pomysł miał w naszej epoce dwu wielkich przedstawicieli Weierstrassa i Kroneckera. Czy ten kierunek ku zalgebraizowaniu, — powiemy więcej — ku zarytmetyzowaniu analizy może osiągnąć rezultaty naukowe w zupełnej niezależności od kierunku drugiego — nazwijmy go intuicyjnym — jest to pytanie, którem nie możemy zająć się obecnie [41]). Zdaje się wszakże, że współdziałanie obu kierunków jest potężnym czynnikiem postępu umiejętności. „Teorya funkcyj analitycznych“ Lagrange'a działała tak w jednym jak drugim kierunku, pobudzając umysły twórcze, stosownie do ich indywidualności, do rozszerzenia i doskonalenia złożonych w tem dziele pomysłów.

---

[41]) Porówn. Klein „Ueber Arihmetitierung der Mathematik“ (Nachrichten der kg. l. Ges. der Wiss. in Göttingen 1895, s. 82—91). Por. też cytowaną pracę Poincaré'go oraz artykuł Pringsheima „Irrationalzahlen und Convergenz unendlicher Prozesse“ w Encyklopedyi nauk matematycznych. Tom I, zesz. I, str. 64.

O STANIE OBECNYM TEORYI NIEZMIENNIKÓW.

NAPISAŁ

Fr. MEYER,

Przełożył za upoważnieniem autora

S. DICKSTEIN.

CZĘŚĆ II.

(*Ciąg dalszy*). *)

POKREWIEŃSTWO FORM.

C. Metodyka. Symbolika i procesy niezmiennicze.

b) *Procesy niezmiennicze niesymboliczne.*

Rozpatrzymy najważniejsze procesy różniczkowe, stosowane do utworów niezmienniczych w celu otrzymania z nich utworów nowych. Przypadek szczególnie ważny, w którym przy stosowaniu takiego działania wynika wartość zero, omówimy niżej w rozdziale o równaniach różniczkowych; w odpowiednich też rozdziałach rozpatrzymy działania różniczkowe na „recyprokantach“ i „półniezmiennikach.“ Procesy te same przez się, a przynajmniej w pewnej modyfikacyi [1]), mają własność niezmienniczą, t. j. otrzymujemy ten sam rezultat, gdy wykonamy najprzód proces, a następnie przekształcenie liniowe, lub też odwrotnie.

Zgodnie z rozwojem historycznym należy procesy te podzielić na odnoszące się: do zmiennych, do spółczynników form pierwotnych, wreszcie do spółczynników podstawień. Zresztą te trzy rodzaje wielkości można rozważać wspólnie jako spółczynniki form liniowych.

---

*) Patrz „Prace matematyczno-fizyczne“ tom VII, str. 17—68; tom VIII, str. 139—177; tom IX, str. 222—142.

Zakres pracy niniejszej nie pozwala nam zająć się głębszem zbadaniem znaczenia abstrakcyjnego oraz pokrewieństwa wewnętrznego oddzielnych działań, i dla tego w tym względzie odsyłamy czytelnika do „Metod" Study'ego i do I-ej części tomu II dzieła Gordana.

α. Proces Aronholda [2]).

Pod tę nazwę podciągamy wszystkie procesy postaci

$$D_{pq} = \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

gdzie p_i, q_i są dwoma spółpodstawieniowemi szeregami wielkości, t. j. szeregami, poddanemi tym samym podstawieniom.

Rozważmy najprzód przypadek, w którym p i q są zwyczajnemi (punktowemi) zmiennemi i używaną jest pospoliciej nazwa procesu biegunowego.

W geometryi rzutowej proces biegunowy wystąpił dość wcześnie i następnie z biegiem czasu stał się jej podstawą [3]); w teoryi form, przeciwnie, dopiero w ostatnich czasach udało się procesowi temu nadać rolę kierowniczą w tem znaczeniu, że wszystkie stosowane tu działania różniczkowe nietylko do tego procesu biegunowego się sprowadzają, lecz zarazem dają się one przezeń wyrazić algebraicznie za pomocą wzorów wyraźnych.

Rozpatrzmy najprzód tak zwane „rozwinięcia szeregowe" [4]), służące do sprowadzania form o większej liczbie spółpodstawieniowych szeregów zmiennych do form o mniejszej liczbie szeregów. Pojedyńcze wyrazy takich rozwinięć są iloczynami spółzmienników „tożsamościowych" (t. j. zależnych jedynie od zmiennych) przez biegunowe owych form prostszych.

Dla form dwójkowych przeprowadzili podobne redukcye Gordan i Clebsch [5]); Clebsch i Capelli [6]) uogólnili to zagadnienie w dwu różnych kierunkach, Capelli'emu [7]) atoli należy się zasługa postawienia procesu biegunowego w punkcie środkowym całej teoryi form. Stało się to już w traktowaniu zagadnienia zasadniczego o wyznaczeniu liczby wszystkich spółzmienników liniowo-niezależnych (układu form pierwotnych) danych stopni i rzędów. W późniejszych pracach [8]) wychodzi Capelli ogólnie z n szeregów o ν zmiennych jednorodnych $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)$, ... i szuka praw, łączących $N = n^2$ działań „elementarnych" $D_{xx}, D_{xy}, D_{xz}, \ldots, D_{yx}, D_{yy}, D_{yz}, \ldots$

Przedewszystkiem mamy tu znane prawo (podane przez Clebscha) według którego „wyrażenie klamrowe" $D_{ik} D_{lm} - D_{lm} D_{ik}$ jest zawsze prostą formą liniową wielkości D. W szczególności, przy czterech różnych skaźnikach, D_{ik} i D_{lm} są wzajem przemienne, a także D_{ik} i D_{il}, D_{im} i D_{lm} [9]) Jeżeli N

procesów D w jakimkolwiek porządku oznaczymy przez $D_1, D_2, \ldots, D_N$, to będziemy mieli twierdzenie zasadnicze: „Każda forma F wielkości D (uwarunkowana nietylko swym składem algebraicznym, ale i szeregiem czynników operacyjnych D w każdym wyrazie) daje się przedstawić pod postacią

$$F = \Sigma\, C D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}, \ldots . D_N^{\alpha_N}.$$

Polega to na tem, że różnica dwóch iloczynów, utworzonych z tych samych λ czynników D, wziętych w różnym porządku, jest funkcyą liniową iloczynów, złożonych z $\lambda - 1$ czynników D. Następnie zwraca się autor do ogólnego zagadnienia o wyznaczeniu najogólniejszem działania F, przemiennego z każdem innem działaniem tego samego gatunku, a więc w szczególności i z każdem działaniem elementarnem. Rozwiązanie tego zagadnienia leży w tem, że F jest funkcyą symetryczną n szeregów ilości zmiennych, dającą się przedstawić jako forma dowolna pewnych najprostszych, liniowo niezależnych działań, które są przemienne. Np. w przypadku $n = 2$ takiemi działaniami są:

$$D_{xx} + D_{yy}, \quad D_{yy} D_{xx} + D_{xx} - D_{yx} D_{xy}.$$

Na tej podstawie wyjaśnia Capelli, w jaki sposób inne procesy niezmiennicze sprowadzają się do działań D. Dość rozwiązać to zadanie dla przypadku działania Cayley'owskiego Ω [10]), na którem polegają wszystkie procesy nasunięć. Symbolicznie proces Ω przedstawia się tak:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial y_1}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial}{\partial y_n} \\ \frac{\partial}{\partial v_i}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots \frac{\partial}{\partial v_n}$$

gdzie następnie po stronie prawej należy każdy wyraz $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}, \ldots . \frac{\partial}{\partial v_n}$ zastąpić n-tą pochodną $\frac{\partial^n}{\partial x_i \partial y_k, \ldots \partial v_s}$.

Działanie Ω jest przemienne z każdem działaniem elementarnem D_{pq}, póki p i q są różnemi; iloczyn zaś

$$\Delta^h \Omega^h = (x\, y. \ldots\, v)^h \Omega^h \qquad (h > 0)$$

posiada własność prostszą, mianowicie przemienność z każdem działaniem D_{pq} dla równych i różnych skaźników p i q.

Szukany związek pomiędzy działaniem Ω i procesami biegunowemi przedstawia piękny wzór

$$\Omega\Delta = \begin{vmatrix} D_{xx}, & D_{xy}, & \ldots & , D_{xv} \\ D_{yx}, & 1+D_{yy}, & \ldots & , D_{yn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{vx}, & D_{vy}, & \ldots & , n-1+D_{vv} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \ldots & , x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots & , y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1, & v_2, & \ldots & , v_n \end{vmatrix}.$$

Wyżej wspomniane działanie F można złożyć w sposób przejrzysty z procesów typu $\Delta\Omega$.

