

Rzecz szczególna, że wtedy powietrze i wodór mają prawie to samo przewodnictwo, jak to można wyrachować z wartości, podanych powyżej dla γ .

Te ostatnie zjawiska nie zostały jeszcze zbadane doświadczalnie. Badania takie przedstawiałyby zapewne dość znaczne trudności. Jeżeli one potwierdzą powyższą teorię, będziemy mieli nowy dowód prawdziwości teorii cyne-tycznej gazów.

Wiedeń, w listopadzie 1893 r.

ZASADY RACHUNKU ITERACYJNEGO.

NAPISZAŁ

L. E. BÖTTCHER.

Część pierwsza.

Rachunek iteracyjny, jako specjalny rozdział teorii jednoparametrowych ciągłych grup przekształceń.

1. Pojęcia ogólne.

§ 1. Uogólnienie pojęcia zmiennej i funkcji. W celu osiągnięcia należytej ogólności pojęcia iteracji, uogólnimy pojęcie zmiennej i funkcji.

Położenie dowolnego punktu w n -wymiarowej przestrzeni jest dokładnie wyznaczone, skoro znamy wartości wszystkich jego n współrzędnych $(x_1, \dots, x_n)$. Układ zatem $(x_1, \dots, x_n)$, jako obraz położenia pewnego punktu w n wymiarowej przestrzeni, uważać będziemy za liczbę uogólnioną. Skoro punkt X , odpowiadający układowi $(x_1, \dots, x_n)$, pozostaje względem układu współrzędnych w spoczynku, wówczas „liczba“ $(x_1, \dots, x_n)$ ma charakter „liczby stałej“; skoro zaś punkt X zmienia ustawicznie swoje położenie względem układu współrzędnych, wówczas „liczba“ $(x_1, \dots, x_n)$ ma charakter „liczby zmiennej“. Układ równań $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$; $(i=1, 2, \dots, n)$ wyraża, że przestrzeń n -wymiarowa uległa takiemu przekształceniu, iż punkt X położenie swoje zmienił i zajął pewne nowe położenie X' , lub, co na jedno wychodzi, układ $(x_1, \dots, x_n)$ przeszedł na układ $(x'_1, \dots, x'_n)$ albo układ $(x_1, \dots, x_n)$ został przekształcony na układ $(x'_1, \dots, x'_n)$.

Równania $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$; $i=1, 2, \dots, n$ określają nam pewne przekształcenie $(x'_1, \dots, x'_n) = T(x_1, \dots, x_n)$, które w rezultacie daje nam układ $(x'_1, \dots, x'_n)$ jako pewną „funkcję“ układu $(x_1, \dots, x_n)$. Układ $(x_1, \dots, x_n)$, występujący w charakterze „zmiennej niezależnej“, nazywamy

„argumentem“; układ zaś $(x'_1, \dots, x'_n)$, występujący w charakterze „zmiennej zależnej“, nazywamy „funkcją“. Uogólnione pojęcie funkcji należy rozumieć tak: układ $(x'_1, \dots, x'_n)$ nazywamy pewną funkcją układu $(x_1, \dots, x_n)$ wtedy, gdy na mocy pewnego przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$ układ $(x'_1, \dots, x'_n)$ przechodzi na układ $(x'_1, \dots, x'_n)$, t. j. gdy zachodzi wzór $(x'_1, \dots, x'_n) = T(x_1, \dots, x_n)$ lub równoważny z nim układ równań $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$; $i = 1, 2, \dots, n$.

§ 2. Uogólnienie pojęcia iteracyi. Szereg wzorów:

$$\left. \begin{aligned} (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) &= T(x_1, \dots, x_n), \text{ t. j. } x_i^{(1)} = f_i(x_1, \dots, x_n) \\ (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) &= T(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \text{ „ } x_i^{(2)} = f_i(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ &\dots \dots \dots \\ (x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}) &= T(x_1^{(N-1)}, \dots, x_n^{(N-1)}), \text{ t. j. } x_i^{(N)} = f_i(x_1^{(N-1)}, \dots, x_n^{(N-1)}) \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n.$$

wyraża, że do układu $(x_1, \dots, x_n)$ zastosowano przekształcenie $T(z_1, \dots, z_n)$ i powtórzone je (iterowano) N -razy. W rezultacie otrzymamy pewne przekształcenie wypadkowe i pewien nowy układ $(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)})$, jako pewną „funkcję“ danego układu $(x_1, \dots, x_n)$, t. j. argumentu $(x_1, \dots, x_n)$, zależną od wartości wykładnika N , t. j. liczby wskazującej, ile razy do układu, argumentu, zastosowano przekształcenie $T(z_1, \dots, z_n)$ i od istoty przekształcenia podstawowego $T(z_1, \dots, z_n)$. Układ $(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)})$, otrzymany w skutek N -krotnego zastosowania przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$, nazywać będziemy iteracją układu $(x_1, \dots, x_n)$ o wykładniku N i o podstawie $T(z_1, \dots, z_n)$; przekształcenia zaś, sprawujące przejście od układu $(x_1, \dots, x_n)$ do układu $(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)})$ — iteracją przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$ o wykładniku N . Symbolicznie przedstawiamy to za pomocą wzoru:

$$(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}) = \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^N (x_1, \dots, x_n) = \int_{\left\{ \begin{smallmatrix} f_i(z_1, \dots, z_n) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{smallmatrix} \right\}}^N (x_1, \dots, x_n).$$

Zwykle używane skrócone symbole: $T^N(x_1, \dots, x_n)$, $T_N(x_1, \dots, x_n)$, $T^{(N)}(x_1, \dots, x_n)$, $T_N^{(N)}(x_1, \dots, x_n)$ nie są bez poważnych braków, dlatego też w wyjątkowych tylko przypadkach do nich będziemy się uciekali.

§ 3. Ważna modyfikacja występuje w przypadku, gdy funkcja $T(z_1, \dots, z_n)$ nie jest dana wyraźnie wzorami: $z'_i = f_i(z_1, \dots, z_n)$; $i = 1, 2, \dots, n$, lecz w sposób uwikłany wzorami: $F_i(z_1', \dots, z_n', z_1, \dots, z_n) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Miejsce kolejnego przekształcenia układu $(x_1, \dots, x_n)$, zawartego we wzorach $x_i^{(1)} = f_i(x_1, \dots, x_n)$; $x_i^{(2)} = f_i(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$; $\dots$; $x_i^{(N)} = f_i(x_1^{(N-1)}, \dots, x_n^{(N-1)})$ i w wypadkowym wzorze $x_i^{(N)} = f_i^{(N)}(x_1, \dots, x_n)$, zajmuje kolejne rugowanie układów $(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$, $\dots$, $(x_1^{(N-1)}, \dots, x_n^{(N-1)})$ z równań $F_i(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}; x_1, \dots, x_n) = 0$; $F_i(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}; x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}; x_1, \dots, x_n) = 0$, $\dots$, $F_i(x_1^{(N-1)}, \dots, x_n^{(N-1)}; x_1^{(N-2)}, \dots, x_n^{(N-2)}; x_1^{(N-3)}, \dots, x_n^{(N-3)}; x_1, \dots, x_n) = 0$. Rugowanie to da nam wypadkowy układ równań

$$F_i^{(N)}(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}; x_1, \dots, x_n) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Jeżeli równania $F_i(z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}; z_1, \dots, z_n) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ określają nam przekształcenie $T(z_1, \dots, z_n)$ jako układ przekształceń o m gałęziach, to równania $F_i^{(N)}(z_1^{(N)}, \dots, z_n^{(N)}; z_1, \dots, z_n) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ określają „ N -tą iterację“ przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$ w ogólności, jako układ N przekształceń o m^N gałęziach. Staje się to w ten sposób, że jeżeli równania $F_i(z_1', \dots, z_n'; z_1, \dots, z_n) = 0$ określają nam ogół przekształceń $T_j(z_1, \dots, z_n)$ o m gałęziach; $j = 1, 2, \dots, m$, to równania $F_i^{(N)}(z_1^{(N)}, \dots, z_n^{(N)}; z_1, \dots, z_n) = 0$ określają nam przekształcenia o m^N gałęziach; przekształcenia te są złożeniami N -tego stopnia $T_j, T_j, \dots, T_{j_N}(z_1, \dots, z_n)$. Układ ten, oprócz istotnych N -tych iteracji przekształceń poszczególnych $T_1, T_2, \dots, T_m$, zawiera cały szereg innych.

Uwaga. Przekształcenia $T_1, \dots, T_m$ mogą tworzyć układ nieprzywiedlny, gdy tymczasem układ złożen $T_1, \dots, T_{j_N}$ może nie być nieprzywiedlnym. Tak np. oznaczając

$$e^{2\pi \sqrt[5]{\frac{1}{3}}} \sqrt[5]{-1} = a,$$

mamy $T_0(z) = z$; $T_1(z) = az$; $T_2(z) = a^2z$; $\dots$; $T_4(z) = a^4z$; $\dots$ układ oczywiście nieprzywiedlny. Tymczasem ich piąte iteracje przedstawiają się tak:

$$T_0^{(5)}(z) = z^5; \quad T_1^{(5)}(z) = a^{\frac{2}{\sqrt[5]{3}-1}} z^5; \quad T_2^{(5)}(z) = a^{\frac{4}{\sqrt[5]{3}-1}} z^5; \quad \dots$$

co dowodzi, że układ złożen $T_0^{(5)}(z), T_1^{(5)}(z), T_2^{(5)}(z) \dots$ jest przywiedlnym.

II. Prawa zasadnicze.

§ 4. Zasada dodawnicza. Pod nazwą „zasady dodawniczej“ pojmujemy następujące prawo: Jeżeli układ $(A_1, \dots, A_n)$ jest pewną M -tą iteracją układu $(B_1, \dots, B_n)$ przy pewnej podsta-

wie $T(z_1, \dots, z_n)$, układ $(B_1, \dots, B_n)$ jest pewną N -tą iteracją układu $(C_1, \dots, C_n)$ przy tejże podstawie $T(z_2, \dots, z_n)$, wówczas układ $(A_1, \dots, A_n)$ jest $(M+N)$ -tą iteracją układu $(C_1, \dots, C_n)$ przy tejże podstawie $T(z_1, \dots, z_n)$.

Mamy tedy

$$\prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^M \prod_{(T(z_2, \dots, z_n))}^N (x_1, \dots, x_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{M+N} (x_1, \dots, x_n).$$

Doniosłość zasady dodawniczej wypływa z jej następstw, z których podajemy dwa najważniejsze:

1) Jeżeli dwa przekształcenia są iteracjami trzeciego, to złożenie ich od ich następstwa nie zależy.

A więc jeżeli

$$U(x_1, \dots, x_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^M (x_1, \dots, x_n); \quad V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{T(z_2, \dots, z_n)}^N (x_1, \dots, x_n),$$

to zarazem $UV(x_1, \dots, x_n) = VU(x_1, \dots, x_n)$.

2) Dwa przekształcenia $U(x_1, \dots, x_n)$ i $V(x_1, \dots, x_n)$, wtedy i jedynie wtedy mogą być iteracjami trzeciego, jeżeli ich złożenie od następstwa ich nie zależy. Czy warunek $UV = VU$ jest zarazem wystarczającym, na razie osądzić niepodobna.

§ 5. Jeszcze wyraźniej występuje doniosłość zasady dodawniczej, jeżeli zauważymy, że liczni autorowie przyjmują ją za punkt wyjścia przy definicji pojęcia iteracji o wykładniku dowolnym.

Jedni uważają iterację przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$ o wykładniku y jako funkcję, czyniącą zadość tożsamościowo wzorowi:

$$T^{(y+1)}(z_1, \dots, z_n) = T T^{(y)}(z_1, \dots, z_n). \quad (1)$$

Inni zaś uważają iterację przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$ o wykładniku y jako przekształcenie, czyniące zadość tożsamościowo wzorowi:

$$\begin{aligned} \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{(u+v)} (x_1, \dots, x_n) &= \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{(u)} (x_1, \dots, x_n) \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{(v)} (x_1, \dots, x_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{(r)} (x_1, \dots, x_n) \\ \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{(0)} (x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n); \quad \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{(1)} (x_1, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) \dots \end{aligned}$$

§ 5. Zasada mnożnicza. Pod nazwą zasady mnożniczej pojmujemy następujące prawo: „Jeżeli przekształcenie $U(z_1, \dots, z_n)$ jest pewną M -tą iteracją przekształcenia $V(z_1, \dots, z_n)$, przekształcenie zaś $V(z_1, \dots, z_n)$ pewną N -tą iteracją przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$, to przekształcenie $U(z_1, \dots, z_n)$ jest $M \cdot N$ -tą iteracją przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$ ”.

