta=0, \zeta=0$ w pierwszym przybliżeniu

$$\xi^4\zeta + A\eta^5 = 0;$$

to znaczy: krzywa C_5 posiada, jak przewidywaliśmy, w punkcie $\eta=0, \zeta=0$ punkt przecięcia taki, że prosta $\zeta=0$ ma z nią pięć punktów sąsiednich wspólnych.

Przy pomocy równania powyższego krzywej K_5 nie trudno jest znaleźć równania krzywej Φ .

Zauważmy mianowicie, że punkty podwójne krzywej K_5 są oznaczone przez:

$$\xi = 0 \quad \text{ i } \quad g_2(\zeta, \eta) = (\alpha\eta + \beta\zeta)(\gamma\eta + \delta\zeta) = 0.$$

Zamiast ξ, η, ζ wprowadźmy nowe zmienne ξ', η', ζ' :

$$\xi' = \xi,$$

$$\eta' = \alpha\eta + \beta\zeta,$$

$$\zeta' = \gamma\eta + \delta\zeta;$$

otrzymamy (opuszczając kreski) równanie krzywej K_3 w formie:

$$A_1 \xi^4 \eta + A_2 \xi^4 \zeta + A_3 \xi^3 \eta^2 + A_4 \xi^3 \eta \zeta + A_5 \xi^3 \zeta^2 + A_6 \xi^2 \eta^3 + A_7 \xi^2 \eta^2 \zeta + A_8 \xi^2 \eta \zeta^2 + A_9 \xi^2 \zeta^3 + A_{10} \xi \eta^3 \zeta + A_{11} \xi \eta^2 \zeta^2 + A_{12} \xi \eta \zeta^3 + A_{13} \eta^3 \zeta^2 + A_{14} \eta^2 \zeta^3 = 0;$$

punktami podwójnymi O , O' są obecnie punkty:

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \quad \eta = 0, \\ \xi &= 0, \quad \zeta = 0. \end{aligned}$$

Mnożąc ostatnie równanie przez ξ i podstawiając:

$$\varrho x_1 = \xi^2, \quad \varrho x_2 = \xi \eta, \quad \varrho x_3 = \xi \zeta, \quad \varrho x_4 = \eta \zeta,$$

otrzymamy równanie powierzchni stopnia 3-go (jednej z pięciu):

$$\begin{aligned} A_1 x_1^2 x_2 + A_2 x_1^2 x_3 + A_3 x_1 x_2^2 + A_4 x_1 x_2 x_3 + A_5 x_1 x_3^2 + A_6 x_2^3 + A_7 x_2^2 x_3 + A_8 x_2 x_3^2 + A_9 x_3^3 + A_{10} x_2^2 x_4 + A_{11} x_2 x_3 x_4 + A_{12} x_3^2 x_4 + A_{13} x_2 x_4^2 + A_{14} x_3 x_4^2 = 0, \end{aligned}$$

która razem z powierzchnią stopnia 2-go

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0,$$

wyznacza krzywą Φ stopnia 6-go.

ad IV) Istnieją funkcje 4-o, 5-o, 6-o, 8-o i t. d. wartościowe.

Krzywa Φ posiada punkt Weierstrassa W , w którym płaszczyzna φ ma z krzywą sześć punktów sąsiednich wspólnych. Prowadząc tu przez punkt W płaszczyznę φ' , mającą w tym punkcie z krzywą tylko dwa punkty sąsiednie wspólne, otrzymamy w wyrażeniu:

$$\lambda = \frac{\varphi'}{\varphi},$$

funkcję czterowartościową ξ_4 (stającą się nieskończenie wielką tylko w punkcie W).

Jeżeli φ'' przedstawia dowolną płaszczyznę, poprowadzoną przez punkt W (mającą z krzywą tylko jeden punkt wspólny), to

$$\lambda = \frac{\varphi''}{\varphi}$$

przedstawi nam funkcję pięciowartościową ξ_5 .

Z powodu dowolności płaszczyzny φ'' otrzymamy ∞^1 różnych pęków płaszczyzn

$$\varphi'' - \lambda \varphi = 0,$$

a więc istnieje ∞^1 funkcji pięciowartościowych.