Wspomnijmy jeszcze, że z $N=n^2$ działań elementarnych można wybrać układ takich $n+1$ działań, aby wszystkie inne działania dały się przez nie wyrazić całkowicie i wymiernie.

Nie wchodzimy w bliższy rozbiór badań Capelli'ego nad niezależnością liniową niektórych z pomiędzy omawianych tu procesów (np. nie może nigdy zachodzić związek liniowy pomiędzy potęgami jednego i tego samego działania D).

Proces biegunowy odgrywa rolę zasadniczą w innym kierunku w symbolice Gordana [12]). Dla prostoty ograniczymy się na rozważaniu przypadku typowego formy dwójkowej o jednym szeregu zmiennych x_1, x_2. Forma f, która niechaj będzie rzędu $m+n$, może być uważana za iloczyn dwóch czynników symbolicznych a_x^m, b_x^n. Biegunowa k-ta f_{yk} szeregu $(y)=y_1, y_2$, odpowiednio f, tylko czynnikiem liczbowym różni się od spółczynnika przy λ^k w rozwinięciu dwumianowem $(a_x+\lambda a_y)^m\,(b_x+\lambda b_y)^n$, jest więc sumą $k+1$ „wyrazów“ $c_\varrho G_\varrho$, gdzie c_ϱ jest liczbą wymierną. G_ϱ zaś powstaje z $a_x^m\, b_y^n$, gdy ϱ dowolnych czynników a_x oraz $(k-\varrho)$ czynników b_x zastąpimy odpowiednio przez a_y, b_y. Mamy wtedy ważne twierdzenie [13]): Nietylko różnica dwóch wyrazów, ale i różnica między biegunową a jednym z jej wyrazów posiada zawsze czynnik $(a_1b_2-a_2b_1)(x_1y_2-x_2y_1)$. Stosując pewną liczbę razy to twierdzenie, zarazem w jego uogólnieniu do liczby czynników większej od 2, dochodzimy do zasadniczego rezultatu [14]): „że każdy wyraz biegunowej, a **więc i każdy iloczyn symboliczny** o dwóch szeregach zmiennych (x), (y) daje się rozwinąć na sumę biegunowych, postępującą według potęg ilości $(x_1y_2-x_2y_1)$“.

Twierdzenie to stosuje się do form o większej liczbie, szeregów zmiennych dwójkowych, do dziedziny trójkowej i t. d.

Przechodzimy do procesu Aronholda, stosowanego do kolumn spółczynników (p_i), (q_i), (r_i), ... przekształcenia liniowego (punktowego), t. j. do działania, będącego w najściślejszym związku z działaniami biegunowemi. W samej rzeczy już u Aronholda znajdujemy twierdzenie ogólne, że spółczynniki rozwiniętej formy pierwotnej przekształconej w nowych zmiennych są biegunami formy pierwotnej, napisanemi tylko według „kolumn podstawień“ ilości (p), (q), (r).....

Ważny stąd wynik znajdujemy u Grama [15]), mianowicie: dla niezmiennika jednorodnego J (szeregu form pierwotnych o n zmiennych) otrzymujemy $n(n-1)$ równań różniczkowych charakterystycznych [16]), gdy piszemy go w spółczynnikach przekształconych, przez co J przechodzi na J_1, rezultat zaś działań biegunowych D_{pq}, wykonanych na J_1 (p nierówne q), uczynimy równym zeru. Dla form dwójkowych pokazał Bruno [17]) w jaki sposób przez bezpośrednie przekształcenie zwykłych równań różniczkowych dla niezmienników dochodzimy do postaci powyższej.

Przechodzimy nakoniec do tej modyfikacyi procesu Aronholdowego $D_{ba}=\Sigma\, a_i \dfrac{\partial}{\partial b_i}$, gdzie a_i, b_i są odpowiedniemi spółczynnikami dwóch form f_n, φ_n. Już dość wcześnie [18]) posługiwano się tem działaniem w celu rozciągnięcia pojęcia i tworzenia niezmiennika J formy pierwotnej f_n na większą liczbę form f_n, φ_n i t. d. W zastosowaniu do form liniowych służy ono u Clebscha [19]) jako fundament symboliki, gdyż wskazuje bezpośrednio, w jaki sposób niezmiennik (formy pierwotnej) stopnia n można napisać jako niezmiennik jednoczesny n form pierwotnych liniowych. Dopóki spółczynniki b są zupełnie niezależne od spółczynników a, łatwo wielokrotnie wykonać proces $D_{ba}J=DJ$; potrzeba do tego tylko prostej „iteracyi, t. j. D^2J powstaje w ten sposób z DJ, w jaki DJ powstaje z J i t. d. Lecz nie ma to miejsca [20]), gdy ilości b zależą w pewien sposób (spółzmienniczo) od ilości a; wtedy, jak to pokazał Gordan, należy uciec się do wzorów zwrotnych, albo też, co teoretycznie jest właściwszem, zastosować pewne rozwinięcia szeregowe.

Proces Aronholdowy służy u Gordana i do uzasadnienia „kombinantów“ [21]), J staje się kombinantem form f, φ, jeżeli DJ znika tożsamościowo lub odwrotnie. Łatwo to ugólnić dla przypadku większej liczby form. Przypadek, w którym zachodzi zależność pomiędzy formami pierwotnemi f, φ, . . . , nie jest dotąd jeszcze ogólnie zbadany. Zbadano tylko ważny dla geometryi przypadek szczególny w dziedzinie dwójkowej i trójkowej, mianowicie przypadek formy pierwotnej f i takiego spółzmiennika φ, że $Df=\varphi$, $D\varphi=Mf$, gdzie M jest czynnikiem stałym (niezmienniczym) [22]).

Specyalny przypadek procesu Aronholdowego. „proces ewektantowy" pozyskał znaczenie dla budowy układów niezmienniczych. Otrzymujemy „pierwszy" ewektant formy φ, jeżeli przyjmiemy, że forma f jest realną potęgą μ-ą formy liniowej, gdy φ w największej liczbie przypadków przedstawia niezmiennik J stopnia μ-go (formy pierwotnej F). Symbolicznie wykonywamy to w ten sposób, że kolejno każdy z μ szeregów symbolów niezmiennika J zastępujemy szeregiem zmiennych x, a potem bierzemy sumę wszystkich wyrazów [23].

Gordan [24]) zastosował to do równań różniczkowych niezmiennika dwójkowego J; zastosowanie to nadaje bezpośrednio niezmiennikowi znaczenie dla teoryi form. Mianowicie równania można tak przekształcić, że wyrażają następujące twierdzenie: „Nasunięcie $(n-1)$-e formy pierwotnej na pierwszy ewektant niezmiennika J znika tożsamościowo; n-te zaś przesunięcie odtwarza niezmiennik (bez uwagi na czynnik liczbowy).

Odwrotnie, na podstawie tego twierdzenia można równania różniczkowe bezpośrednio napisać.

β. Proces nasunięcia i proces Ω.

Na procesie nasunięcia polega w zasadzie praktyczne upostaciowanie dzisiejszej teoryi form. Ogólnie nasunięcie określić można jako utwory jednoczesno-niezmiennicze dwóch lub więcej form pierwotnych o dowolnych szeregach zmiennych, liniowych względem pojedyńczych szeregów spółczynników.

Przedstawienie poniższe dla wyrazistości ograniczamy do przypadków prostych.

Niechaj będą dwie formy $F_n(x)$ i $\Phi_\nu(u)$ dualistycznie przeciwstawne; utwórzmy k-te biegunowe form F i Φ względem nowych szeregów zmiennych (y) i (v) i wyobraźmy je sobie rozwinięte według potęg i iloczynów ilości zmiennych. „Nasunięcie k-te formy F na Φ otrzymamy, jeżeli dwa odpowiadające spółczynniki rozwinięć pomnożymy przez siebie i przez właściwy spółczynnik wielomianowy [25]), a następnie utworzymy sumę tych iloczynów". Symbolika pozwala w sposób bardzo treściwy przedstawić to postępowanie. Jeżeli $F_n(x)=a_x^n$, $\Phi_n(u)=u_\alpha^\nu$ są formy dane, a więc $a_x^{n-k}a_y^k$, $u_\alpha^{\nu-k}v_\alpha^k$ ich k-te biegunowe, to k-te nasunięcie formy F na Φ ma wyrażenie następujące:

$$(F,\ \Phi)^k = a_x^{n-k}u_\alpha^{\nu-k}(a\,\alpha)^k.$$

Można to wyrażenie otrzymać symbolicznie w ten sposób, że w iloczynie $F\Phi=a_x^n u_\alpha^\nu$ zastępujemy kolejno k razy po sobie parę czynników $a_x u_\alpha$ przez „wyrażenie klamrowe" $(a\alpha)$, co daje się wyrazić według Gordana [26]) tak:

„Nasunięcie k-te dwóch form

$$F(x) = a_x{}^n,\quad \Phi(u) = u_\alpha{}^\nu$$

powstaje przez k-krotne fałdowanie iloczynu $F\Phi$".