Mamy tedy:

$$\prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^M (x_1, \dots, x_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^N (x_1, \dots, x_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{M \cdot N} (x_1, \dots, x_n)$$

§ 6. Zasadę mnożniczą będziemy uważali za podstawę pewnej metody badania, którą tutaj pokrótce wyłożymy. Metoda ta bezpośrednio prowadzi do pojęcia iteracji o wykładniku ułamkowym. Podstawę jej stanowi następujące prawo:

$$\prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^r (x_1, \dots, x_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{N \cdot \frac{r}{N}} (x_1, \dots, x_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^N (x_1, \dots, x_n)^{\frac{r}{N}}$$

¹⁾ E. Schröder. Mathematische Annalen t. III, 1871, str. 296—322, a mian. str. 296—298.

¹⁾ Farkas. Journal de Mathématiques pures et appliquées. Serya III, t. X, 1884, str. 101—108, a mian. str. 106. A. Korkin, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, serya II, t. VI, 1882, część pierwsza str. 228—242, a mian. str. 229. L. Léau, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. XI, 1897, E, str. 61. C. Bourlet, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. XII, 1898, C, str. 1.

Jeżeli przyjmujemy, że

$$\lim_{u \rightarrow 0} \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^u x_1, \dots, x_n = \left[\begin{array}{c} x_i + \alpha \Phi_i(x_1, \dots, x_n) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right]$$

t. j. uogólnioną hipotezę Korkina¹⁾, według której

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f_a(z) - z}{a} = \Phi(z),$$

to otrzymamy:

$$\int_{T(z_1, \dots, z_n)}^* (x_1, \dots, x_n) = \lim_{N \rightarrow 0} \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^N (x_1, \dots, x_n) \cdot \left[\begin{array}{c} z_i + \frac{1}{N} \Phi_i(z_1, \dots, z_n) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right]$$

§ 7. Zasada łączności iteracyjnej. Pod nazwą zasady łączności iteracyjnej rozumiemy następujące prawo: Jeżeli między dwoma przekształceniami $T(z_1, \dots, z_n)$ i $U(z_1, \dots, z_n)$ zachodzi związek tożsamościowy

$$SU(z_1, \dots, z_n) = TS(z_1, \dots, z_n),$$

to ten sam związek zachodzi pomiędzy dowolnymi iteracjami tychże przekształceń.

Mamy tedy obok $SU(z_1, \dots, z_n) = TS(z_1, \dots, z_n)$ wzór:

$$S \int_{U(z_1, \dots, z_n)}^* (x_1, \dots, x_n) = \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^* S(x_1, \dots, x_n).$$

Bezpośrednim następstwem tej zasady jest wzór:

$$\int_{S^{-1}T(z_1, \dots, z_n)}^{x_1, \dots, x_n} = S^{-1} \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^* S(x_1, \dots, x_n).$$

Zasada ta posiada ważne znaczenie pod dwoma względami:

¹⁾ A. Korkin, Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. Série II, t. VI, 1882, część pierwsza str. 228—242, a mian. str. 231. L. E. Böttcher, „Zasady podstawy teorii iteracji“, odbitka z Pamiętnika Towarzystwa Politechnicznego we Lwowie, 1897, str. 8, a mian. str. 6—7.

1-0. Jeżeli umiemy iterować przekształcenie $T(z_1, \dots, z_n)$, to kładąc rozmaite definicje przekształcenia $S(z_1, \dots, z_n)$, otrzymujemy tablicę różnych wzorów iteracyjnych.

2-0. Jeżeli mamy iterować przekształcenie $U(z_1, \dots, z_n)$, to rozwiązując równanie funkcyjne $SU(z_1, \dots, z_n) = TS(z_1, \dots, z_n)$, sprowadzamy iterację danego przekształcenia $U(z_1, \dots, z_n)$ do iteracji znanego przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$, a to za pomocą wzoru:

$$\int_{U(z_1, \dots, z_n)}^* (x_1, \dots, x_n) = S^{-1} \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^* S(x_1, \dots, x_n).$$

§ 8. Zastosowanie zasady łączności iteracyjnej do rachunku iteracji o dowolnym wykładniku wprowadzone zostało po raz pierwszy przez Babbage'a¹⁾

Nasuwają się tu następujące uwagi:

1-0. Czy równanie funkcyjne $SU(z_1, \dots, z_n) = TS(z_1, \dots, z_n)$ jest w ogóle całkowalnym, przy danej naturze przekształcenia $U(z_1, \dots, z_n)$ i dowolnym wyborze przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$.

2-0. Jeżeli równanie funkcyjne $SU(z_1, \dots, z_n) = TS(z_1, \dots, z_n)$, przy pewnym wyborze danego przekształcenia $U(z_1, \dots, z_n)$ i dowolnego przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$, jest względem nieznanego przekształcenia $S(z_1, \dots, z_n)$ całkowalnym — jak przedstawia się ogólna postać owego nieznanego przekształcenia $S(z_1, \dots, z_n)$, jakie czynniki dowolne zawiera, w jakim związku te ostatnie stoją z przekształceniem dowolnym $T(z_1, \dots, z_n)$?

3-0. Jaki wpływ wywiera dowolność wyboru przekształcenia pomocniczego $T(z_1, \dots, z_n)$ i czynników dowolnych, zachodzących w skutek całkowania równania funkcyjnego $SU(z_1, \dots, z_n) = TS(z_1, \dots, z_n)$?

W przypadku prostym $n=1$ pytanie 3-e rozstrzyga następująca teoria.

Jeżeli $\varphi_0(z)$ jest jedną z całek szczególnych równania $\varphi(u) = t\varphi(z)$ a funkcja $A(z)$ jest całką dowolną równania $At(z) = A(z)$, wówczas iteracja o podstawie $u(z)$, a wykładniku ν jest pierwiastkiem równania przestępnego

$$\int_{\mathcal{K}(z)}^{\Delta \varphi_0(z)} \varphi_0(z) = \int_{\mathcal{I}(z)}^{\nu + \Delta \varphi_0(z)} \varphi_0(z) \dots \dots \dots (A).$$

¹⁾ Ch. Babbage: Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1815, str. 389—423; 1816, str. 179. Examples of the Solutions of functional equations. Dodatek do dzieła J. F. W. Herschela: Collections of Examples of the Applications of the Calculus of finite differences. Cambridge, 1820.

Każda funkcja szczególna $t(z)$ wprowadza nieskończoną rozmiotłość funkcji, przedstawionych z jednakowym prawem do tytułu iteracji o podstawie $u(z)$ i wykładniku ν .

Iteracja o danej podstawie $u(z)$ i wykładniku dowolnym ν jest funkcją nieskończenie wielopostaciową.

Wszystkie pierwiastki równania (A) tworzą układ przywiedlny, skoro ν jest liczbą całkowitą, dodatnią, wskutek czego występują pierwiastki zgodne z definicją osobno, pozostałe zaś nie wchodzą z nimi w cykl. Gdy zaś ν nie jest liczbą całkowitą, wówczas równania (A) już nie tworzą układu nieprzywiedlnego.

III. Uogólnienie pojęcia iteracji. Iteracje o wykładniku dowolnym.

§ 9. Zadaniem niniejszego rozdziału jest uogólnienie pojęcia iteracji przez wprowadzenie pojęcia iteracji o wykładniku całkowitym dodatnim, całkowitym ujemnym, ułamkowym dowolnego znaku, niewymiernym dowolnego znaku, zespolonym dowolnym. Mamy zamiar to uczynić na mocy analogii, jaka zachodzi między dodawaniem, mnożeniem, potęgowaniem z jednej strony, a iterowaniem dowolnych przekształceń z drugiej strony. Jak jedynie tylko całkowita dodatnia liczba, wielokrotność, potęga daje się otrzymać na drodze bezpośredniego rachunku, ak samo jedynie tylko iteracja o wykładniku całkowitym dodatnim daje się bezpośrednim rachunkiem otrzymać.

Iteracje o wykładniku całkowitym, ujemnym, ułamkowym dowolnego znaku, niewymiernym dowolnego znaku, zespolonym dowolnym, dają się otrzymać na drodze pośredniej.

§ 10. Iteracja przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$ o wykładniku całkowitym ujemnym $-M$ otrzymuje się, jako rozwiązanie równania analitycznego t. j. algebraicznego, resp. przestępnego, a to na mocy wzoru:

$$\prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^M (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n), \text{ skąd wypływa } (y_1, \dots, y_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{-M} (z_1, \dots, z_n). \dots (a)$$

Iteracja przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$ o wykładniku ułamkowym $\frac{M}{N}$ otrzymuje się jako cała równania funkcyjnego:

$$\prod_{U(z_1, \dots, z_n)}^N (z_1, \dots, z_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^M (z_1, \dots, z_n); \text{ skąd } U(z_1, \dots, z_n) = \prod_{T(z_1, \dots, z_n)}^{\frac{M}{N}} (z_1, \dots, z_n). \dots (a).$$

Znane w literaturze iteracji prawo in w e r s y i ¹⁾ stwierdza²⁾ istnienie analityczne iteracji o wykładniku całkowitym ujemnym, gdyż wiąże ją bezpośrednio teorią równań algebraicznych lub przestępnych. Działanie zaś, znane pod nazwą interpolacji ³⁾, daje możliwość iteracji o wykładniku ułamkowym, zależną od całkowalności równania funkcyjnego typu

$$\prod_{U(t_1, \dots, t_n)}^N (z_1, \dots, z_n) = \prod_{T(t_1, \dots, t_n)}^M (z_1, \dots, z_n).$$

§ 11. Równanie to uproszcil Babbage, wprowadzając zasadę łączności iteracyjnej. Pomysł Babbage'a da się uogólnić w sposób następujący: Równanie funkcyjne iteracyjne (t. j. równanie, w którym dany jest związek między argumentem, funkcją nieznaną i jej pierwszymi N iteracjami)

$$\prod_{U(t_1, \dots, t_n)}^N (z_1, \dots, z_n) = \prod_{T(t_1, \dots, t_n)}^M (z_1, \dots, z_n) \dots \dots \dots (1)$$

sprawdzamy do równania funkcyjnego

$$ST(z_1, \dots, z_n) = \prod_{K(t_1, \dots, t_n)}^M S(z_1, \dots, z_n) \dots \dots \dots (2).$$

Całkujemy te ostatnie względem $S(z_1, \dots, z_n)$ i otrzymujemy

$$U(z_1, \dots, z_n) = S^{-1} \prod_{K(t_1, \dots, t_n)}^N S(z_1, \dots, z_n) \dots \dots \dots (3).$$

§ 12. Pojęcie iteracji o wykładniku niewymiernym możemy traktować w następujący sposób:

¹⁾ R. H o p p e, Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. V, 1860, str. 136—139, a mian. str. 136. E. S c h r ö d e r, Mathematische Annalen, t. III, 1871, str. 296—322, a mian str. 317.

²⁾ H o p p e l. c.

³⁾ Ch. B a b b a g e. An essay towards the calculus of functions. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1815, str. 389—423. Problem. XIX, s. 417—420. Autor bada równanie funkcyjne iteracyjne rzędu n -go: $F[x, \psi(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)] = 0$ i redukuje je za pomocą podstawienia $\psi(x) = \varphi^{-1} f \varphi(x)$ do równania funkcyjnego podstawniczego tegoż samego rzędu: $F[\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1} f(x), \varphi^{-1} f_2(x), \dots, \varphi^{-1} f_n(x)] = 0$, w którym funkcja $f(x)$ jest znaną, zaś $\varphi^{-1}(x)$ ma być zależoną.

Przypuścimy, że liczba niewymierna ν jest wartością graniczną, do której zmierza szereg ułamków

$$\frac{M_1}{N_1}, \frac{M_2}{N_2}, \frac{M_3}{N_3}, \dots,$$

będących np. reduktami liczby ν rozwiniętej na ułamek ciągły.