Jeżeli na koniec φ''' przedstawia dowolną płaszczyznę w przestrzeni, to

$$\lambda = \frac{\varphi'''}{\varphi}.$$

jest funkcją sześciowartościową ξ_6 . Różnych takich funkcji jest ∞^2 .

Z uwagi na tw. (6) nie istnieją funkcje 7-o wartościowe.

B) Istnieją funkcje trójwartościowe jako najmniej wartościowe.

Mamy zastanowić się nad tem, jaką własność szczególną posiada w tym przypadku krzywa Φ .

ad V. Poprowadźmy, jak w [A, II), płaszczyznę hyperoskulacyjną φ w punkcie Weierstrassa W i płaszczyznę φ' przez prostą $P_1 P_2$. Wówczas z funkcji

$$\lambda = \frac{\varphi'}{\varphi}$$

czterowartościowej otrzymamy funkcję trójwartościową, jeżeli wielomiany φ i φ' będą miały obok P_1, P_2 jeszcze jedno zero wspólne na krzywej w punkcie W , t. j. jeżeli każda płaszczyzna φ' przechodząca przez $P_1 P_2$ przechodzi przez W , czyli jeżeli prosta $P_1 P_2$ spotyka krzywą w punkcie W . Stąd wynika, że trzy z sześciu punktów przecięcia się krzywej Φ z płaszczyzną hyperoskulacyjną φ leżą na prostej. Ale te sześć punktów leżą na przecięciu stożkowem, powstałym w skutek przecięcia się powierzchni stopnia 2-go (na której leży Φ) z płaszczyzną φ . Stąd wynika, że:

Przecięcie stożkowe, powstałe w skutek przecięcia płaszczyzny φ z powierzchnią stopnia 2-go, redukuje się do dwu prostych, które mogą być oczywiście tylko prostymi rodzającymi tej powierzchni.

Innymi słowy: Jeżeli istnieje w punkcie Weierstrassa funkcja trójwartościowa, to płaszczyzna hyperoskulacyjna w tym punkcie jest styczna do powierzchni stopnia 2-go. Trzy z czterech punktów sąsiednich w punkcie W leżą na jednej prostej rodzącej powierzchnię; punkt czwarty i punkty P_1, P_2 leżą na drugiej prostej rodzącej, przechodzącej przez punkt styczności.

Istnieje więc wtedy styczna Θ do krzywej, posiadająca z nią trzy punkty sąsiednie wspólne (por str. 16).

Ten warunek konieczny jest zarazem widocznie dostateczny.

Z tego warunku wynika ograniczenie położenia wzajemnego powierzchni stopnia drugiego i trzeciego.

Mianowicie, ponieważ trzy punkty sąsiednie prostej Θ leżą także na powierzchni stopnia 3-go, zatem prosta Θ jest jedną z asymptot krzywej wskazującej w punkcie W tej powierzchni, czyli jest styczną przegięcia tejże powierzchni. A więc powierzchnia stopnia 2-go i 3-go muszą być tak położone, aby jedna z prostych rodzących powierzchni stopnia 2-go była styczną przegięcia powierzchni stopnia 3-go.

Jeszcze jedna uwaga. Zdawać by się mogło, że funkcji

$$\lambda = \frac{\varphi'}{\varphi}$$

trójwartościowych jest ∞^1 ; mianowicie przez styczną Θ , należącą do jednego z układów prostych rodzących powierzchni stopnia 2-go, można poprowadzić stałą ale dowolną płaszczyznę ψ , która przetnie krzywą Φ jeszcze w trzech punktach leżących na prostej, należącej do drugiego układu prostych rodzących. Przez tę prostą poprowadźmy znowu dowolną płaszczyznę ψ' , wówczas

$$\lambda' = \frac{\psi'}{\psi}$$

będzie także funkcją trójwartościową, stającą się nieskończenie wielką tylko w punkcie W .

Owóż zauważmy, że pęki płaszczyzn

$$\varphi' - \lambda \varphi = 0 \quad \text{i} \quad \psi' = \lambda' \psi' = 0$$

są z sobą jednokreślne, a więc

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d},$$

albo dokładniej z uwagi, że dla $\lambda = \infty$ jest $\lambda' = \infty$

$$\lambda' = a\lambda + b$$

i funkcje λ' , λ nie są siebie różne.