Dla pewnych badań dobrze jest uogólnić w mowie będące nasunięcie. Aby rzecz tę wyjaśnić dla dziedziny np. trójkowej, weźmy trzy formy ze zmiennemi spółpodstawienionemi (x), (y), (z):

$$F_n = a_x{}^n,\quad G_p = b_y{}^p,\quad H_q = c_z{}^q;$$

do iloczynu FGH zastosujmy k razy proces „fałdowania", zastępując za każdym razem iloczyn $a_x b_y c_z$ „czynnikiem klamrowym" (abc); wynik działania

$$(F,\ G,\ H)^k = (a\,b\,c)^k\, a_x^{n-k}\, b_y^{p-k}\, c_z^{q-k}$$

nazywa się także „k-tem nasunięciem" trzech form. W rzeczy samej przez odpowiednią specyalizacyę można stąd powrócić do poprzedniego pojęcia $(F,\ \Phi)^k$. Niechaj najprzód rzędy p i q będą równemi oba ν i poddajmy szereg symbolów b, c warunkom, aby iloczyn $b_y c_z$ był funkcyą znakozmienną, t. j aby połączenia ilości b, c, prócz $(b_i c_k - b_k c_i) = a_i$ znikały. Wtedy y, z występują tylko w analogicznych połączeniach $(y_i z_k - y_k z_i) = u_i$, iloczyn $b_y c_z$ przechodzi na formę liniową u_α (a więc $b_y^\nu c_z^\nu$ na u_α^ν), czynnik klamrowy $(a\,b\,c)$ na $(a\,\alpha)$ i nakoniec $(F,\ G,\ H)^k$ na $(F,\ \Phi)^k$.

Przedstawione dopiero co uogólnienie wykazuje łatwo nam ścisłą zależność pomiędzy procesem nasunięcia i procesem Ω. Dla dziedziny np trójkowej proces Ω ma postać:

$$\Omega = \frac{\partial^3}{\partial x_1\,\partial y_2\,\partial z_3} + \frac{\partial^3}{\partial x_2\,\partial y_3\,\partial z_1} + \frac{\partial^3}{\partial x_3\,\partial y_1\,\partial z_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_1\,\partial y_3\,\partial z_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_3\,\partial y_2\,\partial z_1} - \frac{\partial^3}{\partial x_2\,\partial y_1\,\partial z_3}.$$

Wykonanie procesu Ω na iloczynie (symbolicznym lub realnym $a_x^n b_y^p c_z^q$ daje odrazu *np.* $q\,.\,a_x^{n-1} b_y^{p-1} c_z^{q-1}$, a k-krotne jego stosowanie:

$$\frac{n!}{(n-k)!}, \frac{p!}{(p-k)!}, \frac{q!}{(q-k)!}\,(a\,b\,c)^k\, a_\mu^{n-k}\, b_y^{p-k}\, c_z^{q-k}.$$

stąd twierdzenie zasadnicze [27]):

„Proces Ω, stosowany do iloczynu $a_n^x b_y^p c_z^q \ldots$, jest — jeżeli pominiemy czynnik liczbowy — równoważny z procesem fałdowania; k-krotna zaś iteracya procesu Ω jest w ten sam sposób równoważna z k-tem nasunięciem."

Tak więc związek między nasunięciem i procesem biegunowym jest ustalony.

Do procesu nasunięcia można, według Gordana [28]) nawiązać analogiczne rozwinięcie jak do procesu biegunowego; zasadą kierowniczą jest znowu wykonanie nasunięcia na dwóch iloczynach czynników symbolicznych; rezultat układa się przez to sam jako suma wyrazów. Różnica dwóch wyrazów oraz różnica pomiędzy nasunięciem a jednym z jej wyrazów jest podzielna przez pewne czynniki klamrowe. Stąd następnie wyprowadza się twierdzenie, że „każdy wyraz nasunięcia daje się przedstawić jako suma nasunięć" i także, że „każdy iloczyn symboliczny daje się przedstawić jako suma nasunięć prostych (t. j. zawierających tylko po dwa symbole).

Wybornym przykładem nasunięć są: wyznacznik funkcyjny [29]) m form (z m jednorodnemi zmiennemi) i jako szczególny jego przypadek wyznacznik Hessego [30]), gdy te m form stanowią cały układ pierwszych pochodnych jednej i tej samej formy.

O podciągnięciu nasunięcia pod pojęcie „połączenia" dwóch wielkości, jak to uczynił Stroh, a zwłaszcza o spożytkowaniu prawa łącznościowości dla teoryi syzygij (w dziedzinie dwójkowej) wspominaliśmy już poprzednio. Mówiliśmy także o zasadniczej własności procesu Ω, badanego przez Gordana, Mertensa i Hilberta, według której przez odpowiednie wielokrotne tegoż powtarzanie z dowolnej formy jednorodnej i izobarycznej przekształconych spółczynników otrzymujemy niezmiennik formy pierwotnej.

Badanie znaczenia, jakie ma znikanie nasunięcia, stało się źródłem teoryi apolarności, która znów jest najściślej związana z teoryą kombinantów [31]). W innym znów kierunku znikanie tego nasunięcia (dwójkowego) nabrało niedawno znaczenia dla teoryi równań różniczkowych liniowych. Równanie $(f, \varphi)^k = 0$ przy oznaczonem stale φ przedstawia równanie różniczkowe liniowe (o czynnikach, które są funkcyami całkowitemi, wymiernemi) dla formy $f(x_1, x_2)$. Ale i odwrotnie jest rzeczą możliwą stronę lewą każdego danego równania różniczkowego liniowego rzędu k z jedną zmienną niezależną o spółczynnikach wymiernych przekształcić za pomocą ujednorodnienia na agregat pewnej liczby nasunięć funkcyi f z szeregiem funkcyj φ, φ', φ'' ..... "

Daje się to, jak to niedawno pokazał Waelsch [32]), okazać w sposób następujący: W danem równaniu różniczkowem

$$Py^{(k)} + Q\,y^{(k-1)} + \ . \ . \ . \ = 0$$

połóżmy $x = \dfrac{x_1}{x_2}$; stosując twierdzenie Eulera o funkcyach jednorodnych, nadajemy równaniu postać:

$$\sum_{r=0}^{r=k} A_r^{(r)} \frac{\partial^k y}{\partial x_1^r \partial x_2^{k-r}} = 0,$$

gdzie ilości A są formami jednego i tego samego rzędu r. Jeżeli przyjmiemy symbolicznie niewiadomą y, jako formę a_x^π $(\pi \geqq n)$, to strona lewa staje się najogólniejszą formą dwóch szeregów spółpodstawieniowych x_1, x_2; $-a_2$, a_1. Rozwijając ją według Clebscha i Gordana na szereg, postępujący według potęg formy a_x, i kładąc $n + r = m$, nadamy pierwotnemu równaniu różniczkowemu postać:

$$c_0\,(\varphi_m, f)^n + c_1\,(\varphi_{m-2}, f)^{n-1} + c_2\,(\varphi_{m-4}, f)^{n-2} + \ldots = 0,$$

gdzie φ są formy dowolne rzędów oznaczonych przez skaźnik, c zaś spółczynniki liczbowe, któremi możemy rozporządzić w sposób odpowiedni. Jeżeli podstawimy teraz wyrażenia niesymboliczne za pojedyńcze nasunięcie i uczynimy w końcu $x_2 = 1$, to wrócimy do pierwotnego równania różniczkowego.

Opisane „normowanie" równań różniczkowych liniowych służy przedewszystkiem do przejrzystego scharakteryzowania specyalnych ich typów, a zwłaszcza jest ono pożytecznem, jak to w pojedyńczych przypadkach wykazał Hilbert [33]) wtedy, gdy idzie o wyznaczenie rozwiązań całkowitych wymiernych takiego równania.

Tak np. już Pick [34]) nadał był zwyczajnemu równaniu różniczkowemu Lamego postać:

$$(\varphi_4 f)^2 = \varphi_0 f,$$

gdzie φ_0 jest stałą, a iloczyn $\varphi_0 f$ jest równoważny z zerowem nasunięciem $(\varphi_0 f)^0$.