W takim razie iteracja o wykładniku ułamkowym $\frac{M_k}{N_k}$ w miarę nieograniczonego wzrastania w składową k będzie w granicy określała iterację o wykładniku niewymiernym ν .

T. j. jeżeli $\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k}{N_k}$, to

$$\int_{T(t_1, \dots, t_n)}^{\nu} (z_1, \dots, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T(t_1, \dots, t_n)}^{\frac{M_k}{N_k}} (z_1, \dots, z_n)$$

§ 13. Do każdej liczby a możemy, jak wiadomo, dobrać drugą liczbę α taką, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = a,$$

wtedy dowolna ν -ta potęga liczby a wyraża się wzorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha \nu}{n}\right)^n = a^\nu.$$

Wzór ten utrzymuje się nie tylko dla wszystkich wartości ν , a więc dla całkowitych dodatnich, całkowitych ujemnych, wymiernych lub niewymiernych dowolnego znaku, zespolonych. Na podstawie analogii przyjmujemy, że: do każdego przekształcenia $T(z_1, \dots, z_n)$, określonego równaniami: $z'_i = f_i(z_1, \dots, z_n)$ możemy dołączyć drugie przekształcenie $U(z_1, \dots, z_n)$, określone równaniami $z_i = F_i(z_1, \dots, z_n)$, i tak dobrane, by zachodziła tożsamość:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^{\nu} (x_1, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) \left\{ z_i + \frac{1}{N} F_i(z_1, \dots, z_n) \right\}_{i=1, 2, \dots, n}$$

Wówczas zachodzi też i tożsamość:

$$\int_{T(z_1, \dots, z_n)}^{\nu} (x_1, \dots, x_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^N (x_1, \dots, x_n) \left\{ z_i + \frac{\nu}{N} F_i(z_1, \dots, z_n) \right\}_{i=1, 2, \dots, n}$$

IV. Zastosowanie teorii ciągłych jednoparametrowych grup przekształceń do rachunku iteracyjnego.

§ 14. Pierwsze prawo zasadnicze. Uważając zasadę dodawniczą za punkt wyjścia całej teorii rachunku iteracyjnego, przyjdzie do przekonania, że ogół iteracji o wykładnikach całkowitych dodatnich tworzy nieciągłą, jednoparametrową grupę przekształceń. Podobną grupę tworzy ogół iteracji o wykładnikach całkowitych ujemnych. Ogół iteracji o wykładnikach wymiernych tworzy jednoparametrową nieciągłą grupę przekształceń, która tak się ma do grupy jednoparametrowej ciągłej, jak ogół liczb wymiernych rzeczywistych do ogółu wszystkich możliwych. Dopiero wprowadzenie pojęcia iteracji o dowolnym wykładniku, tak zespolonym jak i rzeczywistym, pozwala nam ogół wszystkich możliwych iteracji traktować jako grupę jednoparametrową a ciągłą. Odwracając tę zasadę, otrzymujemy warunek konieczny, któremu dane przekształcenie podstawowe musi czynić zadość, by jego iteracje o dowolnym wykładniku miały rację bytu. Warunek ów, który jak okażemy, jest nie tylko koniecznym, ale i dostatecznym, stanowić będzie pierwsze zasadnicze prawo rachunku iteracyjnego, traktowanego ze stanowiska teorii jednoparametrowych, ciągłych grup przekształceń.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, któremu musi czynić zadość przekształcenie podstawowe, aby iteracje jego o dowolnym wykładniku mogły mieć rację bytu, jest istnienie przynajmniej jednej jednoparametrowej ciągłej grupy przekształceń, która by zawierała w sobie przekształcenie podstawowe, jako przekształcenie szczególne.

Konieczność owego warunku jest oczywista; rozchodzić się może jedynie o jego dostateczność. W tym celu okażemy, że zasada łączności iteracyjnej daje się bezpośrednio zastosować, skoro tylko warunkowi powyższemu stało się zadość. Przedstawmy jednoparametrową ciągłą grupę przekształceń, która przekształcenie dowolne zawiera pod postacią kanoniczną:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_1(z_1, \dots, z_n) \\ \Omega_2(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_2(z_1, \dots, z_n) \\ &\dots \\ \Omega_{n-1}(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_{n-1}(z_1, \dots, z_n) \\ W(z'_1, \dots, z'_n) &= W(z_1, \dots, z_n) + t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Wówczas przedstawienie podstawowe $T(z_1, \dots, z_n)$ przedstawi się w sposób następujący:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_1(z_1, \dots, z_n) \\ \Omega_2(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_2(z_1, \dots, z_n) \\ &\dots \\ \Omega_{n-1}(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_{n-1}(z_1, \dots, z_n) \\ W(z'_1, \dots, z'_n) &= W(z_1, \dots, z_n) + \tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Wobec tego przekształcenie, charakteryzujące się formą kanoniczną:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_1(z_1, \dots, z_n) \\ \Omega_2(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_2(z_1, \dots, z_n) \\ &\dots \\ \Omega_{n-1}(z'_1, \dots, z'_n) &= \Omega_{n-1}(z_1, \dots, z_n) \\ W(z'_1, \dots, z'_n) &= W(z_1, \dots, z_n) + \tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

przedstawia nam τ -tą iterację przekształcenia podstawowego $T(z_1, \dots, z_n)$.

§ 15. Drugie prawo zasadnicze. Jeżeli tylko istnieje jednoparametrowa ciągła grupa przekształceń, zawierająca dane przekształcenie podstawowe, jako przekształcenie szczególne, wówczas wszelka iteracja owego podstawowego przekształcenia jest w grupie zawartą. Parametr kanoniczny przekształcenia grupy, identycznego z pewną iteracją przekształcenia pod-

stawowego równa się iloczynowi wykładnika iteracji i parametru kanonicznego przekształcenia grupy identycznego z przekształceniem podstawowym.

Rozważywszy treść § 8 dochodzimy do następującego poglądu:

Istnieje nieskończenie wiele jednoparametrowych ciągłych grup przekształceń, mających wspólną nieciągłą podgrupę, na którą się składa przekształcenie podstawowe i jego iteracje o wykładnikach całkowitych, tak dodatnich, jak ujemnych.

Stąd zadanie nasze główne przedstawia się tak:

Do danego przekształcenia podstawowego i do łańcucha jego iteracji o wykładnikach całkowitych dowolnego znaku, tworzącego nieciągłą grupę przekształceń, dołączyć grupę jednoparametrową ciągłą, któraby ów łańcuch zawierała jako podgrupę nieciągłą i wyznaczyć ogólną postać nieskończenie małego przekształcenia tej grupy ciągłej, które dla każdej poszczególnej jednoparametrowej ciągłej grupy będzie właściwe i jednoznacznie z nią sprzężone.

Zadanie to pragniemy w studyum niniejszem rozwiązać, jeżeli nie wyzerpująco, to przynajmniej wskazując metodę rozwiązania.

§ 16. Twierdzenia Korkina i Farkasa¹⁾). Wprowadzenie pojęcia iteracji o dowolnym wykładniku, jakkolwiek problematyczne co do swojej prawomocności, pozwoliło jednak niektórym badaczom mówić o iteracji, mającej wykładnik zmienny, a tem samem myśleć o różniczkowaniu iteracji względem wykładnika, a mianowicie A. Korkinowi w 1872 i J. Farkasowi w 1884 r. Autorowie ci traktują iterację o podstawie $f(z)$ i wykładniku y jako funkcję $\Phi(y, z)$, czyniącą zadość tożsamości:

$$\Phi(y' + y'', z) = \Phi[y', \Phi(y'' z)] = \Phi[y'', \Phi(y' z)].$$

Różniczkując ten wzór, otrzymują oni dwa prawa:

Jeżeli

$$(a) \dots \dots \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left[I(z) - z \right] = \xi(z),$$

to

$$(1) \dots \dots \frac{\partial}{\partial y} I(z) = \xi I(z); \quad \frac{\partial}{\partial y} I(z) = \xi(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} I(z) \dots \dots (2).$$

¹⁾ A. Korkin. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Serya II, t. VI, 1882, część pierwsza, str. 228—242, a mian. 231—232.

²⁾ J. Farkas. Journal de Mathématiques pures et appliquées, Serya III, t. X, 1884, str. 101—108.

W notatce „Zasadnicze podstawy teorii iteracji“ (Pamiętnik Tow. Politechnicznego we Lwowie, zeszyt I, 1897, str. 126—133) omawiając wzór (a), wprowadzony przedtem przez Korkina, nazwaliśmy funkcję $\xi(z)$ funkcją iteracyjną funkcji $f(z)$; ponieważ wzory powyższe prowadzą do wniosków:

$$(1) \quad \int_{\xi}^{\xi_y(z)} \frac{dt}{\xi(t)} = y. \quad (2) \quad \int_{\xi(z)}^{\xi_u(z)} \frac{dt}{\xi(t)} = u - v.$$

przeło funkcję

$$\int_{\xi}^{\xi} \frac{dt}{\xi(t)}$$

nazwaliśmy logarytmem iteracyjnym funkcji $f(z)$.

Mamy następnie

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial z} \int_{\xi(z)}^y e^{\int_{\xi(z)}^y \xi^{(1)}(u) du} = e^{\int_{\xi(z)}^y \xi^{(1)}(u) du} \quad (4) \quad f^{(1)}(z) = e^{\int_{\xi(z)}^1 \xi^{(1)}(u) du}$$

$$(5) \quad \int_{\xi(z)}^y (a) - \int_{\xi(z)}^y (b) = \int_{\xi(z)}^y e^{\int_{\xi(z)}^y \xi^{(1)}(u) du} dz$$

$$(6) \quad \frac{dz}{\xi(z)} = \frac{df_y(z)}{\xi f_y(z)}.$$

Ostatni wzór sprowadza konstrukcję funkcjonalu iteracyjnego $\xi(z)$ funkcji $f(z)$ do całkowania równania różniczkowo-funkcyjnego

$$\frac{dz}{\Omega(z)} = \frac{df(z)}{\Omega f(z)} \text{ lub } \Omega f(z) = f^{(1)}(z) \Omega(z). \quad (1)$$

¹ Równanie to podał w t. VII, Crelle's Journal, 1830. w art. II illa „Aufgaben und Lehrsätze“ str. 102—104. d-r Stern z Getyngi i sformułował słowami: „data functione $f(z)$ invenire functionem $\varphi(z)$ ex aequatione

$$\varphi f(z) = f^{(1)}(z) \varphi(z). \quad \text{str. 104, przykład 16.}$$

W tem samem czasopiśmie próbował rozwiązać to zadanie Ramus wart. „Remarques sur l'équation $\varphi f(z) = f^{(1)}(z) \varphi(z)$ “, Crelle's Journal, t. IX, 1832, str. 259—261^a, zbijając

§ 17 Uogólniając twierdzenia Korkina i Farkasa, otrzymujemy następujące dwa twierdzenia, które są tylko szczególnym przypadkiem pierwszego zasadniczego prawa teorii ciągłych grup Liego ¹⁾.

Jeżeli

$$(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}) = \int_{T(z_1, \dots, z_n)}^y (x_1, \dots, x_n),$$

to pierwsze pochodne cząstkowe zmiennych $x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}$, uważanych jako funkcje $(n+1)$ zmiennych: $x_1, \dots, x_n, y$, wzięte względem wykładnika y , są funkcjami tylko n zmiennych $x_1, \dots, x_n^{(y)}$. Mamy zatem:

$$\frac{\partial x_i^{(y)}}{\partial y} = \xi_i(x_1^{(y)}, x_2^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}) \dots \dots \dots (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Przytem zachodzi uogólniony wzór Korkina:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_i^{(a)} - x_i}{a} = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Obok prawa (1) występuje też szereg wzorów:

$$\frac{\partial x_i^{(y)}}{\partial y} = \xi_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_i^{(y)}}{\partial y} + \xi_2(x_2, \dots, x_n) \frac{\partial x_i^{(y)}}{\partial x_2} + \dots + \xi_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_i^{(y)}}{\partial x_n} \dots \dots \dots (2)$$

§ 18. Najważniejszem następstwem uogólnionych twierdzeń Korkina i Farkasa jest następujące

Trzecie prawo zasadnicze. Jeżeli

$$(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}) = \int_{T(z_1, \dots, z_n)} (x_1, \dots, x_n),$$

wówczas istnieje taki, niezależny od podstawy iteracji układ n równań różniczkowych cząstkowych

mylnie rozwiązanie tego zadania, jakie tamże podał Th. Clausius. W tym celu Ramus stosował rachunek iteracyjny. Na właściwem miejscu w części trzeciej bliżej omówimy rachunek Ramusa. W ostatnich czasach równanie to, przy pomocy teorii zbieżności iteracji, zostało rozwiązane przez Lemeraya (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXV, 1898, str. 92—95) i przez Léa'u'a (Annales de la Faculté de sciences de Toulouse, t. XI, 1897).