Że w tym przypadku obok funkcji trójwartościowych $\lambda = \xi_3$ istnieją dopiero sześciowartościowe $\xi_3 = \xi_6^2$ i t. d., można znowu łatwo sprawdzić przy pomocy twierdzenia (6).

Jakoż: a) istnieje płaszczyzna $\varphi = 0$, mająca z krzywą tylko trzy punkty sąsiednie wspólne, a więc nie istnieje funkcja czterowartościowa; b) istnieje płaszczyzna φ (płaszczyzna hyperoskulacyjna), mająca z krzywą tylko cztery punkty sąsiednie, a więc nie istnieje funkcja pięciowartościowa.

ad VII. Rozważmy obecnie pytanie, czy krzywa Φ , należąca do B), leżeć może na stożku stopnia 2-go i jakie w skutek tego posiada własności.

Zważmy, że przy przejściu w sposób ciągły od powierzchni stopnia 2-go, ogólnej np. hyperboloidy, do stożka—pary prostych rodzących, z których każda należy do innego układu, schodzą się z sobą w prostą (podwójną) rodzącą stożka. Jeżeli więc przy tem przejściu krzywa Φ ma zachować swój rodzaj $p=4$ i tę własność, że płaszczyzna hyperoskulacyjna φ w punkcie Weierstrassa ma być styczna do powierzchni stopnia 2-go, to sześć punktów przecięcia się tej płaszczyzny φ z krzywą Φ schodzą się parami z sobą tak, że krzywa posiada z jedną z prostych rodzących stożka znowu trzy punkty sąsiednie wspólne, t. j. prosta rodząca jest prostą Θ .

Dla usunięcia wszelkich wątpliwości co do tego przejścia granicznego, okażemy niemożliwość innego.

Obok powyższego schodzenia się punktów parami zająć by mogły jeszcze tylko na następujące przypadki:

1) Sześć punktów przecięcia się płaszczyzny φ z krzywą są od siebie różne: trzy z nich sąsiednie w punkcie W , trzy pozostałe P_1, P_2, P_3 różne.

2) Jeden z punktów P np. P_1 schodzi się z punktem W , dwa pozostałe P_2, P_3 różne.

3) Dwa punkty P np. P_1, P_2 schodzą się z punktem W , P_3 leży osobno.

Owóż z uwagi, że te punkty W i P , leżące na prostej Θ , leżą także na powierzchni stopnia 3-go wynikałoby, że prosta Θ leżałaby cała na tej powierzchni. A więc stożek byłby styczny do powierzchni stopnia 3-go, wskutek czego krzywa Φ rozpadłaby się na krzywą stopnia 4-go i prostą podwójną, przez co rodzaj $p=4$ nie byłby, wbrew założeniu, utrzymany.

Pozostaje więc istotnie tylko przypadek powyżej omówiony.

Ponieważ w tym razie istnieje funkcja φ , mająca z krzywą tylko trzy punkty sąsiednie wspólne, mianowicie jest to każda płaszczyzna przechodząca przez prostą rodzącą Θ , więc nie istnieje, według tw. 6, funkcja czterowartościowa. Nadto istnieje jedno φ , t. j. płaszczyzna styczna do stożka wzdłuż prostej Θ , mająca w punkcie W sześć punktów wspólnych z krzywą; stąd wynika (na mocy tw. 6), że nie istnieje funkcja siedmiowartościowa. Istnieją więc tylko funkcje $\xi_3, \xi_3, \xi_6, \xi_6$ i t. d., zgodnie z przypadkiem VII Valentina, omawianym na str. 12-ej.

Zgodność tę możemy zresztą łatwo jeszcze okazać, opierając się wprost na równaniu algebraicznym Valentina, obliczonem dla przypadku VII.

Jeżeli stożek stopnia 2-go, na którym leży krzywa Φ , odtworzymy w znany nam sposób na płaszczyźnie, to krzywa Φ edtworzy się na prostej przecięcia się płaszczyzny rzutu z płaszczyzną styczną do stożka w środku rzutu A i na krzywą stopnia 5-go styczną do siebie samej w punkcie fundamentalnym $O (= O')$ płaszczyzny rzutu.