Jeżeli zamiast form φ_4, φ_0 napiszemy φ_m, φ_{m-4} (formy rzędów m, $m-4$), to będziemy mieli, według Kleina [35]) „ogólne" równanie różniczkowe Lamégo. To ostatnie staje się ogólnem równaniem różniczkowem drugiego rzędu, jeżeli w formie φ_m zrównamy pewne czynniki liniowe (realne). Jeżeli zaś w powyższej postaci równania różniczkowego f oznacza rzeczywistą formę f_π rzędu $\pi(\geqq n)$, to jego strona lewa staje się formą F_μ rzędu $\mu = n + \nu + \pi - 2n = \nu + \pi - n$. Wtedy nietylko każdej formie f_π odpowiada forma F_μ, lecz i każdemu układowi liniowemu form f_π odpowiada układ liniowy form F_μ". W a e l s c h [36]) opiera na tem specyficzną teoryę odwzorowań geometrycznych.

γ. Podstawienie pochodnych niejednorodnych.

Jeżeli dogodnem jest sprowadzanie równania różniczkowego do postaci normalnej niezmienniczo-teoretycznej (jednorodnej), to i odwrotnie dla pewnych celów, np. dla tworzenia równań różniczkowych utworów niezmienniczych jest rzeczą pożyteczną przedstawianie form pierwotnych i ich pochodnych w postaci niejednorodnej.

Niechaj $f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ będzie forma dwójkowa; utwórzmy szereg wielkości:

$$f_0 = f,\quad f_1 = \frac{1}{n}\frac{df}{dx},\quad f_2 = \frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2f}{dx^2}, \ldots, f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}.$$

B r u n o [37]) w r. 1880 podał ważne twierdzenie:

J e ż e l i w w y r a z i e g ł ó w n y m C_0 s p ó ł z m i e n n i k a C f o r m y f s p ó ł c z y n n i k i a_i z a s t ą p i m y p r z e z f_i, to C_0 p r z e j d z i e n a C".

Uogólnienie tego twierdzenia na układ form pierwotnych nie przedstawia trudności.

Zjawisko to, jak zauważył H i l b e r t [38]), który rozwinął je w dalszym ciągu, jest wspólnem źródłem szeregu pojedynczych metod dawniejszych badaczy: metody C a y l e y o w s k i e j wyprowadzania spółczynników formy C z wyrazu głównego C_0, rachunku wyrazów głównych R o b e r t s a, oraz równań różniczkowych C a y l e y'a dla niezmienników i spółzmienników. Te ostatnie przyjmują obecnie postać prostszą, ponieważ sprowadzają się do jednego, na podstawie twierdzenia:

„K a ż d a f u n k c y a c a ł k o w i t a, i z o b a r y c z n a C_0 j e d n o s t r o n n y c h p o c h o d n y c h $f_i, \varphi_k, \ldots$, w a g i p, j e d n o r o d n a c o d o t y c h w i e l k o ś c i w s t o p n i a c h o d p o w i e d n i o $g, \gamma, \ldots$, j e s t n i e z m i e n n i k i e m l u b s p ó ł z m i e n n i k i e m j e d n o c z e s n y m f o r m $f, \varphi \ldots$ r z ę d u $m = ng + \nu\gamma + \ldots - 2p$, s k o r o c z y n i z a d o ś ć r ó w n a n i u r ó ż n i c z k o w e m u:

$$f_0 \frac{\partial C_0}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial C_0}{\partial f_2} + 3 f_2 \frac{\partial C_0}{\partial f_3} + \ldots\ldots$$
$$+ \varphi_0 \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_1} + \varphi_1 \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_2} + \ldots\ldots = 0".$$

Jednym z najważniejszych wyników z tego sposobu przedstawienia jest oczywiście ten, że każdy związek pomiędzy niezmiennikami i spółzmiennikami układu form przechodzi na równanie różniczkowe. H i l b e r t [39]) podał godne uwagi zastosowanie tego twierdzenia.

Dziś, daleko lepiej niż dawniej, można już o b l i c z a ć niezmienniki i spółzmienniki dla danych s p e c y a l n y c h form pierwotnych.

Dalszego udoskonalenia doznaje teorya ta według H i l b e r t a, jeżeli obok procesu D wprowadzimy proces nowy Δ:

$$\Delta = \left(n f_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + \ldots\ldots\right)$$
$$+ \left(\nu \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_0} + (\nu - 1) \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \ldots\ldots\right).$$

W y k o n a n i e p r o c e s u Δ n a f o r m i e (i z o b a r y c z n e j) f o r m f_i j e s t r ó w n o w a ż n e z r ó ż n i c z k o w a n i e m w z g l ę d e m z m i e n n y c h x [40]).

Pomiędzy działaniami D i Δ oraz ich powtórzeniami, zachodzą proste prawa zwrotne, takie jak:

$$D^k \Delta^l = \Delta^l D^k + c_1 \Delta^{l-1} D^{k-1} + c_2 \Delta^{l-2} D^{k-2} + \ldots$$
$$\Delta^l D^k = D^k \Delta^l + d_1 D^{k-1} \Delta^{l-1} + d_2 D^{k-2} \Delta^{l-2} + \ldots$$

gdzie c, d są czynnikami liczbowemi.

Na tem opiera się rozszerzenie pojęcia spółzmiennika (i nasunięcia). Forma (izobaryczna) F form $f_i, \varphi_k \ldots$ nazywa się p ó ł s p ó ł z m i e n n i k i e m (Semicovariante) klasy (Rang) r, gdy w szeregu utworów $DF, D^2F \ldots$, pierwszym znikającym tożsamościowo jest utwór $(r+1)$-y. Według półspółzmiennyższych wzorów F jest tedy rzędu $m+r$ względem x. P ó ł s p ó ł z m i e n n i k k l a s y 0 j e s t z w y k ł y m s p ó ł z m i e n n i k i e m (i o d w r o t n i e).

Należy zauważyć, że taka forma F może być o t r z y m a n a p r z y p o m o c y p r o c e s ó w D i Δ z e s p ó ł z m i e n n i k ó w. Jeżeli, mianowicie zbudujemy proces

$$[\,] = 1 - \frac{1}{1.(m+2)} \Delta D + \frac{1}{1.2.(m+2)(m+3)} \Delta^2 D^2 - \ldots$$

to w utworach $[F]$, $[DF]$, ..., $[D^r F]$ otrzymamy $r+1$ spółzmienników $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, ..., $F^{(r)}$. Wtedy półspółzmiennik F klasy r daje się przedstawić jako agregat liniowy [41]).

$$F = \sum_{k=0}^{k=r} l_k \Delta^k F^{(k)}; \quad l_k = \frac{(m+k)!}{(m+2k)!\, k!}.$$

Proces [ ] odgrywa przytem rolę uogólnionego nasunięcia i przechodzi na to ostatnie, mianowicie na $(f, \varphi)^\nu$, jeżeli zamiast F podstawimy iloczyn $f_0 \varphi_p$.

Perrin [42]) rozciągnął twierdzenia tego rodzaju na dziedziny trójkową i wyższe i powiązał je ze swojem przedstawieniem układów stowarzyszonych.

δ. Rozwinięcia szeregowe.

Jeżeli wyspecyalizujemy wzór Capelli'ego, wyrażający związek pomiędzy procesem Ω i biegunowym, biorąc za podstawę dwa dwójkowe szeregi zmiennych x_1, x_2; y_1, y_2; i stosując go do formy $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y})$, to otrzymamy związek, na którym Clebsch i Gordan [43]) oparli swoje rozwinięcia szeregowe formy $f(x; y)$ według potęg ilości $(xy) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)$, mianowicie:

I. $$f = \Delta D f + \frac{m}{m+1} (xy)\, \Omega f$$

gdzie trzy procesy Δ, D, Ω mają następujące znaczenie:

$$\Delta f = \frac{1}{m}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad Df = \frac{1}{n}\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}\right)$$

$$\Omega f = \frac{1}{mn}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_2}\right).$$

Ponieważ formy Df i Ωf zawierają y w rzędzie niższym niż forma f, to wielokrotne stosowanie wzoru I. sprowadza wszystko ostatecznie do form o zmiennych x_1 i x_2, albowiem po należytej redukcyi otrzymujemy:

II. $$f = \Delta^n D^n f + a_1 (xy)\, \Delta^{n-1} D^{n-1} \Omega f + a_2 (xy)^2 \Delta^{n-2} D^{n-2} \Omega^2 f + \dots$$

Szereg przerywa się przy wyrazie $\Omega^m f$, ponieważ $\Omega^{n+1} f$ znika tożsamościowo; formy $D^n f$, $D^{n-1}\Omega f$, $D^{n-2}\Omega^2 f$ zależą jedynie od x. To rozwinięcie

formy f według potęg ilości (xy), gdzie spółczynniki są biegunowemi funkcyami ilości x, jest jednoznaczne [44]).