¹⁾ Sophus Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Lipsk. Teubner, 1888, Capitel 2, str. 27—45.

rzędu drugiego, któremu wyrazy $x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}$ jako funkcje zmiennych niezależnych $x_1, \dots, x_n, y$ czynią zadość, niezależnie od podstawy iteracji. A mianowicie:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial y^2} & \frac{\partial x_1^{(y)}}{\partial y} & \frac{\partial x_2^{(y)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial x_n^{(y)}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial x_1 \partial y} & \frac{\partial x_1^{(y)}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2^{(y)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_n^{(y)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial x_2 \partial y} & \frac{\partial x_1^{(y)}}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2^{(y)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial x_n^{(y)}}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial x_n \partial y} & \frac{\partial x_1^{(y)}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_2^{(y)}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial x_n^{(y)}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n.)$$

§ 19. Równanie

$$\frac{\partial x_i^{(y)}}{\partial y} = \xi_i(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}),$$

jeżeli położymy

$$\frac{\partial}{\partial z_v} \xi_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = \xi_{i,v}^{(1)}(z_1, \dots, z_n)$$

da nam po różniczkowaniu względem y :

$$\frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial y^2} = \sum_{v=1}^n \xi_{i,v}^{(1)}(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}) \frac{\partial x_v^{(y)}}{\partial y} = \sum_{v=1}^n \xi_{i,v}^{(1)}(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}) \xi_v(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}),$$

$$\text{t. j.} \quad \frac{(\partial^2 x_i^{(y)})}{\partial y^2} = \xi_{i,1}(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)});$$

w podobny sposób otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial y^3} = \xi_{i,2}(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}), \text{ i t. d.}$$

W ogólności

$$\frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial y^p} = \xi_{i,p}(x_1^{(y)}, \dots, x_n^{(y)}).$$

Stąd wypływa tożsamość:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial y^p} & \frac{\partial x_1^{(y)}}{\partial y} & \frac{\partial x_2^{(y)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial x_n^{(y)}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial y_1 \partial y^{p-1}} & \frac{\partial x_1^{(y)}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2^{(y)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_n^{(y)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial x_2 \partial y^{p-1}} & \frac{\partial x_1^{(y)}}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2^{(y)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial x_n^{(y)}}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 x_i^{(y)}}{\partial x_n \partial y^{p-1}} & \frac{\partial x_1^{(y)}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_2^{(y)}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial x_n^{(y)}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n.)$$

§ 20. Czwarte prawo zasadnicze. Zachowując powyższe znakowanie, mamy dwie tożsamości:

$$T(z_1, \dots, z_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_N (z_1, \dots, z_n) \left[t_i + \frac{\partial}{\partial y} \xi_i(t_1, \dots, t_n) \right]$$

$$\int_T^y (z_1, \dots, z_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_N (z_1, \dots, z_n) \left[t_i + \frac{\partial}{\partial y} \xi_i(t_1, \dots, t_n) \right]$$

przyczem zastrzega się, żeby $|C|$ i $|Cy|$ nie były liczbami zbyt wielkimi.

Zajmiemy się tem prawem w niniejszym rozdziale, kładąc $n=1$.

§ 21. Załóżmy, że w punkcie z funkcja $\xi(z)$ jest skończoną i różną od zera; ciągłość jej w tym punkcie nie nas nie obchodzi.

Zatoczmy naokół punktu z pewnym promieniem r koło i oznaczmy maximum, jakie $|\xi(t)|$ w obrębie tego koła przybiera, przez M_r . Stosunek $r:M_r$ oznaczmy przez S_r . Jeżeli $r=0$, to wobec $0 < |\xi(z)| < \infty$ mamy $S_0 = 0$. Gdyby promień r był tak wielki, że w obrębie koła znalazłby się punkt z taki, że $\xi(z)=0$, to dla każdego r od tej wartości nie mniejszego byłoby stale $S_0 = r:\infty = 0$. A więc w miarę tego, jak promień r rośnie, począwszy od zera, stosunek S_r również rośnie, począwszy od zera, nie może jednak się stać nieskończenie wielkim, bo licznik r jest skończony,

a mianownik M nie może być zerem, a więc $S_{r,z}$ może albo rosnąć stale lub oscylując do pewnej skończonej granicy, od której począwszy będzie maleć do zera. Dla dalszego wzrastania r będzie $S_{r,z} = 0$ stale. Otóż wartość największa, jaką może $S_{r,z}$ otrzymać, jest wielkością ściśle od położenia punktu z zależną i będziemy ją oznaczali krótko: przez $S(z)$, odpowiedni promień oznaczali przez $R(z)$, a odpowiednie maximum na $|\xi(t)|$ t. j. odpowiednią wartość $M_{r,z}$, przez $M(z)$.

§ 22. Poczyniwszy te założenia, zbadajmy znaczenie szeregu:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= z + \frac{\xi(z)}{N} \\ z_2 &= z_1 + \frac{\xi(z_1)}{N} \\ &\dots \dots \dots \\ z_N &= z_{N-1} + \frac{\xi(z_{N-1})}{N} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

w którym kładziemy $\lim N = \infty$.

Punkt z_1 będzie się znajdował na obwodzie koła o środku z i promieniu $\frac{1}{N} |\xi(z)|$, a więc wewnątrz koła C_1 o środku z i promieniu $\frac{1}{N} M(z)$. Możemy N dobrać tak wielkie, że punkt z_1 wypadnie w obrębie koła o środku z i promieniu $R(z)$, albowiem $R(z) > \frac{1}{N} M(z)$. A więc punkt z_2 będzie się znajdował wewnątrz koła o środku z_1 i promieniu równym $\frac{1}{N} M(z)$, a więc tembardziej w obrębie koła C_2 o środku w z_1 i o promieniu równym $\frac{2}{N} M(z)$. Można punkt z_2 uważać jako zawarty w obrębie koła o środku z i promieniu $R(z)$, gdyż $R(z) > \frac{2}{N} M(z)$ i t. d. Wszystkie punkty szeregu $z, z_1, z_2, \dots$, aż do punktu z_i można uważać jako zawarte w obrębie koła o środku z i o promienieniu $R(z)$, jeżeli tylko $R(z) > \frac{i}{N} M(z)$.

Zachodzić tu mogą następujące przypadki:

a) $S(z) \geq 1$, wówczas $R(z) > \frac{i}{N} M(z)$ zawsze, dopóki $i < N$, t. j. dopóki $\frac{i}{N} < 1$. Jakoż wtedy $R(z) \geq M(z)$, a więc tem bardziej $R(z) > \frac{i}{N} M(z)$, gdyż $i < N$.

W przypadku (a) zatem szereg (1) wyznacza całkiem oznaczoną wartość graniczną.

b) $S(z) < 1$, wówczas $R(z) > \frac{i}{N} M(z)$ wymaga, by stosunek $\frac{i}{N}$ był od jedności mniejszy i szereg (1) bezpośrednio nie doprowadza nas do żadnego rezultatu.

Oba te przypadki mogą być sprowadzone do jednego, gdy zamiast szeregu (1) weźmiemy szereg

$$z_i = z_{i-1} + \frac{R(z)}{M(z)} \xi(z_{i-1}),$$

gdzie $\frac{R(z)}{M(z)}$ uważamy za ilość stałą.

§ 23. W przypadku a) piszemy:

$$\frac{1}{N} = \frac{z_1 - z}{\xi(z)} = \frac{z_2 - z_1}{\xi(z_1)} = \frac{z_3 - z_2}{\xi(z_2)} = \dots = \frac{z_N - z_{N-1}}{\xi(z_{N-1})},$$

skąd wypływa

$$1 = \int_z^{z_N} \frac{dt}{\xi(t)},$$

przyczem droga całkowania zupełnie zawiera się w obrębie koła o środku z i o promieniu $R(z)$, odbywając się wzdłuż toru całkowicie oznaczonego.

Stąd wynika, że jeżeli tylko $|v| < S(z)$, to szereg wzorów

$$z_1 = z + \frac{v}{N} \xi(z)$$

$$z_2 = z_1 + \frac{v}{N} \xi(z_1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_N = z_{N-1} + \frac{v}{N} \xi(z_{N-1})$$

z całą dokładnością wyznacza w granicy wartość Z będącą pierwiastkiem równania

$$v = \int_z^Z \frac{dt}{\xi(t)}.$$

Łatwe zastosowanie zasady łączności iteracyjnej okaże nam prawdziwość czwartego prawa zasadniczego.

§ 23. W przypadku (b) prowadzimy szereg $z, z_1, z_2, z_3, \dots$, tak długo, dopóki nie stanie się zadość nierównościom

$$\frac{i}{N} < S(z), \quad \frac{i+1}{N} > S(z),$$

oznaczamy wtedy $z_i = z^{(1)}$, poczem piszemy dawny szereg od punktu $z^{(1)}$ począwszy.

Szereg $z^{(1)}, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots$, właściwie $z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \dots$, prowadzimy tak długo, dopóki nie będzie:

$$\frac{i_1}{N} < S(z^{(1)}), \quad \frac{i_1+1}{N} > S(z^{(1)}),$$

i oznaczamy $z_{i_1}^{(1)} = z^{(2)}$, poczem piszemy szereg dawny od punktu $z^{(2)}$ począwszy.

Szereg $z^{(2)}, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \dots$, właściwie $z_{i+i_1}, z_{i+i_1+1}, z_{i+i_1+2}, \dots$, prowadzimy tak długo, dopóki nie będzie

$$\frac{i_2}{N} < S(z^{(2)}), \quad \frac{i_2+1}{N} > S(z^{(2)})$$

i t. d.

Działania te powtarzamy tak długo, dopóki nie okaże się, że

$$\frac{i + i_1 + i_2 + \dots + i_k}{N}$$

nie stanie się większe od jedności.

Mamy dwie możliwości:

1^o Szereg $S(z) + S(z^{(1)}) + S(z^{(2)}) + \dots$ jest rozbieżny. W tym razie szereg

$$z_{i+1} = z_i + \frac{\xi(z_i)}{N}$$

wyznacza dokładnie wartość graniczną na z_N jako pierwiastek równania

$$1 = \int_1^z \frac{dt}{\xi(t)}$$

jedyny, raczej najbliższy do punktu z pierwiastek, licząc drogę od punktu z wzdłuż oznaczonego.

Jeżeli teraz q będzie liczbą dowolną rzeczywistą, dodatnią, to szereg

$$z_{i+1} = z_i + \frac{q}{N} \xi(z_i) \quad i=0,1,2,\dots,N-1$$

wyznacza nam nową funkcję $f_q(z)$, którą jest q -tą iteracją funkcji $f_q(z)$, określonej przez szereg:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{N} \xi(z_i).$$

2^o Szereg $S(z) + S(z^{(1)}) + S(z^{(2)}) + \dots$, jest zbieżny, ale suma jego jest większa od jedności.

Wówczas szereg $z_{i+1} = z_i + \frac{1}{N} \xi(z_i)$ wyznacza pewną funkcję $f(z)$,

ale drugi szereg $z_{i+1} = z_i + \frac{q}{N} \xi(z_i)$ przy wartości rzeczywistej dodatniej q wymaga, by q było mniejsze od pewnej wartości granicznej.

3^o Szereg $S(z) + S(z^{(1)}) + S(z^{(2)}) + \dots$ jest zbieżny, ale suma jego jest mniejsza od jedności.

