O ROZDZIALE PRĘDKOŚCI

W UKŁADZIE DYNAMICZNYM,

OŻYWIONYM RUCHEM UMIEJSCOWIONYM.

PODAŁ

WŁ. GOSIEWSKI.

J. C. Maxwell pierwszy ustanowił odnośne prawo rozdziału prędkości. Ale, niestety, jego prawo nie jest ani ścisłe, ani ogólne: nieścisłe dla tego, że nie uwzględnił zgoła rozdziału mas, a nieogólne dlatego, że rozważał tylko układy, w których swoboda ruchu nie zależy od kierunku.

W pracy niniejszej zamierzamy rozwiązać zadanie Maxwella ściśle i ogólnie.

§ 1.

Rozważać będziemy układ nieskończonej liczby punktów materyalnych, ożywiony ruchem umiejscowionym.

O ruchu umiejscowionym mówi się wprawdzie dość często; wszelako z określeniem jego istoty nigdzieśmy się dotąd nie spotkali. Spróbujmy więc przedewszystkiem to określenie zrobić.

Ruch umiejscowiony przypisujemy układowi dynamicznemu jedynie wówczas, gdy układ ten uważamy za model ciała fizycznego w stanie równowagi; a skoro układ ma być modelem ciała w stanie równowagi, to środek ciężkości każdej jego części, tak małej jak się podoba, powinien być najprawdopodobniej nieruchomym. Oto i wszystko, co o układzie, ożywionym ruchem umiejscowionym, powiedzieć wogóle można.

Ażeby wyrobić sobie jaśniejsze o pomienionym układzie pojęcie, odnieśmy ten układ do osi prostokątnych stałego położenia i, rozdzieliwszy go płaszczyznami równoległemi do płaszczyzn spółrzędnych na elementy nieskończenie małe, zaliczajmy elementy o środkach ciężkości, mających prędkość spólną do jednej kategoryi, których przeto będzie w układzie tyle, ile jest różnych prędkości. Owóż zgodnie z określeniem istoty ruchu umiejscowionego, środek ciężkości elementu wogóle jest najprawdopodobniej nieruchomym: z pomiędzy wszystkich, zatem, najliczniejszą jest kategorya elementów o środkach ciężkości unieruchomionych: są one, jak zresztą i elementy każdej kategoryi, rozmieszczone w układzie jednorodnie i, jako nieruchome, tworzą jakby jego szkielet, podczas gdy elementy ruchome, ów szkielet zewsząd otaczające, tworzą jakby miąższ układu.

§ 2.

Oznaczmy teraz przez $\varphi(m_i, x_i\, y_i\, z_i)$ prawdopodobieństwo punktu o masie m_i i prędkości $(x_i\, y_i\, z_i)$ i niech punkty $i=1, 2, 3, \ldots$ tworzą nieskończenie mały element. Prawdopodobieństwo stanu tego elementu będzie iloczynem

$$P = \prod_i \varphi(m_i, x_i\, y_i\, z_i) \tag{1}$$

którego logarytm naturalny wyrazimy sumą

$$\log P = \sum_i \log \varphi(m_i, x_i\, y_i\, z_i). \tag{2}$$

Zmieńmy prędkość środka ciężkości tego elementu o wektor $(\delta x\ \delta y\ \delta z)$; znajdziemy

$$\delta \log P = \delta x \sum_i \frac{\partial \log \varphi}{\partial x_i} + \delta y \sum_i \frac{\partial \log \varphi}{\partial y_i} + \delta z \sum_i \frac{\partial \log \varphi}{\partial z_i}. \tag{3}$$

Otóż widzimy, że środek ciężkości naszego elementu stać się może nieruchomym jedynie pod warunkami

$$\sum_i m_i x_i = 0, \quad \sum_i m_i y_i = 0, \quad \sum_i m_i z_i = 0; \tag{4}$$

pod temi zatem warunkami $\log P$ osiąga z założenia maximum, co wymaga znowu, aby było spółcześnie $\delta \log P = 0$ przy wszelkich wartościach δx, δy, δz. Stąd, według (3), układ równań

$$(5)\qquad \sum_i \frac{\partial \log \varphi}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \log \varphi}{\partial y_i} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \log \varphi}{dz_i} = 0,$$

jest tożsamy z układem poprzedzającym (4), a następstwem tego są tożsamości:

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial \log\varphi}{\partial x_i} &= a_{11}\sum_i m_i x_i + a_{12}\sum_i m_i y_i + a_{13}\sum_i m_i z_i, \\ -\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial \log\varphi}{\partial y_i} &= a_{21}\sum_i m_i x_i + a_{22}\sum_i m_i y_i + a_{23}\sum_i m_i z_i, \\ -\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial \log\varphi}{\partial z_i} &= a_{31}\sum_i m_i x_i + a_{32}\sum_i m_i y_i + a_{33}\sum_i m_i z_i, \end{aligned} \right.$$

byleby spółczynniki a zadość czyniły warunkowi

$$(7)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zróżniczkujmy powyższe tożsamości względem którego bądź punktu, np. $(m_i, x_i\, y_i\, z_i)$; otrzymamy trzy nowe tożsamości, a z nich pierwsza np. jest taka:

$$-\frac{1}{2} d_i \frac{\partial \log \varphi}{\partial x_i} = dm_i \,.\, (a_{11} x_i + a_{12} y_i + a_{13} z_i) + m_i (a_{11} dx_i + a_{12} dy_i + a_{13} dz_i)$$
$$+ d_i a_{11} \sum_i m_i x_i + d_i a_{12} \,.\, \sum_i m_i y_i + d_i a_{13} \,.\, \sum_i m_i z_i.$$

Ponieważ strony ich lewe zależą tylko od samego punktu $(m_i, x_i y_i z_i)$, przeto te strony są zgoła niezależnemi od istnienia lub nieistnienia warunków (4). To samo stosuje się zatem i do stron prawych naszych tożsamości, skąd wniosek, że spółczynniki a są stałemi. Dla tej przyczyny i zważywszy na równania (6), mamy po opuszczeniu skaźnika i:

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial \log\varphi}{\partial x} &= m\,(a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \log\varphi}{\partial y} &= m\,(a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \log\varphi}{\partial z} &= m\,(a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z) \end{aligned} \right.$$

gdzie nadto

$$(9)\qquad a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Stąd wypływa równanie

$$(10)\qquad \frac{\partial \log \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \log \varphi}{\partial z} dz = -\, m dH,$$

w którem

$$(11)\qquad H = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{23} y z + 2a_{31} z x + 2a_{12} x y,$$

i które po zcałkowaniu daje

$$(12)\qquad \varphi = c\,\tilde{\omega}(m)\, e^{-mH},$$

rozumiejąc przez c stałą, a przez $\tilde{\omega}(m)$ funkcyę masy m.

Warunek, że φ ma wyobrażać prawdopodobieństwo, wymaga, aby było stale

$$(13)\qquad H \geqslant 0;$$

H jest przeto formą kwadratową dodatnią.

Stałą c wyznacza się, jak wiadomo, z równania

$$(14)\qquad \frac{c}{dm\,dx\,dy\,dz} \int_0^\infty \tilde{\omega}(m)\, dm \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-mH} dx\, dy\, dz = \frac{c\sqrt{\pi^3} \int_0^\infty \frac{\tilde{\omega}(m)\, dm}{\sqrt{m^3}}}{\sqrt{D}\, dm\, dx\, dy\, dz} = 1,$$

ponieważ masa zawiera się z pewnością między 0 i ∞ a każda ze składowych prędkości między $-\infty$ i $+\infty$.

Stąd mamy ostatecznie

$$(15)\qquad \varphi = \psi(m)\, dm \,.\, \frac{\sqrt{m^3 D}\, e^{-mH} dx\, dy\, dz}{\sqrt{\pi^3}},$$

gdzie

$$(16)\qquad \psi(m) = \frac{\tilde{\omega}(m)}{\sqrt{m^3} \int_0^\infty \frac{\tilde{\omega}(m)\, dm}{\sqrt{m^3}}}.$$

Z równań (15) i (16) czytamy, że prawdopodobieństwo φ, iż w układzie dynamicznym, ożywionym ruchem umiejscowionym, znajduje się punkt o masie m i prędkości $(x\,y\,z)$, składa się z prawdop dobieństwa $\psi(m)\,dm$, że ów punkt posiada masę m, oraz prawdopodobieństwa $\varphi/\psi(m)\,dm$, że posiadając masę m, porusza się z prędkością $(x\,y\,z)$.