Za pośrednictwem przedstawienia symbolicznego można wyrazy po prawej napisać jako proste nasunięcia. Jeżeli położymy:

$$E_0 = D^n f = a_x^{m+n}, \quad F_1 = D^{n-1}\Omega f = b_x^{m+n-2},$$
$$E_2 = D^{n+2}\Omega^2 f = c_x^{m+n-4} \text{ i t. d.},$$

to wtedy pojedyńcze wyrazy po prawej przechodzą bezpośrednio na n-te, $(n-1)$-e, $(n-2)$-e,... nasunięcia form E_0, E_1, E_2 ... na formę $(xy)^n$.

Lecz jest rzeczą nierównie odpowiedniejszą formę pierwotną f odrazu wziąć w postaci symbolicznej: $f = r_x^m s_y^n$, a dopiero potem odpowiednim iloczynom symboli r i s nadać znaczenie realne. Wtedy formy E otrzymujemy bezpośrednio [45]) za pomocą procesu fałdowania (ze zrównaniem następnem ilości x i y), mianowicie

$$E_0 = r_x^m s_x^n, \quad E_1 = (rs)\, r_x^{m-1} s_x^{n-1}, \quad E_2 = (rs)^2 r_x^{m-2} s_x^{n-2}, \dots$$

Teoretyczne znaczenie rozwinięcia szeregowego jest bezpośrednio widoczne, albowiem wynika z niego, że formę f z dwoma szeregami zmiennych spółpodstawieniowych można ze względu na układ jej utworów niezmienniczych zastąpić zupełnie szeregiem $n+1$ form pierwotnych E (spółzmienników elementarnych według Gordana), zależnych tylko od jednego szeregu zmiennych. Toż samo odnosi się do formy f więcej niż z dwoma szeregami zmiennych, jeżeli tylko opisane postępowanie powtórzymy odpowiednią liczbę razy.

Można także dojść bezpośrednio do wzoru analogicznego dla formy f z dwoma trójkowemi szeregami zmiennych $(\xi_1, \xi_2, \dots)$, $(\eta_1, \eta_2, \dots)$. Jeżeli wraz z Clebschem [46]) za f weźmiemy specyalnie $x_1^m y_2^n$ i wprowadzimy symbolicznie wyrażenia liniowe

$$x_1 = r_\xi, \quad y_1 = r_\eta; \qquad x_2 = s_\xi, \quad y_2 = s_\eta;$$

to różnica (xy) przejdzie na $(r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi)$, a spółzmienniki elementarne można będzie zastąpić szeregiem

$$\psi_0 = r_\xi^m s_\xi^n, \quad \psi_1 = r_\xi^{m-1} s_\xi^{n-1} (r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi), \dots\dots$$

Na podstawie tego rozwinięcia formy $r_\xi^m r_\eta^n$ Clebsch [47]) udowodnił zasadnicze twierdzenie, że przy budowaniu układu utworów niezmienniczych, należącego do szeregu form pierwotnych o szeregach zmiennych $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$,

$(z_1, \ldots, z_n)$ można ograniczyć się na prostszym szeregu form pierwotnych, który z każdego „typu zmiennych“

$$x_i;\quad p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i, & x_k \\ y_i, & y_k \end{vmatrix},\quad p_{ikl} = \begin{vmatrix} x_i, & x_k, & x_l \\ y_i, & y_k, & y_l \\ z_i, & z_k, & z_l \end{vmatrix}, \ldots\ldots$$

zawiera najwyżej po jednym szeregu.

W samej rzeczy wspomniane rozwinięcie szeregowe zachodzi i wtedy, gdy ξ, η przedstawiają dwa szeregi jednego i tego samego „typu“.

Prostsze formy pierwotne, zastępujące zupełnie poprzednie, mogą prócz tego być tak dobrane [48]), aby czyniły zadość równaniom różniczkowym $\sum \frac{\partial^2}{\partial_{p_{ikl\ldots}}\,\partial_{p'_{i'k'l'\ldots}}} = 0$, gdzie $p_{ikl\ldots}, p_{i'k'l'\ldots}$ są zmienne dualistycznie przeciwstawne, suma zaś rozciąga się na wszystkie pary tego rodzaju. Jeżeli mamy jednę tylko zmienną punktową i spółpodstawieniową u, to suma to jest wprost $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i}$.

U Gordana [49]) proces rozwinięcia szeregowego jest doniosłym środkiem rachunku symbolicznego. Wspomnijmy np. o metodzie obliczania spółzmienników liniowo-niezależnych („syzygetycznych“) danej formy pierwotnej; o przedstawianiu spółzmienników za pomocą pierwiastków formy pierwotnej; o dowodzie prawa wzajemności Hermite'a, oraz zasadniczego twierdzenia symboliki, że każdy spółzmiennik może być napisany jako agregat iloczynów symbolicznych postaci z góry przepisanej.

Rozciągnięciem rozwinięcia szeregowego Clebscha-Gordana na formy o większej liczbie spółpodstawieniowych szeregów o n zmiennych zajmował się najwięcej Capelli.

Dla formy np. trójkowej [50]) z trzema szeregami $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y}; \overset{l}{z})$ — jeżeli $(x\,y\,z)$ oznacza wyznacznik zmiennych x, y, z — jest:

$$f = \sum_{\nu} \sum_{\mu} (x\,y\,z)^{\varrho} D^{\nu}_{yz} D^{\mu}_{xz} \varphi_{\mu\nu}(\overset{m+\mu-\varrho}{x}; \overset{n+\nu-\varrho}{y};) \qquad (\mu+\nu+\varrho)=l$$

Tu $\varphi_{\mu\nu}$ są spółzmienniki, zawierające tylko x, y; powstają one z formy f w ten sposób, że

$$\varphi_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} k_{\sigma} D^{\tau}_{zx} D^{\tau'}_{zy} D^{\tau''}_{xy} D^{\sigma} \quad \Omega^{\varrho} f,$$

gdzie k są czynniki liczbowe, σ zmienia się wewnątrz pewnych granic, a wykładniki τ są związane w sposób określony z liczbą σ.

W pierwszym dowodzie swoim posługuje się Capelli symboliką Aronholda. Wyszedłszy z przypadku specyalnego $l=1$, bierze najprzód rozkład

$$f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y}; \overset{l}{z}) = a^u_m b^u_y z = D_{xz}\varphi + D_{yz}\psi + (xyz)(abc)H,$$

w którym formy φ, ψ, H nie zawierają zmiennych z. Badanie równań diofantowych pomiędzy wykładnikami czynników symbolicznych a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y w formach φ i ψ pokazuje, że ostatnie dwie formy składają się z pewnej liczby form liniowo-niezależnych, powstających wprost z formy $a^m_x b^n_x c_x$ przez biegunowanie względem y. Stąd zaś kolejno otrzymuje się podany wzór ogólny, mnożąc obie strony przedstawienia dla $a^m_x b^n_y c_z$ przez dalsze czynniki c_z.

Odtąd autor pracował wciąż nad uproszczeniem dowodzenia. Powoli doszedł do tego, że twierdzenie to należy raczej nie tyle do teoryi form, ile do teoryi abstrakcyjnej procesów biegunowych D. Momentami głównemi najnowszego dowodu są: po pierwsze — różnica pomiędzy dwoma iloczynami tych samych λ działań D, różniących się tylko porządkiem, daje się utworzyć liniowo z iloczynów mniejszej liczby działań D; dalej niezależność liniowa pomiędzy pewnemi takiemi procesami, wreszcie sprowadzenie procesu Ω do procesów D.

Często stosowanym przypadkiem szczególnym rozwinięcia formy $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y}; \overset{l}{z})$ — jeżeli pozostajemy przy typie trójkowym—jest ten, który powstaje gdy $n=l$, y zaś i z występują tylko w połączeniach $u_i = \begin{vmatrix} y_k, & z_k \\ y_i, & z_i \end{vmatrix}$, t. j. gdy forma pierwotna f zależy tylko od zmiennych x i przeciwpodstawieniowych u. Clebsch nazywa wtedy formę f „koneksem“ [51]). Już w r. 1872 wykazał Gordan [52]), że koneksy nadają się do bardziej bezpośredniego badania; forma f daje się rozwinąć na szereg skończony według potęg ilości $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_0$ w ten sposób, że spółczynniki stają się „koneksami normalnemi“, t. j. takiemi, dla których znika tożsamościowo pewna forma pośrednia, Aby to jasno pokazać, pójdziemy za wykładem Study'ego [53]).

Jeżeli forma f jest dana symbolicznie przez $a^m_x u^n_\alpha$, to przez fałdowanie otrzymujemy:

$$\Delta_k f = (a\,\alpha)\, a^{m-k}_x u^{n-k}_x; \qquad (k=1, 2\,\ldots\ldots)$$

t. j. najprostsze nasunięcia formy f; jeżeli w szczególności Δf znika tożsamościowo, f nazywa się „koneksem normalnym“. Dowodzi się najprzód:

Że każdy koneks o liczbach rzędowych m, n (względem spółczynników formy f) posiada spółzmiennik liniowy o tych samych liczbach rzędowych, będący koneksem normalnym.