I na odwrót: każda krzywa stopnia 5-go posiadająca punkt, w którym jest styczna do siebie samej, może być odtworzona na krzywą stopnia 6-go w przestrzeni przecięcia się stożka z inną powierzchnią.

Wiedząc to, weźmy wspomniane równanie Valentina. Ma ono kształt:

$$y^3 + y f_2(x) + f_3(x) = 0,$$

gdzie $f_2(x)$, $f_3(x)$ są wielomianami stopnia odpowiednio 2-go i 5-go względem x : $f_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$; $f_3 = b_0 + b_1x + \dots + b_5x^5$. Wprowadzając współrzędne jednorodne:

$$x = \frac{\xi}{\xi}, \quad y = \frac{\eta}{\xi},$$

otrzymamy równanie:

$$\xi^2 \eta^3 + \xi \eta f_2(\xi, \zeta) + f_3(\xi, \zeta) = 0.$$

Przy pomocy metody Cramera łatwo znaleźć, że krzywa, przedstawiona przez ostatnie równanie, posiada w okolicy wierzchołka trójkąta odniesienia $\xi = 0$, $\zeta = 0$ kształt krzywej:

$$\xi^2 \eta^3 + b_5 \zeta^5 = 0,$$

t. j. że w tym punkcie posiada punkt zwrotu „podwójny“, w którym prosta $\xi = 0$ ma z krzywą pięć punktów wspólnych. Jest to więc rzeczywiście punkt, w którym krzywa jest do siebie samej styczna.

Nadto: Z równania powyższego łatwo jest znaleźć równania stożka i powierzchni stopnia 3-go; mnożąc bowiem to równanie przez ξ i podstawiając:

$$qx_1 = \xi^2, \quad qx_2 = \xi\eta, \quad qx_3 = \xi\zeta, \quad qx_4 = \zeta^2,$$

otrzymamy:

$$x_1x_4 - x_3^2 = 0.$$

jako równanie stożka; zaś

$$x_2^3 + a_0x_1^2x_2 + a_1x_1x_2x_3 + a_2x_1x_2x_4 + a_3x_2x_0x_4 + b_0x_1^3 + b_1x_1^2x_3 + b_2x_1x_3^2 + b_3x_3^3 + b_4x_3^2 + b_5x_3x_4^2 = 0,$$

jako równanie powierzchni stopnia trzeciego (jednej z pięciu).

TWIERDZENIA OGÓLNE O CAŁKOWANIU RÓŻNICZEK ABELOWYCH W POSTACI SKOŃCZONEJ.

PODAJ

J. PTASZYCKI.

1. Twierdzenie Abela o formie, w której przedstawić można wartość całki abelowej, wyrażającej się w postaci skończonej, dało początek badaniom o najprostszyc zadaniach natury algebraicznej, do których można sprowadzić pytanie o całkowaniu danej różniczki w postaci skończonej.

W badaniach tego rodzaju roztrząsane były dotychczas głównie te przypadki, kiedy dana funkcja algebraiczna nie jest dowolną, lecz tej lub innej postaci szczególnej. Przy obecnym wszakże stanie teorii funkcji algebraicznych łatwo rozciągnąć niektóre rezultaty, otrzymane w przypadkach szczególnych, na przypadek funkcji algebraicznej ogólnej. Przegląd tych rezultatów uogólnionych stanowi cel główny pracy niniejszej; przy tem, dla pełności wykładu, nie wykluczamy z niej i tych wyników, na które przed nami zwróceno już uwagę.

2. Zadanie tedy, o którym mówić mamy, jest następujące:

Niech $F(x, y) = 0$ przedstawia równanie nieprzywiedne danej krzywej¹⁾ algebraicznej rodzaju p ; niech $f(x, y)$ będzie daną funkcją wymierną zmiennych x i y ; zbadać, czy całka

$$\int f(x, y) dx$$

¹⁾ Nazwa krzywej nie ma tu w ogóle realnego geometrycznego przedstawienia i użyta jest jedynie dla dogodności. W podobnym celu, pojmując przez a, b jakiegobądź wartości, czyniące zadość równaniu $F=0$, mówić będziemy o punkcie (a, b) na krzywej. W następstwie punkt (a, b) będziemy oznaczali jedną literą a .