To prawdopodobieństwo φ, jako funkcya punktu $(m, x\,y\,z)$, zależy nadto od natury funkcyi ψ i wartości stałych a, określających formę kwadratową H (11). Funkcya ψ i stałe a odpowiadają zatem naturze ciała, którego nasz układ jest modelem, i zmieniają się od ciała do ciała.

§ 3.

Załóżmy dla krótkości

$$\bar{m} = \int_0^\infty \psi(m)\, m\, dm \tag{17}$$

i zastąpmy stałe a stałemi $a/\bar{m}$. Wówczas wyznacznik D (7) i forma H (11) zamienią się na $D/\bar{m}^3$ i $H/\bar{m}$, a tym sposobem wzór (15) przyjmie postać następującą:

$$\varphi = \psi(m)\,dm\,\frac{\sqrt{m^3 D}\, e^{-mH/\bar{m}}\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{\bar{m}^3 \pi^3}}\,. \tag{18}$$

Wyrażenie $\bar{m}$ (17), wyobrażające wartość prawdopodobną masy punktu materyalnego, wyobraża tem samem, za wyjątkiem czynnika stałego, masę prawdopodobną elementu układu, a więc także i masę cząsteczki ciała, którego ten układ jest modelem. Na mocy równania (17), cząsteczka składa się zatem, ogólnie mówiąc, ze wszystkich mas zawartych między 0 i ∞, tylko w różnych stosunkach dla różnych ciał, zależnie od natury funkcyi ψ.

Całkując prawdopodobieństwo φ (18) względem m od 0 do ∞, znajdziemy wyrażenie

$$\Phi = \frac{\sqrt{D}\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{\bar{m}^3 \pi^3}} \int_0^\infty \psi(m)\, \sqrt{m^3}\, e^{-mH/\bar{m}}\, dm\,, \tag{19}$$

zależne tylko od prędkości $(x\,y\,z)$ i wyobrażające prawdopodobieństwo, że punkt o masie, której wartość prawdopodobna wynosi $\bar{m}$ (17), porusza się z tą właśnie prędkością. Jest to zatem wyraz analityczny prawa rozdziału prędkości w układzie cząsteczek o równych sobie masach, proporcyonalnych do $\bar{m}$, które to prawo, jako zależne od natury funkcyi ψ, pozostaje wraz z tą funkcyą nieoznaczonem. Owóż Maxwell pomienionej funkcyi nie uwzględniał, i tym sposobem, zamiast nieoznaczonego Φ (19), wywiódł prawo oznaczone rozdziału prędkości dla ciała jednorodnego.

§ 4.

Ze względu na rozróżnienie w układzie szkieletu od miąższa, nasuwa się samo przez się zadanie oznaczenia wartości tego szkieletu i wartości tego miąższa. Rozwiążmy oba te zadania.

Podstawiając we wzorze (18): $(x\,y\,z) = (000)$, otrzymamy prawdopodobieństwo punktu nieruchomego o masie m. Mnożąc to prawdopodobieństwo przez m, całkując względem m od 0 do ∞ i dzieląc przez $\bar{m}$, otrzymamy wyrażenie

$$\mu = \frac{\sqrt{D}\,.\,\overline{\sqrt{m^5}}\,.\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\bar{m}^5 \pi^3}}\,, \tag{20}$$

w którem

$$\overline{\sqrt{m^5}} = \int_0^\infty \psi(m)\, \sqrt{m^5}\, dm\,, \tag{21}$$

i które wyobraża wartość prawdopodobną szkieletu jednostki masy.