W samej rzeczy, agregat

I. $$G_0 = f + a_1 u_x \Delta f + a_2 u_x^2 \Delta^2 f + \ldots\ldots$$

przedstawia przy jakichkolwiek czynnikach liczbowych (wymiernych) a spółzmiennik liniowy formy f z liczbami rzędowemi m, n. Tu możemy spółczynniki a za pomocą zwrotu wyznaczyć jednoznacznie w ten sposób, aby było $\Delta G_0 = 0$, t. j. aby G_0 było koneksem normalnym.

Dowiedzione w ten sposób twierdzenie I stosuje się tak do samej formy f, jak i kolejno do utworów Δf, $\Delta^2 f$, ..., przez co powstają koneksy elementarne G_0, G_1, G_2, ...

W takiż sam sposób bierzemy agregat

II. $$G_0 + b_1 u_x G_1 + b_2 u_x^2 G_2 + \ldots\ldots$$

i staramy się go przez odpowiedni wybór spółczynników liczbowych b utożsamić z formą f. To można uskutecznić jednym tylko sposobem, gdyż ilości b_i otrzymują się przez rozwiązanie układu równań liniowych. „Tak więc każdy koneks $f(x, u)$ daje się według potęg formy u_x rozwinąć na szereg, którego spółczynnikami są koneksy normalne.“

Równocześnie z tego dowodu wynika ważny wniosek, że spółczynniki koneksów elementarnych G_i — prócz ograniczenia, jakie nakłada na nie zachodzenie warunków $\Delta G_i = 0$ — są od siebie niezależne.

Study uczynił teoryę takich rozwinięć szeregowych jeszcze bardziej przejrzystą przez wciągnięcie dualizmu do rozważań. Jeżeli z Rosanesem nazwiemy dwa koneksy $f = a_x^m u_\alpha^n$, $g = b_x^n u_\beta^m$ „sprzężonemi“, wtedy gdy znika niezmiennik równoczesny

$$[f, g] = a_\beta^m b_\alpha^n,$$

to rozwinięcia szeregowe (według koneksów elementarnych) dwóch koneksów o liczbach rzędowych m, n lub n, m wiąże godny uwagi związek, mianowicie „każdy wyraz $u_x^i G_i$ jednego szeregu jest sprzężony z każdym wyrazem $u_x^k G'_k$ drugiego, wyjąwszy przypadek, w którym skaźniki i, k są równe.

Zupełnie analogiczne twierdzenia zachodzą dla form z dwoma spółpodstawieniowemi szeregami zmiennych.

Study dowiódł w dalszym ciągu, że omówione własności pozostają w swej mocy, gdy koneks dany f nie jest już ogólnym, lecz jest normalnym [54]).

Tenże sam autor, na podstawie starannego zbadania rozmaitości przedstawionej przez spółczynniki podstawienia oraz pewnych niższych dziedzin niezmienniczych w nich zawartych, wyjaśnił znaczenie geometryczne lub raczej pojęciowe rozwinięć szeregowych [55]).

ε. Podstawienie pochodnych jednorodnych.

Jak już powiedziano we Wstępie, Sylvester przez podstawienie pierwszej pochodnej formy $G(u)$ zamiast spółpodstawieniowych z nią zmiennych x w formie $F(x)$, otrzymał utwór jednocześnie-niezmienniczy. Gdy w szczególności forma $F(x)$ była już spółzmiennikiem, forma zaś $G(u)$ przeciwzmiennikiem danych form pierwotnych, to proces ten prowadził do nowego przeciwzmiennika. W nowszym czasie Sylvester podał jeszcze inną zasadę [56]) w celu otrzymania z dwóch utworów niezmienniczych trzeciego. Zasługuje ona na uwagę przedewszystkiem ze względu na źródło, z którego pochodzi, gdyż wynika z prostego związku pomiędzy grupą podstawień spółczynników a formy pierwotnej.

Aby ten związek uwydatnić, forma pierwotna najprzód „preparuje się“ [57]), t. j. spółczynniki a mnoży się przez pierwiastki kwadratowe odnośnych spółczynników wielomianowych. Wtedy „dwa wzajemne podstawienia zmiennych x dają zawsze przez indukcyę dwa wzajemne podstawienia spółczynników“. Jeżeli więc mamy znowu spółzmiennik $F(x)$ i przeciwzmiennik $G(u)$, to zastąpmy ilości a wewnątrz formy $F(x)$ przez pochodną $\dfrac{\partial G(u)}{\partial a}$ i zarazem ilości x przez ilości u, a dojdziemy także do nowego przeciwzmiennika.

W sposób podobny z dwóch spółzmienników można otrzymać nowy spółzmiennik.

Opisany proces podstawienia daje się przenieść na wyrazy główne form $F(x)$, $G(u)$. Jeżeli w jednym z tych wyrazów zamiast ilości a napiszemy odpowiednio pochodne drugiego, otrzymamy nowy wyraz główny spółzmiennika lub przeciwzmiennika.

Sylvester okazał to twierdzenie zasadnicze kolejno dla dziedziny dwójkowej, trójkowej i t. d., Lipschitz [58]) zaś dał dowód tegoż bezpośredni. Wiąże on to twierdzenie z innem podobnem, uzupełniającem z innej strony pokrewieństwo pomiędzy grupą zmiennych i grupą spółczynników. Okazuje się mianowicie, że „dwa podstawienia „transponowane“ jednego rodzaju warunkują takież dwa podstawienia innego.“

Study [59]) rozciągnął to ostatnie twierdzenie na koneksy i wyprowadził stąd niektóre wnioski, z których widać, że źródło tych zjawisk tkwi w zasadzie wzajemności (dualizmu).

Jeżeli obok koneksu pierwszego $f(\overset{m}{x}, \overset{n}{u})$ wyobrazimy sobie koneks drugi $\varphi(\overset{n}{x}, \overset{m}{y})$ z przestawionemi liczbami rzędowemi i także w postaci „preparowanej", to wtedy obie grupy spółczynników będą wzajemnie transponowanemi".

W rzeczy samej, jeżeli obustronne spółczynniki oznaczymy przed a, b przekształcone przez a', b', to agregat $\Sigma ab = \Sigma a'b'$, t. j. Σab jest spółzmiennikiem tożsamościowym, podobnie jak Σxu [60]).

Stąd dalej wynika, że jeżeli F jest funkcyą ilości a, to wielkości $\frac{\partial F}{\partial a}$ są spółpodstawieniowemi z ilościami b.

Na tem opiera się wprowadzenie pojęcia ewektantu przy koneksach; dość bowiem zamiast $\frac{\partial F}{\partial a}$ napisać b. Ewektant jest znów formą preparowaną. Proces ewektantowy można dowolnie powtarzać, spółczynniki k-go ewektantu są pochodnemi cząstkowemi k-tego rzędu koneksu F.

ζ. Równania różniczkowe.

Już we wstępie mówiliśmy o udziale Aronholda, Sylvestera, Cayley'a, Brioschi'ego, Betti'ego w ustanowieniu równań różniczkowych, którym czynią zadość niezmienniki jednej lub więcej form pierwotnych. Postęp, dokonany pod tym względem w okresie nowszym, sprowadza się do poznania istotnego znaczenia wzajemnego związku oraz wynikającej stąd redukcyi tych równań.

Już Clebsch stwierdził, że dla tworzenia niezmienników układu form pierwotnych z większą liczbą zmiennych koniecznem jest wprowadzenie podwyznaczników p_{ik}, p_{ikl},..., należących do wyznaczników, utworzonych z n takich szeregów, jako zmiennych samodzielnych. Powstało skutkiem tego zadanie zmodyfikowania równań różniczkowych dla niezmienników formy pierwotnej $f(x_1, x_2, ..., x_n^1)$ w ten sposób, aby równania te stosowały się do utworu niezmiennego formy f, który, oprócz ilości x i spółpodstawieniowych ilości u, zawiera zawsze po jednym szeregu z każdego typu pośredniego p_{ik}, p_{ikl}, ,.... Ogólnie to zadanie rozwiązał dopiero niedawno Forsyth [61]).