Wówczas szereg $z_{i+1} = z_i + \frac{1}{N} \xi(z_i)$ nie określa nam żadnej funkcji oznaczonej, bo z_i już dla $i < N$ staje się równem nieskończoności.

Jedynie szereg $z_{i+1} = z_i + \frac{q}{N} \xi(z_i)$ przy q rzeczywistym dodatnim, wymaga, by q było mniejsze od pewnej wartości od 1 mniejszej. Stąd wypływa:

1. Każdemu punktowi płaszczyzny z odpowiada pewna krzywa, która obwodem swym dzieli płaszczyznę zmiennej zespolonej na dwa obszary: do jednego z nich należy sam punkt z . Wszystkim wartościom zespolonym q , zawartym w obszarze, punkt z zawieraającym, odpowiada zbieżność utworu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^z \frac{dt}{\xi(t)}.$$

Dla wszystkich wartości zespolonych q po za obrębem tego obszaru znajdujących się jest ów twór rozbieżnym.

Obszar ów, punkt z zawierający, jest jednolitym, nie rozpadającym się na owale. Nazywać go będziemy obszarem zasadniczym do punktu z dołączonym.

2. Jeżeli punkty q_1 i q_2 znajdują się w obrębie obszaru zasadniczego do punktu z dołączonego, to pomiędzy funkcjami $f(z)$ i $\varphi(z)$, określonymi przez wzory:

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{t + \frac{q_1}{N} \leq t}^N (z), \quad \varphi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{t + \frac{q_2}{N} \leq t}^N (z)$$

zachodzą związki tożsamościowe:

$$f(z) = \prod_{\varphi(t)}^{\frac{q_1}{q_2}} (z); \quad \varphi(z) = \prod_{f(t)}^{\frac{q_2}{q_1}} (z).$$

Wróćmy do tego przedmiotu w części trzeciej naszej pracy.

Część druga.

0 zbieżności iteracji.

V. Ogólne uwagi i pojęcia.

§ 25. Uwagi wstępne. Z powodu trudności natury teoretycznej ścisłym zakresem tej pracy. Najprzód zamiast mówić o przekształceniach układu n zmiennych niezależnych, będziemy mówili o funkcjach jednej zmiennej niezależnej. Następnie ograniczymy się do funkcji tylko algebraicznych, wymiernych, a w szczególnych przypadkach oddzielimy podstawę iteracji algebraiczną, wymierną, całkowitą od podstawy algebraicznej, wymiernej ułamkowej. Dla wciągnięcia punktu ∞ w zakres badania, będziemy stosowali nie płaszczyznę, ale powierzchnię kulistą zmiennej zespolonej, na której obrazem punktu 0 byłby biegun południowy, a obrazem punktu ∞ biegun północny kuli.

§ 26. Łamana iteracyjna. Punkty $z, f(z), f_2(z), f_3(z), \dots$ połączmy łukami kół wielkich. otrzymamy w ten sposób wielokątną łamaną sferyczną którą będziemy nazywali łamaną iteracyjną punktu z . Rozróżniamy następujące typy łamanych:

1) Zamknięta łamana rzędu m -tego, w której punkt $f_m(z)$ schodzi się z punktem z .

2) Sygmatyczna łamana rzędu m -tego klasy n -tej, w której punkt $f_{n+m}(z)$ schodzi się z punktem $f_n(z)$.

3) Otwarta łamana, w której żadnej skończonej parze wartości m i n nie odpowiada $f_{m+n}(z) = f_n(z)$.

§ 27. Zarys schematyczny teorii zbieżności iteracji. Odtwarzając na powierzchni kuli szereg liczb $z, z_1, z_2, z_3, \dots$ w punktach $Z, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, otrzymujemy w ogólności nieskończenie wielką liczbę punktów na powierzchni skończonej: Możemy zauważyć tu następujące przypadki:

1° Szereg punktów $Z, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ niezależnie od położenia punktu Z sprowadza się do skończonej liczby punktów, a to na mocy tożsamości $Z = Z_m = Z_{2m} = \dots; Z_1 = Z_{m+1} = Z_{2m+1} = \dots; Z_2 = Z_{m+2} = Z_{2m+2} = \dots; \dots; Z_{m-1} = Z_{2m-1} = Z_{3m-1} = \dots$. W pewnych specjalnych przypadkach nie jest wyłączona dalsza redukcja na mocy $Z = Z_r = Z_{2r} = \dots = Z_m$, gdzie m jest przez r podzielne.

2° Funkcja, czyniąca zadość tożsamości $f_m(z) = z$, nazywa się funkcją iteracyjnie peryodyczną, o peryodzie wymiernym, równym m ¹⁾.

§ 28. Szereg punktów $Z, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ w ogólności składa się z nieskończenie wielu punktów odrębnych, tak jednak rozmieszczonych na powierzchni kuli, że istnieje przynajmniej jeden punkt P taki, że w jego otoczeniu znajduje się nieskończenie wiele punktów szeregu $Z, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, grupujących się tam nieskończenie gęsto.

Tutaj mogą się zdarzyć dwa przypadki: 1) począwszy od pewnego skończonego miejsca cały ogół punktów $Z, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, grupuje się coraz gęściej koło punktu P ; 2) począwszy od pewnego miejsca ogół punktów $Z, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, rozdziela się na dwa szeregi, z których jeden grupuje się nieograniczenie gęsto w otoczeniu punktu P , dla drugiego zaś musimy obmy-

¹⁾ Bliższe próby badania tego rodzaju funkcji podjął Ch. Babbage, w cytowanych powyżej rozprawach. W nowszych pracach cytuję go Laurent w swoim podręczniku „Traité d'Analyse“, t. VI, Gauthier-Villars, Paryż 1890, Rozdział VI, s. 146—254. Dzięki badaniom Netto (Vorlesungen über Algebra. Tom I. Leipzig, Taubner, 1898. Rozdział Iteration, str. 314—323), wiemy, że iteracyjnie peryodyczną, a zarazem algebraiczną, wymierną, może być funkcja jedynie tylko liniowa ułamkowa. Wymieniam jeszcze artykuł Hilla „Exemplum usus functionum iteratarum...“ Journal für die reine und angewandte Mathematik. Crelle, t. XI, 1833, str. 193—197

sieć drugi taki punkt P_1 , około którego grupowałoby się nieskończenie wiele elementów owego drugiego szeregu.

Tu znowu mogą się zdarzyć dwa przypadki: 1) poczynawszy od pewnego skończonego miejsca, cały ogół punktów $Z, Z_1, Z_2, Z_3 \dots$ grupuje się w dwa szeregi, z których pierwszy zawiera punkty, grupujące się nieskończenie gęsto koło punktu P , drugi zawiera punkty, grupujące się nieskończenie gęsto koło punktu P_1 ; 2) poczynawszy od pewnego miejsca szereg $Z, Z_1, Z_2, Z_3 \dots$ rozpada się na trzy szeregi, z których pierwszy grupuje się nieograniczenie gęsto koło punktu P , drugi nieograniczenie gęsto koło punktu P_1 , dla trzeciego trzeba obmyśleć nowy punkt P_2 i t. d.

Łatwo przewidzieć trzy możliwości:

1) Poczynawszy od pewnego miejsca cały szereg $Z, Z_1, Z_2, Z_3 \dots$ grupuje się nieskończenie gęsto koło punktu P . Taki szereg nazywamy regularnie zbieżnym, a punkt P — punktem iteracyjnym granicznym regularnej zbieżności o podstawie $f(z)$.

2) Poczynawszy od pewnego miejsca szereg $Z, Z_1, Z_2, Z_3 \dots$ rozdziela się na skończoną liczbę szeregów, z których każdy osobno grupuje się nieskończenie gęsto koło odpowiedniego punktu, należącego do grupy $P, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$. Taki szereg nazywamy rytmicznie zbieżnym o rytmie m , a punkty $P, P_1, \dots, P_{m-1}$ stanowią grupę iteracyjnie graniczną zbieżności rytmicznej o podstawie $f(z)$. Oczywiście każdy punkt, należący do m -wyrazowej grupy iteracyjnie granicznej o podstawie $f(z)$, jest punktem iteracyjnie granicznym o podstawie $f_m(z)$.

3) Poczynawszy od pewnego miejsca możemy z szeregu $Z, Z_1, Z_2, \dots$ wyłączać coraz to nowe szeregi częściowe, z których każdy zmierza do innego granicznego punktu, a liczba tych szeregów może, w miarę wyłączania, wzrastać do nieskończoności. Taki szereg nazywamy przestępnie zbieżnym, a punkty $P, P_1, P_2, \dots$ stanowią nieskończoną grupę iteracyjnie graniczną o przestępnej zbieżności przy podstawie $f(z)$.

§ 29. Twierdzenia zasadnicze.

Twierdzenie 1. Jeżeli pewnemu punktowi Z odpowiada regularnie zbieżny szereg iteracyjny, to punkt graniczny, jaki ten szereg wyznacza, jest stałym, od punktu Z niezależnym, a mianowicie jednym z pierwiastków równania $f(t) - t = 0$.

Twierdzenie 2. Jeżeli pewnemu punktowi Z odpowiada rytmicznie zbieżny szereg iteracyjny, to grupa punktów granicznych, jaką ten szereg wyznacza, jest stałą, od punktu Z niezależną grupą punktów, złożoną

z pierwiastków równania $f_m(t) - t = 0$, połączonych związkami $P_1 = f(P)$, $P_2 = f(P_1), \dots, P_m = f(P_{m-1}), P = f(P_m)^{-1}$.

§ 30. W razie przestępnej zbieżności mogą zachodzić dwa przypadki: 1) nieograniczona grupa graniczna zależy od położenia punktu Z , punkty ją składające są funkcjami punktu Z . Otóż ten przypadek obowiązuje wszystkie punkty kuli zmiennej zespolonej, wykluczając tem samem regularną i rytmiczną zbieżność; 2) nieograniczona grupa graniczna nie zależy od położenia punktu Z , punkty ją składające są punktami stałymi, od punktu Z niezależnymi. Przypadki te rozdziela:

Twierdzenie 5. Jeżeli punktowi Z odpowiada nieograniczona grupa punktów granicznych, to ona wtedy i tylko wtedy może zawierać punkty od Z zależne, jeżeli między niemi i punkt Z zawiera

Jakoż wybierzmy z szeregu $Z, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, te mianowicie punkty które zmierzają granicznie do punktu P . Niech to będą wyrazy $Z_r, Z_{r_1}, Z_{r_2}, \dots$ przyczem nie opuszczamy żadnych. Oczywiście różnice kolejnych składowych rosną do nieskończoności. Wzorowi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Z_{r_{n+1}} - Z_{r_n}) = 0, \text{ t. j. } \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_{r_{n+1}-r_n}(Z_{r_n}) - Z_{r_n}\} = 0 \dots (1)$$

może się stać zadość w dwojaki sposób: a) równanie (1) w granicy przechodzi na tożsamość, a więc tem samem $f_{r_{n+1}-r_n}(z) - z = 0$ dla $n = \infty$. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_{n+1} - r_n) = \infty$, więc tem samem wśród punktów nieskończo-

nej grupy granicznej znajduje się i punkt Z . Jest to warunek konieczny, gdyż w drugim przypadku: 2) w którym równanie (1) nie ma charakteru tożsamości nawet w granicy, punkt Z_{r_n} wzgl. P będzie pierwiastkiem pewnego równania, a więc tem samem punktem stałym.

¹⁾ Oba powyższe twierdzenia znane są od pierwszych prawie chwil powstania rachunku iteracyjnego. Twierdzenie 1 stanowi nawet impuls postawienia rachunku iteracyjnego, jako metody przybliżonego rachunku pierwiastków równań liczebnych, jako pomysłu Newtona, bliżej badany przez Fouriera i Cayleya, a w praktycznych swoich stronach rozwinięty przez Schrödera. Wszystkie prawie podręczniki, omawiające równania liczebne, znają go. Literatura: Newton, *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas*. Rozdział: Exempla per resolutionem Aequationum, s. 10—23. Opuscula, t. I. Fourier, *Question d'analyse algébrique. Oeuvres complètes*, tom II, str. 243—253. Cayley, *Application of the Newton-Fourier method to an imaginary root of an equation*. The Collected mathematical Papers. Tom XI, str. 114—122. E. Schröder, *Mathematische Annalen*, t. II, 1870, str. 317—365. C. Isenkrache, *Mathematische Annalen*, t. XXXI, str. 309—317; tudzież broszura tegoż autora „Das Verfahren der Funktionswiederholung, seine geometrische Veranschaulichung und algebraische Anwendung“, Lipsk, Teubner, 1897; wreszcie E. Netto l. c. Pomijam bliższe, jakkolwiek ciekawe szczegóły. — Twierdzenie 2 spotykamy w pracy G. Koenigs'a, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, serya II, t. VII, 1883, część pierwsza, s. 339—357.