Co do wartości miąższa układu, to z uwagi, że w układzie naszym poruszają się jedynie punkty składające sam jego miąższ, przyjmujemy za element miąższa wartość prawdopodobną energii cynetycznej punktu. Owóż widoczna, że pomieniona wartość równa się

$$\iiiint_{0\,-\infty}^{\infty\,+\infty} \varphi\,.\,\frac{m}{2}\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

gdzie φ ma wyrażenie (18), a sumowanie od 0 do ∞ odnosi się do m, zaś sumowania od $-\infty$ do $+\infty$ odnoszą się do x, y, z. Z drugiej znowu strony, stosując do tożsamości

$$\iiiint_{0\,-\infty}^{\infty\,+\infty} \varphi = 1 \tag{22}$$

operator

$$\frac{\bar{m}}{2}\left(\frac{\partial\,.}{\partial a_{11}} + \frac{\partial\,.}{da_{22}} + \frac{\partial\,.}{\partial a_{33}}\right)$$

i uwzględniając w wyniku tak powstałym tę samą tożsamość (22), otrzymamy:

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \varphi \cdot \frac{m}{2}(x^2+y^2+z^2) = \frac{\overline{m}}{2\sqrt{D}}\left(\frac{\partial\sqrt{D}}{\partial a_{11}}+\frac{\partial\sqrt{D}}{\partial a_{22}}+\frac{\partial\sqrt{D}}{\partial a_{33}}\right). \tag{23}$$

Zatem

$$T = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(\frac{\partial\sqrt{D}}{\partial a_{11}}+\frac{\partial\sqrt{D}}{\partial a_{22}}+\frac{\partial\sqrt{D}}{\partial a_{33}}\right) \tag{24}$$

wyobrażać będzie wartość prawdopodobną miąższa jednostki masy.

§ 5.

Na mocy równania (7), oraz wyników § poprzedniego, widzimy, że wartości prawdopodobne szkieletu i miąższa zależą ostatecznie od $\overline{m}$ (17), $\sqrt{\overline{m^5}}$ (21), oraz od sześciu stałych a, które określają postać, wielkość i położenie elipsoidy, mającej za równanie

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY = 1. \tag{25}$$

Jeżeli przez α, β, γ oznaczymy wartości półosi tej elipsoidy i zgodzimy ich kierunki z kierunkami osi X, Y, Z, będziemy wówczas mieli:

$$a_{11} = 1/\alpha^2,\ a_{22} = 1/\beta^2,\ a_{33} = 1/\gamma^2,\ a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0. \tag{26}$$

a tem samem, zamiast (11):

$$H = x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 + z^2/\gamma^2, \tag{27}$$

a zamiast (7):

$$D = 1/\alpha^2\beta^2\gamma^2; \tag{28}$$

więc także, zamiast (20):

$$\mu = \frac{\sqrt{\overline{m^5}}\,.\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\overline{m}^3\pi^3}\,.\,\alpha\beta\gamma}, \tag{29}$$

a zamiast (24):

$$T = \tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \tag{30}$$

Okażemy teraz, że α, β, γ są wartościami swobody ruchu w kierunkach osi elipsoidy (25).

Załóżmy w tym celu, że jedna z wartości α, β, γ, np. α równa się zeru. Jeśli wtedy składowa x prędkości (xyz), odniesionej do nowych osi X, Y, Z, ma wartość różną od zera, będzie, według (27), $H=\infty$, a na mocy (18) będzie współcześnie $\varphi = 0$. Znaczy to, że w przypadku $\alpha = 0$ nie ma ani jednego punktu w układzie, któryby nie poruszał się równolegle do płaszczyzny osi β, γ, a więc, że α jest wartością swobody ruchu w kierunku osi α. Podobnie β i γ są wartościami swobody ruchu w kierunkach osi β i γ; wogóle zaś wartością swobody ruchu w kierunku jakimkolwiek jest promień wodzący elipsoidy (25) w tym kierunku. Stąd elipsoidę (25) nazywać będziemy elipsoidą swobody ruchu, a jej półosi α, β, γ wartościami głównemi tej swobody.

W myśl powyższych określeń i na mocy wzorów (29) i (30), możemy sformułować twierdzenie następujące:

Wartością prawdopodobną szkieletu jednostki masy jest, za wyjątkiem czynnika $\sqrt{\overline{m^5}}\,dx\,dy\,dz\,/\,\sqrt{\overline{m}^5\pi^3}$, odwrotność iloczynu wartości głównych swobody ruchu, a wartością prawdopodobną miąższa jednostki masy jest, za wyjątkiem czynnika $^1/_4$, suma kwadratów tychże wartości głównych.