Idąc za Liem, wychodzi on z podstawienia nieskończenie małego ilości x. t. j. z takiego podstawienia, którego spółczynniki rożnią się od „podstawienia jednostkowego" $x_i = X_i$ tylko o ilości nieskończenie małe δ; oblicza następnie zmiany, jakich doznają przez to powyższe podwyznaczniki p_{ik}, p_{ikl}, ..., u, jakoteż spółczynniki a formy pierwotnej. Wystarcza do tego uwzględnienie tylko pierwszych potęg ilości δ. Tak np. dla utworu niezmienniczego J formy czwórkowej $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ o spółczynnikach a_{iklm} dostajemy sześć równań cząstkowych liniowych typu

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, i\, a_{i-1,\,k+1,\,l,\,m} \frac{\partial J}{\partial a_{iklm}} = x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} + p_{14} \frac{\partial J}{\partial p_{24}} - p_{31} \frac{\partial J}{\partial p_{23}} - u_2 \frac{\partial J}{\partial u_1}.$$

Nie przedstawia też zasadniczej trudności uwzględnienie na tej drodze form pierwotnych, w których zachodzą wszystkie lub niektóre z ilości x, p_{ik}, p_{ikl}, ..., u.

Fakt, ustalony przez Clebscha, że równania różniczkowe Aronholda w liczbie n^2 dla niezmiennika bezwzględnego tworzą układ zupełny, t. j. że stosowanie procesu klamrowego prowadzi zawsze tylko do kombinacyj liniowych równań dawniejszych, staje się niezwykle przejrzystym z punktu widzenia ogólniejszej teoryi Liego. Gdy bowiem równania różniczkowe niezmiennika wprost wyrażają, że niezmiennik ten dopuszcza wszystkie nieskończenie małe podstawienia zmiennych (albo też i spółczynników), to własność układu zupełnego oznacza, że podstawienia tworzą grupę.

Study [62]) bliżej badał ten związek dla niezmienników rzutowych, a w szczególności wykazał, że pewne układy równań różniczkowych mają bezpośrednie znaczenie w teoryi form, tak w kierunku symbolicznym jak i niesymbolicznym. Gordan, jak to już wspomniano, wykazał to samo dla dziedziny dwójkowej. Study [63]) przedstawia najprzód przekształcenie liniowe ilości x ze pomocą formy T, dwuliniowej względem x i u. Następnie—w dziedzinie trójkowej—odwzorowuje rozmaitość form T w przestrzeni liniowej R o $9-1=8$ wymiarach; przestrzeń ta przekształca się przeto za pomocą grupy ośmioparametrowej. Przekształceniu tożsamościowemu u_x odpowiada punkt niezmienny—jednostkowy; podobnież ogółowi przekształceń T' o znikającym wyznaczniku rozmaitość siedmiowymiarowa liniowa R'. Każde przekształcenie nieskończenie małe odwzorowuje się na „prostej" w przestrzeni R, przechodzącej przez punkt jednostkowy. Jeżeli oznaczymy tę prostą przez jej przecięcie z R', to przez to przyporządkujemy jednoznacznie i odwracalnie każdemu przekształceniu nieskończenie małemu określone przekształcenie ***skończone*** T' o znikającym wyznaczniku, a skutkiem tego forma dwuliniowa T' jest ***symbolem*** przekształcenia nieskończenie małego. Na tej drodze dochodzimy do przejrzystego symbolicznego przedstawienia równań różniczkowych niezmienników J formy pierwotnej f.

Znaczenie niesymboliczne równań wyraża się w ten sposób, że ewektant J' niezmiennika J pozwala na utworzenie pewnego spółzmiennika jednoczesnego form J i f, który różni się tylko czynnikiem liczbowym od iloczynu Fu_x. W twierdzeniach tego rodzaju niezmienniki całkowite wymierne nie wyróżniają się zresztą od innych; zamiast nich, można brać niezmienniki wymierne, algebraiczne lub analityczne.

Nasuwa się teraz pytanie inne, mianowicie do jakiej liczby minimalnej równań niezależnych daje się zredukować układ całkowity n^2 równań różniczkowych. Tu liczba minimalna musi posiadać tę własność, że przez wielokrotne powtórzenie procesu klamrowego otrzymuje się wszystkie pozostałe równania układu. Z powyżej omówionego przedstawienia podstawień nieskończenie małych za pomocą form dwuliniowych ze znikającym wyznacznikiem wypływa, że szukana liczba minimalna jest równa 2 [64]).

Inną metodę redukcyi podał Kronecker [65]). Zestawia on ogólne podstawienie liniowe o n zmiennych z szeregu podstawień prostszych w ten sposób, że kolejne wykonywanie tych ostatnich podstawień jest równoważne z wykonaniem pierwszych. Za takie prostsze podstawienie przyjmuje się te, w których podstawienie rozciąga się tylko na dwie zmienne, a w szczególności te, w których zmienne zmieniają się tylko o czynniki stałe. W ten sposób dochodzimy n. p. do $n-2$ prostych „układów zestawienia" (Decompositionsysteme) ze spółczynnikami liczbowemi; odpowiadające $2n-2$ równań różniczkowych, które kolejno wyrażają, że niezmiennik pozostaje niezmiennym przy każdem z $2n-2$ podstawień, zastępują zupełnie układ n^2 równań różniczkowych Aronholda. Dla niezmienników bezwzględnych do każdego z $2n-2$ równań przybywa jeszcze jedno. Kronecker sam zwraca uwagę na to [66]), że jego równania zostały otrzymane bez wszelkiej symboliki; dalej, że przy charakteryzowaniu niezmienników nie można pominąć żadnego z tych $2n-2$ lub $2n-1$ równań, że wreszcie przeprowadzona przez niego redukcya n^2 równań pierwotnych do $2n-1$ równań daje zupełne pojęcie o związkach pomiędzy n^2 równaniami, warunkujących istnienie tychże.

Na zakończenie wspomnijmy jeszcze o tem, że znaczenie równań różniczkowych, którym czynią zadość niezmienniki, oprócz ułatwienia praktycznego przy ich obliczaniu, polega przedewszystkiem na tem, że aż do ostatnich czasów dawały one jedyną ogólną metodę niesymboliczną traktowania większej liczby zagadnień teoryi form. Gdyż i niesymboliczna metoda „form kanonicznych" daje się całkowicie uzasadnić jedynie przy pomocy tych równań różniczkowych [67]).

PRZYPISY.

[1]) Tak np. lewa strona pojedyńczego z pomiędzy n^2 równań różniczkowych Aronholda nie posiada jeszcze własności niezmienniczej, lecz posiadają ją odpowiednie kombinacye tych stron. Por. Study „Methoden i t. d.," str. 175.

[2]) O stosowaniu tego procesu do tworzenia pewnych „zupełnych podukładów" mówiliśmy już poprzednio. Niedawno Wiltheiss zwrócił uwagę na znaczenie, jakie posiada ten proces przy postaciowaniu niezmienniczem równań różniczkowych dla funkcyj Θ.

(por. Math. Ann. XXXVIII, zwł. s. 23, 1890); Hilbert zaś pokazał, w jaki sposób przy pomocy tego procesu dojść można ogólnie do zupełnego układu form zasadniczych (Gött Nachr. 1892, zwł. str. 6).

[3]) Por. np. Thieme, Math. Ann. XXVIII, s. 133—151 (1887).

[4]) Por. II, C. b. δ.

[5]) Gordan, Math. Ann. V, str. 595—122 (1872); Clebsch, Binäre Formen. § 7 (1872).

[6]) Gött. Abh. XVII, s. 1—62 (1872); patrz cytaty w II C. b. δ; Clebsch wprowadza zmienne różnostopniowe (wyznaczniki utworzone ze spółpodstawieniowych szeregów ilości zmiennych), Capelli zaś zachowuje szeregi zmiennych jednego gatunku; jego wzory są, przeto bardziej przejrzyste, gdy wzory Clebscha nadają się lepiej do zastosowań geometrycznych. Por. uwagi Capelli'ego w jego „Fondamenti" (1882) str. 3. O analogicznych badaniach Deruyts'a patrz II D. a.

[7]) Podstawowe znaczenie ma tu praca „Fondamenti" (1882)

[8]) Capelli zebrał rozproszone po różnych pismach swe badania w rozprawie ogłoszonej w Math. Ann. XXXVII, s. 1—37 (1891). Porów. Nap. Rend. XXV, s. 134—141 (1886) tamże (2) I, s. 110—115, 236—242 (1887); Atti R. Acc. Nap. (2), I (1887). Math. Ann. XXIX s. 331—338 (1887).

[9]) Do mniejszej liczby tożsamości charakterystycznych tego rodzaju sprowadzić można i pozostałe zależności pomiędzy procesami biegunowemi. Są to właśnie równania charakterystyczne dla biegunowych. Porówn. Math. Ann. XXXVII, str. 4.

[10]) Odpowiedni wzór dla dwu szeregów zmiennych dwójkowych znajdujemy u Clebscha, Binäre Formen § 7.

[11]) Dalsze wzory w Atti d. R. Acc. di Napoli (2) I, (1882).

[12]) Vorlesungen et. d. II, § 2. Dla dziedziny trójkowej Math. Ann. XVII, s. 217—234 (1880).