§ 31. Zbierając powyższe badania, dochodzimy do następującego podziału: Wszystkie funkcje dzielimy na dwie kategorie:

1^o Do pierwszej kategorii zaliczamy funkcje, które dla każdego punktu Z wyznaczają bądź cykl zamknięty, skończony, bądź też wyznaczają szereg przestępnie zbieżny, którego nieskończona grupa iteracyjnie graniczna zawiera między innymi i punkt wyjścia Z . Są to funkcje iteracyjnie peryodyczne, o peryodzie w pierwszym przypadku wymiernym, a w drugim zaś niewymiernym.

2^o Do drugiej kategorii zaliczamy funkcje, które spowodują podział kul i zmiennej zespolonej na obszary różnych kategorii: do pierwszej kategorii należą obszary, dające zbieżność regularną; do drugiej kategorii — obszary, dające zbieżność rytmiczną, o rytmie 2, 3, 4, ... w ogóle skończonym; do trzeciej kategorii — obszary, dające zbieżność przestępną. Tak np. funkcja

$$f(z) = \frac{4z(1-z)(1-k^2z)}{(1-k^2z^2)^2}$$

na całej kuli zmiennej zespolonej ma obszar trzeciej kategorii.

VI. O punktach granicznych.

§ 32. Klasyfikacja punktów granicznych regularnej zbieżności. Punkt x wtedy i tylko wtedy może być punktem granicznym regularnej zbieżności, jeżeli $f(x) - x = 0$, a zarazem $0 \leq |f^{(1)}(x)| \leq 1$. Punkt zaś ∞ wtedy i tylko wtedy może być punktem granicznym regularnej zbieżności, jeżeli $f(\infty) = \infty$, i zarazem

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \infty.$$

W obec tego wprowadzamy następującą nomenklaturę:

Pierwiastki równania $f(x) - x = 0$, a zarazem punkt ∞ w razie $f(\infty) = \infty$ nazywamy punktami granicznymi regularnej zbieżności, z tem zastrzeżeniem, że pierwiastek x równania $f(x) - x = 0$, czyniący zadość nierówności $0 \leq |f^{(1)}(x)| < 1$, podobnie jak punkt ∞ w razie $f(\infty) = \infty$, czyniący zadość nierówności

$$1 < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \infty,$$

nazywać będziemy punktem granicznym zbieżności dodatniej.

Podobnie punkt x , czyniący zadość równaniu $f(x) - x = 0$, a zarazem nierówności $x \leq |f^{(1)}(x)| \leq \infty$, tudzież punkt ∞ w razie $f(\infty) = \infty$, czyniący zadość nierówności

$$1 > \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|x|} \geq 0,$$

nazywać będziemy punktem granicznym zbieżności ujemnej. a to dla tego że będzie on właściwym punktem granicznym dla jednej z gałęzi funkcji $f_{-1}(z)$.

Wreszcie punkt x , czyniący zadość równaniu $f(x) - x = 0$, a zarazem wzorowi $|f^{(1)}(x)| = 1$, tudzież punkt ∞ w razie $f(\infty) = \infty$, czyniący zadość wzorowi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|x|} = 1,$$

nazywać będziemy punktem granicznym zbieżności osobliwej.

§ 33. Klasyfikacja grup punktów granicznych o rytmicznej zbieżności. Grupa graniczna $P, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$ składa się z punktów, związanych wzorami $P_1 = f(P), P_2 = f(P_1), \dots, P_{m-1} = f(P_{m-2}), P = f(P_{m-1})$ z których każdy osobno jest punktem granicznym regularnej zbieżności o podstawie $f_m(z)$. Stąd powyższa klasyfikacja stosuje się tu całkowicie, jedynie drobna modyfikacja stanowić będzie pozornie nowy temat:

Grupa graniczna $P, P_1, \dots, P_{m-1}$ związana wzorami $P_{i+1} = f(P_i)$ $P_m = P$, czyniąca zadość równaniu $f_m(z) - z = 0$, w razie, gdy nie zawiera punktu ∞ , stanowi grupę graniczną o zbieżności dodatniej, ujemnej, lub osobliwej, stosownie do tego, czy iloczyn $|f^{(1)}(P)|, |f^{(1)}(P_1)|, |f^{(1)}(P_2)|, \dots, |f^{(1)}(P_{m-1})|$ jest mniejszy od jedności, większy od jedności, lub równy jedności.

Gdy zaś powyższa grupa graniczna zawiera punkt ∞ , czyniący zatem zadość prawu $f_m(\infty) = \infty$, wówczas stanowi ona grupę graniczną o zbieżności dodatniej, ujemnej lub osobliwej, stosownie do tego, czy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f_m(x)|}{|x|}$$

jest większe od jedności, mniejsze od jedności, lub równe jedności.

§ 34. Kilka uwag o grupie nieskończonej punktów granicznych. Grupa graniczna $P, P_1, P_2, \dots$ do nieskończoności, składa się z punktów, związanych wzorami $P_1 = f(P), P_2 = f(P_1), P_3 = f(P_2), \dots$, z których każdy jest jednym z pierwiastków równania $f_n(z) - z = 0$, w którym n rośnie do nieskończoności.

Jeżeli funkcja podstawowa jest algebraiczną, wymierną, całkowitą, to punkt ∞ jest punktem granicznym regularnej zbieżności, a więc nieograniczona grupa graniczna składa się z samych tylko skończonych punktów, tworzących pewne continuum, rozsianych nieskończenie gęsto na pewnej krzy-

wej, którą np. w przypadku $f(z) = z'$ jest koło o środku w punkcie 0 i o promieniu równym jedności: a w przypadkach $f(z) = 2z^2 - 1$, $f(z) = 3z - 4z^3$, ... jest odcinek osi liczb rzeczywistych, między punktami -1 i $+1$ zawarty.

Jak podobne krzywe budować, jakie są ich własności zasadnicze — na razie niewiadomo. To tylko pewna, że teoria ich stoi w związku z teorią równania $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) - z = 0$. Dyskusji takiego równania literatura iteracyjnej nie zna.

VII. Nieskończenie małe otoczenia punktów granicznych.

§ 35. Łamana iteracyjna punktu granicznego regularnej zbieżności a więc punktu, w którym $f(x) = x$, niezależnie od tego, czy punkt ten ma charakter zbieżności dodatniej, ujemnej, czy osobliwej, sprowadza się do jednego tylko punktu. Jeżeli jednak promieniem nieskończenie małym zatoczmy koło naokoło takiego punktu granicznego, to przekonamy się, że jeżeli punkt ów graniczny ma charakter zbieżności dodatniej, to wszystkie punkty całego owego nieskończenie małego otoczenia dają łamane iteracyjne, zbiegające się do punktu x . Jeżeli $f^{(1)}(x)$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią, to łamana iteracyjna przyjmuje charakter prostoliniowego szeregu punktów, zmierzających z jednej strony do punktu x .

Jeżeli $f^{(1)}(x)$ jest liczbą rzeczywistą ujemną, to łamana iteracyjna przyjmuje charakter prostoliniowego szeregu punktów, zmierzających z obu stron do punktu x . Jeżeli $f^{(1)}(x)$ jest liczbą zespoloną $f^{(1)}(x) = re^{i\varphi}$, to łamana iteracyjna wypadnie wpisaną w spiralną logarytmową, której równanie w odniesieniu do układu biegunowego (R, φ) o biegunie w punkcie x i o osi równoległej do osi liczb rzeczywistych wyrazi się wzorem $R = R_0 r^{\frac{\alpha - \varphi}{\theta}}$. Jeżeli punkt graniczny ów ma charakter zbieżności ujemnej, to ani jeden punkt owego całego nieskończenie małego otoczenia nie daje łamanej iteracyjnej, zbiegającej się do punktu x . Łamana iteracyjna dowolnego punktu takiego otoczenia może dążyć, ale do innego punktu granicznego. Stosownie do jakości samej zbieżności i do wyboru punktu granicznego lub grupy granicznej, otoczenie takiego punktu granicznego o ujemnej zbieżności dzieli się na nieskończenie małe obszary, z których każdy wyznacza inaczej zbieżne łamane iteracyjne. Zachodzi kwestya, jak owe obszary się grupują.

§ 36. Jeżeli punkt x jest punktem granicznym osobliwszej zbieżności, t. j. dającym obok $f(x) - x = 0$ zarazem $|f^{(1)}(x)| = 1$, wówczas nieskończenie małe otoczenie punktu x dzieli się w pewien właściwy sposób dobranymi promieniami na parzystą liczbę wycinków, które kolejno przedstawiają to pełne obszary zbiegających się do punktu x łamanych iteracyjnych, to

obszary nie zbiegających się do punktu x łamanych iteracyjnych. Jednym słowem punkt x zachowuje się względem jednych obszarów jako punkt graniczny o zbieżności dodatniej, względem pozostałych jako punkt graniczny o zbieżności ujemnej.

Dokładna teoria tego przypadku nie jest dziś jeszcze zupełnie ściśle poznana, a niedawno dopiero stała się przedmiotem badań naukowych¹⁾.

Pozwolinymy sobie streścić odnośne badania Lemeray'a i Léau'a.

§ 37. Jeżeli w najbliższym otoczeniu punktu x zachodzi rozwinięcie

$$f(z) = x = (z - x) + \frac{(z - x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) + \dots$$

przyczem dla krótkości oznaczmy $f^{(p+1)}(x) = re^{i\alpha}$, wówczas promienie, wyrażone równaniem $\cos(p\theta + \alpha) = 0$, odniesionem do układu biegunowego z punktem x jako biegunem i prostą $\alpha\xi$ równoległą do osi liczb rzeczywistych jako oś, dzielą nieskończenie małe otoczenie punktu x na $2p$ wycinków, które przedstawiając kolejno $\cos(p\theta + \alpha) < 0$ i $\cos(p\theta + \alpha) > 0$ dają nam obszary, względem których punkt x zachowuje się odpowiednio jak punkt graniczny zbieżności ujemnej; względem zaś rozgraniczających promieni zachowuje się obojętnie. To znaczy, że wszystkie punkty, zawarte wewnątrz obszarów, dających $\cos(p\theta + \alpha) < 0$, dają łamane iteracyjne zbieżne do punktu x . Wewnątrz pozostałych obszarów zbiega się do punktu x iteracja $f_{-1}^*(x)$, gdzie $f_{-1}^*(x)$ oznacza tę gałąź funkcji $f^{-1}(x)$, którą daje $f_{-1}^*(x) - x = 0$. Same zaś owe obszary, na wzór opisanego w § 35 obszaru otaczającego punkt graniczny o zbieżności ujemnej, dzielą się na obszary, oczywiście nieskończenie małe, z których każdy z osobna wyznacza inny typ zbieżnych łamanych iteracyjnych. L. Léau¹⁾ przypuszcza, że wśród tych podobszarów znajdują się i takie, które dają łamaną iterację zbieżną do punktu x . Takie obszary, które dają $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = x$ nazy-

¹⁾ W literaturze niemieckiej mamy prace: E. Netto „Vorlesungen über Algebra“ t. I, s. 314—323; i J. Isenkrage „Das Verfahren der Funktionenwiederholung...“ str. 24—39. Obaj autorowie ograniczają się do wypadku rzeczywistej funkcji zmiennej rzeczywistej. Ogólniejże stanowisko zajął Lemeray, który w swoich artykułach: „Sur la convergence des substitutions uniformes“, Bulletin de la Société mathématiques de France, t. XXIII, 1895, str. 255—263; Nouvelles Annales de Mathématique, serya III, t. XVI, 1897, str. 306—319, t. XVII, 1898, str. 75—80; i Leopold Léau „Etude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables“, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. XI, 1897, E, str. 30 i nast. Obaj autorowie badają wypadki: $f^{(1)}(x) = +1$ $f^{(1)}(x) = -1$ i $\arg f^{(1)}(x)$ jest liczbą względem π wymierną. Ogólny przypadek, w którym $|f^{(1)}(x)| = 1$ i $\arg f^{(1)}(x)$ jest liczbą względem π niewymierną jest w literaturze iteracyjnej nieznanym.

wamy obszarami naturalnymi. Otóż promienie, rozgraniczające owe wycinki, należą do owych neutralnych obszarów.