Według wzoru (29), wartość prawdopodobna szkieletu jednostki masy jest wogóle nieskończenie małą rzędu trzeciego. Powiadamy „wogóle" dla tego, że może być także inaczej. Może się bowiem zdarzyć, że elipsoida swobody ruchu posiada jednę lub nawet dwie osi nieskończenie małe. Wtedy, w przypadku pierwszym, staje się ona krążkiem nieskończenie cienkim, a μ (29) staje się nieskończenie małem rzędu tylko drugiego; w przypadku drugim zaś staje się ona drążkiem nieskończenie cienkim, a μ staje się nieskończenie małem rzędu tylko pierwszego.

§ 6.

Powróćmy wreszcie do wzorów (17) i (19) i załóżmy w nich, że funkcya $\psi(m)$ jest zerem dla wszystkich wartości m, zawartych między 0 i ∞ z wyjątkiem tylko jednej: $m = m_1$, dla której $\psi(m_1)\,dm = 1$. Wtedy będziemy mieli:

$$\overline{m} = m_1 \tag{31}$$

oraz

$$\Phi = \frac{\sqrt{D}\,e^{-H}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\pi^3}}. \tag{32}$$

A jeśli przyjmiemy nadto, że swoboda ruchu nie zależy od kierunku, t. j. że

$$\gamma = \beta = \alpha, \tag{33}$$

będzie dalej, na mocy równań (27) i (28):

$$\Phi = \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)/\alpha^2}\, dx\, dy\, dz}{\alpha^3 \sqrt{\pi^3}}. \tag{34}$$

Jest to wiadome prawo Maxwella rozdziału prędkości. Wymaga ono, prócz zasadniczego (§ 1), dwóch jeszcze warunków: 1) pewności $[\psi, m_1) dm = 1]$, że układ punktów materyalnych o równych sobie masach może być modelem pewnego ciała fizycznego: 2) niezależności swobody ruchu od kierunku.

Warunek 1) wyraża hypotezę zupełnie dowolną; nie mamy bowiem zgoła pewności, że istnieje choć jedno takie ciało fizyczne, któregoby modelem mógł być układ punktów materyalnych o równych sobie masach. Warunek 2) wyraża znowu, że ciało jest tylko izotropowem, a nie anizotropowem, jak to ogólnie być powinno. Dla tych powodów prawo Maxwella jest nieścisłe i nieogólne.

Warszawa, w sierpniu 1868 r.

O prawie zachowania energii i wzrostu entropii

PODAŁ

WŁ. GOSIEWSKI.

Clausius wypowiedział zasadę, że energia świata zachowuje wartość stałą, a entropia świata dąży do maximum, wciąż rosnąc.

Przeciwko powyższemu poglądowi możnaby jednak podnieść ten zarzut, że pomieniona zasada ustanowioną została na drodze doświadczalnej, a nie rozumowej, t. j. że była stwierdzoną zaledwie na układach odosobnionych szczególnych, podczas gdy świat cały, choćby nawet jako układ odosobniony, jest przecież względem każdego dostępnego doświadczeniu układem nieskończenie ogólniejszym.

W pracy niniejszej zamierzamy okazać, że zasada, wypowiedziana przez Clausiusa, leży w samej istocie naszego umysłu, jak oraz i zasada przyczynowości.

§ 1.

W badaniu fizyko-matematycznem zjawisk przyrody usiłujemy zwykle sprowadzić każde zadanie przyrodnicze do rozważania pewnego układu niezależnych między sobą parametrów zmiennych, w pełnem zaufaniu, że pomieniony układ wyobraża model odnośnej dziedziny zjawisk. Gdy jednak układ parametrów niezależnych zmiennych ma wyobrażać model całego świata, wówczas pełne zaufanie powinno ustąpić miejsce prawdopodobieństwu, t. j. powinniśmy zastrzedz wyraźnie, że układ taki wyobraża model świata tylko prawdopodobnie.