§ 38 Jeżeli w najbliższym otoczeniu punktu x zachodzi rozwinięcie

$$f(z) - x = a(z - x) + \frac{(z - x)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{(z - x)^3}{3!} f^{(3)}(x) \dots,$$

to rozbijamy łamaną iteracyjną na m szeregów, przyczem m jest najmniejszą całkowitą liczbą, dającą $a^m = 1$.

Będą to łamane iteracyjne $z, Z_m, Z_{2m}, Z_{3m}, \dots; z_1, z_{m-1}, z_{2m-1}, z_{3m-1}, \dots; z_2, z_{m+2}, z_{2m+2}, z_{3m+2}, \dots; \dots; z_{m-1}, z_{2m-1}, z_{3m-1}, z_{4m-1}, \dots$

L e m a r a y udowodnił, że w tym razie zachodzić będzie rozwinięcie;

$$f_m(z) - x = (z - x) + \frac{(z - x)^{pm+1}}{(pm+1)!} f_m^{(pm+1)}(x) + \dots \quad 1).$$

Promieniami, dającymi $\cos[p_m\theta + \alpha] = 0$, dzielimy nieskończenie małe otoczenie punktu x na $2pm$ wycinków, które grają tą samą rolę dla funkcji $f_m(z)$, co i powyżej przedstawiony podział dla funkcji $f(z)$.

Łamaną iteracyjną punktu Z możemy podzielić na m łamanych, które w granicy dadzą prostoliniowe szeregi punktów, z których każdy osobno z jednej tylko strony zmierza do punktu x . Wypadają one każdy w innym wycinku. Jeżeli oznaczmy przez wycinki $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_{2pm-1}, S_{2p}$ i przyjmiemy, że wycinki parzyste dają zbieżność ujemną, nieparzyste dodatnią, i że punkt Z zawiera się w odcinku S_1 , to punkty $Z_m, Z_{2m}, Z_{3m}, \dots$ przypadną wewnątrz S_1 , punkty $Z_1, Z_{m+1}, Z_{2m+1}, \dots$ wewnątrz S_{m+1} , punkty, $Z_2, Z_{m+2}, Z_{2m+2}, \dots$ wewnątrz S_{2p+1} , punkty $Z_3, Z_{m+3}, Z_{2m+3}, \dots$ wewnątrz S_{3p+1} i t. d.

§ 39. Jeżeli przypadek ogólny, w którym zachodzi $|f^{(1)}(x)| = 1$ i $\arg f^{(1)}(x)$ jest liczbą względem π niewymierną, nie został należycie zbadały, to jedynie dlatego, że nie uwzględniono kwestyi dokładnego podziału otoczenia punktu x .

Widzieliśmy podział otoczenia punktu x na dwie kategorie wycinków, z których jedne całkowicie były wypełnione punktami, dającymi łamane iteracyjne zbiegające się do punktu x , drugie zaś zawierały między innymi także i takie obszary, które wyznaczały łamane iteracyjne do punktu x zbieżne. A więc podział na obszary, dające łamane iteracyjne zbieżne do punktu x jest daleko bardziej skomplikowanym w tym przypadku, aniżeli podany przez

¹⁾ L é m e r a y. „Nouvelles Annales de Mathématiques“, serya III, t. XVII, 1898, str. 75-80.

L e m e r a y'a i L é a n'a podział promieniami. Jaki ów podział jest — na razie niewiadomo.

§ 40. Streszczenie. Nieskończenie małe otoczenie punktu granicznego dodatniej zbieżności przedstawia obszar pełny, wyznaczający zbieżność $f_{+n}(z)$ do x i wykluczający zbieżność $f_{-n}(z)$ do tegoż x .

Nieskończenie małe otoczenie punktu granicznego o zbieżności ujemnej przedstawia obszar pełny, wyznaczający zbieżność $f_{-1}(z)$ do x i wykluczający zbieżność $f_{+n}(z)$ do tegoż x .

Nieskończenie małe otoczenie punktu granicznego osobliwej zbieżności przedstawia nam trzy kategorie obszarów, z których pierwszy wyznacza $\lim_{n=\infty} f_n(z) = x$, a wyklucza $\lim_{n=\infty} f_{-n}(z) = x$. drugi naodwrot wyznacza $\lim_{n=\infty} f_{-n}(z) = x$, a wyklucza $\lim_{n=\infty} f_{+n}(z) = x$, trzeci zaś i jedną i drugą zbieżność wyznacza. Linie demarkacyjne są nieznane.

§ 41. Punkt ∞ , jako graniczny, ulega analogicznemu rozważaniu z tą tylko różnicą, że jeżeli nieskończenie małe otoczenie skończonego punktu x stanowi część powierzchni kulistej zmiennej zespolonej, zawartą wewnątrz koła o bardzo małym promieniu i środku w punkcie x , to nieskończenie małe otoczenie punktu ∞ stanowi część płaszczyzny zmiennej zespolonej, zawarte wewnątrz koła o bardzo wielkim promieniu i środku w początku układu współrzędnych.

§ 42. Grupa punktów granicznych składa się z punktów granicznych o regularnej zbieżności, tylko o odmiennej podstawie.

Grupa m punktów granicznych składa się z punktów granicznych o regularnej zbieżności, tylko o podstawie $f_m(z)$.

W tym razie, skoro tylko jeden z nich jest punktem granicznym zbieżności dodatniej, ujemnej lub osobliwej, to wszystkie pozostałe punkty grupy posiadają dokładnie tę samą własność.

§ 43. Klasyfikacja funkcji algebraicznych wymiernych. W części trzeciej naszej pracy będzie bardzo ważną pewną klasyfikacja funkcji podstawowych, oparta na punktach iteracyjnie granicznych.

Do pierwszej klasy należą funkcje, dające $f(\infty) = \infty$.

Są to: 1^o wszystkie funkcje algebraiczne wymierne, całkowite, tudzież 2^o algebraiczne wymierne, ułamkowe, których licznik jest stopnia przynajmniej o jedność wyższego od mianownika.

Do drugiej klasy należą funkcje, dające $f(\infty) =$ liczbie skończonej, ale zarazem dające bądź $f_2(\infty) = \infty$, bądź $f_3(\infty) = \infty$ i t. d., bądź w ogóle przy skończonym $m \dots f_m(\infty) = \infty$. Tutaj punkt ∞ staje się jednym z elementów którejkolwiek grupy granicznej stopnia skończonego, lub nieskończenie wielkiego.

Do trzeciej kategorii należą funkcje, dla których punkt ∞ daje łamaną iteracyjną również regularnie, rytmicznie, lub przestępnie zbieżną, jak i każdy punkt skończony.

VIII. O obszarach zbieżności.

§ 44. Problem Cayley'a. Każdemu punktowi granicznemu dodatniej lub osobliwej zbieżności, każdej grupie granicznej, skończonej lub nieskończonej dodatniej wzgl. osobliwej zbieżności odpowiada pewien ogół punktów, których łamane iteracyjne mają w tym punkcie, lub w tej grupie punktów, wspólny element graniczny wzgl. wspólną grupę elementów granicznych. Chodzi tylko, żeby z całą ścisłością wykazać istnienie całego obszaru, oznaczyć charakter konturu tegoż obszaru i zbadać zasadnicze tegoż własności. Zagadnienie to, postawione przez Cayley'a (Quarterly Journal of Math., t. XVI, str. 179—185), do dziś dnia nie zostało rozwiązane w całej swej ogólności, i z wyjątkiem paru przykładów, w których za pomocą znanych nam funkcji pomocniczych iteracja sprowadza się do iterowania funkcji liniowych, nie znamy ani jednego przypadku, w którymby podobne rozwiązanie było podane.

§ 45. Zajmiemy się naprzód kwestią istnienia obszaru zbieżności do punktu granicznego x dołączonego.

Każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada właściwa zbieżna łamana iteracyjna. Mogą być tu dwa przypadki albo z wyjątkiem odosobnionych punktów, na całej płaszczyźnie występuje zbieżność do jednego i tego samego punktu granicznego. W tym razie cała powierzchnia kuli zmiennej zespolonej przedstawia obszar zbieżności do punktu x dołączony, a jedynie punkty odosobnione stanowią niejako wyjątki.

Albo też istnieje przynajmniej jeden jeszcze punkt graniczny, który powinien spowodować rozpadnięcie się kuli zmiennej zespolonej co najmniej na dwa obszary. Powiadam, że kontury tych obszarów rzeczywiście istnieją. W tym celu przez punkty x_1 i x_2 , oba graniczne (żaden z nich nie ma charakteru ujemnego), przesunemy nieskończenie wiele kół małych. Pozwólmy punktowi z biec od punktu x_1 do punktu x_2 wzdłuż jednego z takich łuków, poczynawszy od punktu x_1 . Z początku punkt z będzie biegł wewnątrz obszaru punktu x_1 , ale on do końca drogi, t. j. do punktu x_2 , nie może biec wewnątrz obszaru punktu x_1 , bo punkt x_2 nie tylko że sam jest punktem granicznym, ale zarazem posiada swój własny obszar zbieżności. A więc na każdym łuku, łączącym punkty x_1 i x_2 , znajduje się ostatni punkt, należący jeszcze do obszaru punktu x_1 , tudzież pierwszy punkt, należący już do obszaru punktu x_2 . Ponieważ oba te punkty są ściśle oznaczone i oba leżą na każdym łuku punkty x_1 i x_2 łączącym, więc geometryczne miejsca ich są krzywami oznaczonymi, zamkniętymi, wyznaczającymi podział powierzchni kuli zmiennej zespolonej na obszary zbieżności, z których każdy ma swój własny typ zbieżności, o wspólnym punkcie granicznym wzgl. grupie punktów granicznych.

§ 46. Równocześnie z kwestią stosowności iteracji do rachunku pierwiastków równań liczebnych powstała także kwestya podziału płaszczyzny zmiennej zespolonej na obszary, z których każdy obejmuje inny pierwiastek danego równania. Pomijając całkiem błędne postawienie kwestyi, jakoby cała powierzchnia sfery zmiennej zespolonej dzieliła się na tyle tylko obszarów, ile jest pierwiastków wyrachowalnych, i również błędne rozwiązanie jej, podane przez E. Schrödera a zacytowane przez K. Żorawskiego ¹⁾, musimy zwrócić uwagę na obciążenie jej pewnym warunkiem, który jedynie tylko praktyczne względy usprawiedliwić mogą. Mianowicie Cayley usiłuje wykryć te jedynie obszary, w których nie tylko $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - x) = 0$, ale zarazem $|z - x| > |z_1 - x| > |z_2 - x| > \dots$

Względ ten obowiązuje z punktu widzenia praktycznego jedynie dla tego, że pożądaną jest rzeczą, żeby iteracja zaraz była zbieżną; jego zastosowanie zaś ogranicza się jedynie do badania nieskończenie małego otoczenia punktu granicznego, w celu rozpoznania charakteru jego graniczności ²⁾. Obszar zatem zbieżności iteracyjnej, dołączony do punktu granicznego x , w pojmowaniu Cayley'a, oznacza właściwie pierwsze przybliżenie pełnego obszaru zbieżności do punktu x dołączonego.

Drugie przybliżenie stanowić będzie ogół punktów, których pierwsze iteracje wkracają w obręb obszaru pierwszego przybliżenia.

Trzecie przybliżenie stanowić będzie ogół punktów, których pierwsze iteracje wkracają w obręb obszaru drugiego przybliżenia.

Tak dalej rozumując, otrzymamy w granicy obszar szukany.

§ 47. Jeżeli mamy do czynienia z punktem granicznym zbieżności regularnej, a zarazem dodatniej, wówczas możemy pierwsze przybliżenie oznaczyć w sposób, podany przez G. Koenigsa ³⁾. Naokoło punktu granicznego x zataczamy koło bardzo małego promienia. Jeżeli promień tego koła wzrasta, poczynawszy od zera, to max. $\frac{|f(z) - x|}{|z - x|}$ w jego obszarze rośnie od $|f^{(1)}(x)|$ poczynawszy, a w miarę tego coraz to maleje pewność, że punkt $f(z)$ znajdzie się wewnątrz koła, gdyż z wypada tamże lub na obwodzie. Skoro promień koła wzrośnie tak dalece, że max. $\frac{|f(z) - x|}{|z - x|}$ stanie się równe jedności, a wypadnie oczywiście na obwodzie koła, to otrzymamy „pierwsze przybliżenie” obszaru zbieżności do punktu x dołączonego.

¹⁾ K. Żorawski. „O zbieżności iteracji.” Kraków, nakładem Akad. Umiejętności, 1893, str. 3.

²⁾ A i to z pewnem zastrzeżeniem.

³⁾ G. Koenigs. Bulletin de sciences mathématiques et astronomiques; serya II, 1893, str. 346—357, a zwi. str. 344.

§ 48. Chcąc oznaczyć „przybliżenie drugie“, rozwiązujemy równanie $f(z) - x = 0$. Otrzymane punkty nazwiemy punktami izolowanymi Żorawskiego pierwszej kategorii. Ogół punktów wchodzących w skład „drugiego przybliżenia“ obszaru zbieżności do punktu x dołączonego, t. j. ogół punktów, których pierwsze iteracje wchodzą w obszar „pierwszego przybliżenia“, obejmuje całkowicie obszar powyżej opisanego koła, a zarazem wszystkie punkty Żorawskiego pierwszej kategorii do punktu x dołączone. Oznaczmy je $x_1, x_2, x_3, \dots$.

Chcąc oznaczyć „trzecie przybliżenie“, rozwiązujemy równania $f(z) - x_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots$. Otrzymane punkty nazwiemy punktami izolowanymi Żorawskiego drugiej kategorii. Ogół punktów wchodzących w skład „trzeciego przybliżenia“ obszaru zbieżności do x dołączonego, t. j. ogół punktów, których pierwsze iteracje wchodzą w obszar „drugiego przybliżenia“, obejmuje całkowicie obszar „drugiego przybliżenia“, a zarazem wszystkie punkty Żorawskiego drugiej kategorii do punktu x dołączone. Oznaczmy je $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, i = 1, 2, 3, \dots$.

Postępując tak dalej, otrzymamy w granicy szukany obszar zbieżności.

§ 49. Zajmiemy się z badaniem zasadniczych własności obszaru zbieżności do punktu granicznego x dołączonego.

Twierdzenie 1. Wewnątrz obszaru zbieżności dowolnej kategorii nie może zawierać się ani jeden punkt, czyniący zadość równaniu

$$f_{m+n}(z) - f_n(z) = 0,$$

nie schodzący się z punktem x , lub z którymkolwiek jego punktem Żorawskiego.

Jakoż, fakt przynależności punktu z do obszaru zbieżności punktu x dowodzi, że już dla skończonego k będzie

$$\frac{|f_{k+m+n}(z) - x|}{|f_{k+n}(z) - x|} < 1,$$

gdy tymczasem wzór $f_{m+n}(z) - f_n(z) = 0$, w obec powyższego zastrzeżenia, daje nam

$$\frac{|f_{k+m+n}(z) - x|}{|f_{k+n}(z) - x|} = 1,$$

co dowodzi, że taki punkt z do obszaru zbieżności punktu x należeć nie może.

Twierdzenie 2. Obszar zbieżności punktu x ma kontur, który względem przekształcenia $z \dots f(z)$ zachowuje się w sposób niezmienny.

Jakoż, jeżeli punkt z znajduje się na obwodzie obszaru zbieżności do punktu x dołączonego, to punkt $f(z)$ znajduje się albo na jego obwodzie, albo wewnątrz niego, albo zewnątrz. W drugim przypadku iteracje jego powolniej lub prędzej zbiegłyby się do punktu x i już od skończonego miejsca poczynawszy, znalazłyby się w obszarze „pierwszego przybliżenia“ punktu x , a więc punkt z nie mógłby leżeć na obwodzie obszaru zbieżności, tylko również wewnątrz niego, co jest niemożliwym. W trzecim przypadku iteracje jego powolniej lub prędzej zbiegałyby do jakiegoś innego punktu granicznego y i już, od skończonego miejsca poczynawszy, znalazłyby się w obszarze „pierwszego przybliżenia“ punktu y ; a więc punkt z nie mógłby leżeć na obwodzie obszaru zbieżności punktu x , tylko zewnątrz niego, co jest niemożliwe. Pozostaje zatem pierwszy przypadek: punkt $f(z)$ znajduje się wraz z punktem z na obwodzie obszaru $c.b.d.o.$

Twierdzenie 3. Obszar zbieżności punktu x stanowi figurę pojedynczą zamkniętą, w obrębie której zawsze od dowolnego punktu z do punktu $f(z)$ można przejść, nie przecinając obwodu obszaru.

Skoro tak rzeczy się mają, że każda droga, łącząca punkta z i $f(z)$, musi przeciąć obwód w jakim punkcie M i niema drogi, któraby nigdzie nie przecinała, to odpowiednia droga, łącząca punkty $f(z)$ i $f_2(z)$, $f_2(z)$ i $f_3(z)$, ..., $f_k(z)$ i $f_{k+1}(z)$, musiałaby przeciąć obwód odpowiednio w punkcie $f(M)$, $f_2(M)$, $f_3(M)$, ..., $f_k(M)$ i nie byłoby ani jednej drogi, któraby łączyła punkty $f_n(z)$ i $f_{n+1}(z)$, nie przecinając obwodu. Co jest niedorzecznym, albowiem każdemu punktowi z , wziętemu wewnątrz obszaru zbieżności punktu x , odpowiada skończona wartość k , dla której punkty $f_k(z)$ i $f_{k+1}(z)$ znajdują się w obrębie „pierwszego przybliżenia“ obszaru zbieżności, który, jak wiemy, jest kołem i daje możność najrozmaitszego połączenia punktów $f_k(z)$ i $f_{k+1}(z)$ nie przecinającego obwodu koła, a więc tembardziej obwodu obszaru. Dowodzi to prawdziwości naszego twierdzenia.

Twierdzenie 4. Obwód obszaru zbieżności punktu x stanowi ogół pierwiastków równania

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{n+2}(z) - f_n(z)) = 0,$$

dających $f_n(z) = x$, czyli ogół punktów Żorawskiego do punktu x należących, w miarę nieograniczonego wzrastania kategorii, bądź układa się wzdłuż obwodu obszaru zbieżności; bądź dąży doń asymptotycznie.

§ 50. Jeżeli punkt x ma charakter osobliwej zbieżności, wówczas „pierwsze przybliżenie” obszaru zbieżności przedstawia się daleko bardziej skomplikowanym. W przypadku

$$f(z) - x = (z - x) + \frac{(z - x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) + \dots; f^{(p+1)}(x) = re^{i\theta}$$

miejsce koła $[R = \text{const.}]$ w odniesieniu do układu współrzędnych biegunowych z punktem x , jako biegunem i prostą równoległą do osi liczb rzetelnych jako osią] o promieniu odpowiedniej wartości, zajmuje różną $R^p = a^p \cos(p\varphi + \theta)$, przyczem a ma odpowiednią wartość. Róża ta swoimi listkami, dającymi $\cos(p\varphi + \theta) < 0$, przy odpowiednio niezbyt wielkim a , obejmuje tylko takie punkty, których iteracje zbiegają do punktu x , jako do granicy.

W przypadku

$$f(z) - x = a(z) + \frac{(z - x)^2}{2!} f^{(2)}(x) + \dots$$

wzgl.

$$f_m(z) - x = (z - x) + \frac{(z - x)^{pm+1}}{(pm+1)!} f_m^{(pm+1)}(x) + \dots$$

wobec $f_m^{(pm+1)}(x) = re^{i\theta}$ występuje grająca podobną rolę róża

$$R^{pm} = a^{pm} \cos(pm\varphi + \theta).$$

Konstrukcja zaś dokładnego obszaru zbieżności, t. j. takiego, który prócz jednostronnej zbieżności do granicy x daje obustronną zbieżność zarówno $f_{+n}(z)$ jak i $f_{-n}(z)$ do x , teoretycznie nie jest jeszcze poznana. Praktycznie można ją uskutecznić w następujący sposób: wykreśliśmy koło o środku w punkcie x i niewielkim promieniu, przekształcając je za pomocą podstawienia $z \dots f(z)$ raz po raz, zauważymy różyczkowate wypaczanie się tego obwodu po każdym podstawieniu (jeżeli na obwodzie koła, ani wewnątrz niego nie ma ani jednego z punktów Żorawskiego). Taż sama czysto mechaniczna konstrukcja pozwala nam wyznaczyć „pierwsze przybliżenie” obszaru zbieżności punktu x w razie $|f^{(1)}(x)| = 1$ i $\arg f^{(1)}(x) : \pi$ jest liczbą niewymierną¹⁾.

§ 51. W przypadku grupy granicznej o m punktach, obszar zbieżności „pierwsze przybliżenie” rozpadnie się na m nieprzecinających się kół, a następne przybliżenia będą tworzyły obszary zamknięte również obwodami, nie przecinające się i obszarami swymi nie nakrywające żadnych wspólnych płatów. W granicy, jak łatwo przekonać się, cały obszar zbieżności, dołą-

czony do grupy m punktów granicznych, składa się z m zamkniętych owali, tak ustawionych, że od punktu z do $f(z)$ przejść nie można żadną drogą obwodu nie przecinającą; jedynie wtedy można od z do $f_k(z)$ przejść, nie przecinając obwodu któregośkolwiek z obszarów, jeżeli k jest podzielne przez m . Na dowód tego rozumowania mamy następujące fakty: przypuścimy, że łańcuch $z, f_m(z), f_{2m}(z) \dots$ zbiega do punktu P ; wówczas wypada on całkowicie wewnątrz obszaru zbieżności dołączonego do punktu P przy podstawie $f_m(z)$. Budując przy tejże podstawie $f_m(z)$ obszar zbieżności do punktu $f(P)$ dołączony, przekonamy się, że łańcuch $f(z), f_{m+1}(z), f_{2m+1}(z) \dots$ zbiega do punktu $f(P)$, całkowicie pozostając w obrębie obszaru zbieżności $P_1 = f(P)$. Ponieważ obszary zbieżności, dołączone do dwóch różnych pierwiastków równania $\varphi(z) - z = 0$ nie mając wspólnych obszarów i, nigdzie się nie nakrywają, ani obwodami przecinają, przeto droga, łącząca punkt z , zawarty w obrębie obszaru punktu P , z punktem $f(z)$, zawartym w obrębie obszaru punktu P_1 , musi przeciąć raz obwód obszaru P , a potem drugi raz obwód obszaru P_1 .

Uwaga. Zdaje się, że punkt x , dający $f(x) = x$, $f^{(1)}(x) = e^{\pi} \sqrt{-1}$ wobec μ niewymiernego względem π , nie może być punktem granicznym ani dodatniej, ani ujemnej, ani nawet osobliwej zbieżności. Kwestya jest nadzwyczaj ciemna, albowiem rozwinięcie $z_1 - x = a(z - x) + a(z - x)^2 + b(z - x)^3 + \dots$ daje w granicy $n = \infty$, $z_n - x = \sigma(z - x) + \sigma_1(z - x)^2 + \sigma_2(z - x)^3 + \dots$ o nieoznaczonych współczynnikach, wskutek czego wymyka się badaniom. Natomiast okazuje się, że liczba w s z y s t k i c h obszarów dodatniej i osobliwej zbieżności, tak regularnej jak i rytmicznej, nie może przewyższać liczby zer i biegunów w pierwszej pochodnej funkcji iterowanej. Przynajmniej w tym przypadku, gdy ta ostatnia jest algebraiczną wymierną. Liczba tedy pojedynczych obszarów zależności jest tedy stanowczo skończoną.

¹⁾ Patrz uwagę na str. 101.