[13]) Vorlesungen i t. d. II, s. 26. Twierdzenie to opiera się na własnościach dwóch wyrazów „sąsiednich", które powstają jeden z drugiego w ten sposób, że w parze czynników $a_x\, b_y$ przestawimy symbole a, b. E. Pascal zbadał szczegółowiej działanie tego procesu, dla którego wprowadził symbol osobny. Napoli Rend. (2), 1, s. 210—207 (1887).

[14]) l. c. s. 32.

[15]) Math. Ann. VII s. 230—240 (1874). Twierdzenie to wypływa zresztą bezpośrednio z definicyi niezmienników, według której niezmiennik przekształcony różni się tylko o potęgę wyznacznika podstawienia od niezmiennika pierwotnego.

[16]) Dalsze równania w liczbie n, występujące u Aronholda, orzekają tylko, że niezmienniki są jednorodnemi i izobarycznemi względem szeregów spółczynników form pierwotnych.

[17]) Binäre Formen, s. 152.

[18]) Porówn. uwagi we Wstępie do tej pracy.

[19]) Porówn. n. p. wykład przejrzysty tej rzeczy w odczytach Clebscha-Lindemanna I, s. 183 i nast.

[20]) Gordan, Vorlesungen i t. d., II, § 5.

[21]) l. c. § 6.

[22]) l. c. s. 74. Por. art. Gundelfingera, Math. Ann. IV, str. 164—168 (1871).

[23]) l. c. str. 128. Porówn Study, Methoden i t. d., str. 41.

[24]) l. c. str. 129 i nast. Co do form trójkowych parrz Study, Methoden i t. d., str 170 i nast.

[25]) Jeżeli wraz z Clebschem i Sylvesterem wprowadzimy formy pierwotne „preparowane", w których zachodzą pierwiastki kwadratowe ze spółczynników wielomianów jako czynniki liczkowe, wtedy nasunięcie staje się wprost sumą iloczynów dwóch.

spółczynników homologicznych. Własność niezmiennicza nasunięcia wychodzi na to, że oba szeregi spółczynników są spółpodstawieniowemi.

[26]) Vorlesungen, II, s. 33. Jeżeli w dziedzinie trójkowej mamy dwie formy, które obok ilości x zawierają ilości u:

$$f_{r,s} = a_x^r u_\alpha^s, \quad \varphi_{\varrho,\sigma} = b_x^\varrho u_\beta^\sigma,$$

wtedy każde nasunięcie form f i φ daje się symbolicznie przedstawić tak:

$$a_\beta^{r_1} b_\alpha^{r_2} (a\,b\,u)^{r_4} (\alpha\,\beta\,x)^{r_5} \alpha_x^{r_3} b_u^{r_6} u_\alpha^{r_7} u_\beta^{r_8},$$

gdzie $r_1 + r_2 + r_3 = r_i$ i t. d. Tu oznacza

$$a\beta = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3,$$

$$(a\,b\,u) = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix}, \text{ i t. d.}$$

Nasunięcia te wszystkie można wyprowadzić przy pomocy „fałdowania" z iloczynu $f\varphi$, jeżeli pary czynników $a_\alpha u_\beta$, $b_\alpha u_\alpha$, $a_x b_x$, $u_\alpha u_\beta$ zastąpimy odpowiednią liczbę razy przez pary czynników a_β, b_α, (abu), $(\alpha\beta x)$. Patrz Gordan, Math. Ann. XVIII, s. 217—233 (1881).

[27]) Porów. dające się łatwo uogólnić przedstawienie u Gordana, Vorlesungen II, s. 22—23; Vivanti Pal. Rend. IV, s. 261—268 (1890).

[28]) Vorlesungen II, § 3. Math. Ann. XVII, s. 217—239 (1881).

[29]) O związkach pomiędzy wyznacznikami funkcyjnemi patrz II D. b. Zastosowanie ich ujawniło się już przy wyprowadzeniu syzygij.

[30]) O formach, których hesyan znika tożsamościowo, porów. II D. d.

[31]) Porów. II, D, b.

[32]) Prag. Abh. 1892, s. 78—99

[33]) Disser. Królewiec (1885); Math. Ann. XXX, s. 15—29 (1887), XXVIII t. 381—446 (1887); Perrin S. M F. XVI, s. 82—100 (1888); Hirsch, Diss., Królewiec, 1892.

[34]) Wien: Ber. lipiec 1887; Math. Ann. XXXVIII, s. 139—143 (1891); Halphen Traité des fonct. ellipt. II, 1888; Bôcher, Gött, Preisarbeit 1851, rozdz. II.

[35]) Gött. Nachr., marzec 1890, s. 85—95; Math. Ann. XXXVIII, s. 144—152 (1891).

[36]) l. c.

[37]) C. R. XC., s. 1203—1205; Journ. f. Math. XC, s. 186—188; Am. J. III, s. 154—164; Math. Ann. XVIII, s. 280—288 (1881). Myśl zasadnicza dowodu, podanego przez Bruno, jest następująca: Jeżeli φ jest jedną z pomiędzy form f_1, to szereg Maclaurina daje:

$$\varphi = [\varphi] + x[\partial\varphi] + \frac{x^2}{1.2}[\partial^2\varphi] + \dots\dots$$

gdzie ∂ przedstawia znany proces różniczkowania

$$a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial}{\partial a_3} + \dots\dots$$

klamry zaś oznaczają, że po wykonaniu działania należy podstawić zero zamiast x. Dla spółzmienników formy dwójkowej f zachodzi, według Cayley'a, zupełnie podobne rozwinięcie, tak że

$$\psi = c_m + \partial c_m + \frac{y^2}{1.2}\partial^2 c_m + \dots\dots$$

Porównanie tych dwóch rozwinięć prowadzi do twierdzenia, podanego w tekście. Sylvester znalazł to twierdzenie niezależnie od Bruna, ale uznał pierwszeństwo tego ostatniego w Am. J. II, s. 357. Porów. też Stroh, Math. Ann. XXII, s. 402 (1883).

[38]) Diss., Królewiec 1885; Math. Ann. XXX, s. 15—29 (1887). Jeżeli w twierdzeniu, wymienionem w tekście, dowolnej zmiennej x nadamy wartość pierwiastka równania $f=0$, otrzymamy twierdzenie, które Brioschi zastosował z powodzeniem do przekształcenia równania (Math. Ann. XXIX, s. 327—330. (1887).

[39]) Math. Ann. XXX, l. c. s. 21 i nast. Por. II D, d.

[40]) Twierdzenie to wiąże się bezpośrednio ze znanem twierdzeniem, według którego forma izabaryczna spółczynników a_i, czyniąca zadość dwom równaniom różniczkowym $D=0$, $\Delta=0$, jest niezmiennikiem jednoczesnym form f, ψ ..... Według twierdzenia głównego w tekście forma ta nie może się zmieniać, jeżeli spółczynniki a_i zastąpimy formami f_i, i dla tego jako forma tych ilości f_i nie może ona zawierać zmiennej x. Odpowiednie twierdzenie stosuje się zresztą, według Mac Mahona, i do wzajemników. Patrz II C. c. β.

[41]) Na tem polega dowód Hilberta, dotyczący liczby utworów niezmienniczych liniowo-niezależnych.

[42]) Bull. S. M. F., XVI s. 82—100 (1888).

[43]) Clebsch, Binäre Formen, § 7; Gordan, Vorlesungen II, s. 23.

[44]) Jednoznaczność należy rozumieć w ten sposób, że nie istnieje drugie rozwinięcie według potęg ilości (xy), którego spółczynniki są biegunowemi form jednej zmiennej.

[45]) Gordan, Vorlesungen, II, § 7.

[46]) Gött. Abh., XVII. zwł. s. 22. Por. Gordan, Math. Ann. V, s. 95—122 (1872), gdzie podane są zarazem rozwinięcia dla biegunowych „spółzmienników elementarnych".

[47]) l. c. § 12.

[48]) Forsyth podał w Quart. J. XXIII, s. 102—138 (1888), szereg przykładów takich „układów zredukowanych" i trzymając się drogi Clebscha, stwierdził, że liczba spółczynników dowolnych, występujących w formach zredukowanych, zgadza się ściśle z liczbą form pierwotnych. Mertens zastosował formy zredukowane dziedziny czwórkowej do ustanowienia układów zupełnych form zasadniczych (Wien. Ber. XCVIII, s. 691—730, 1889 i prace późniejsze, tamże). Gordan w programie swoim (Dodatek, 1875) rozwinął w dalszym ciągu pojęcie zredukowanej. W wyznaczniku wielkości

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (z_1, z_2, \dots, z_n), \dots$$

uważajmy niektóre szeregi za zmienne dowolne, inne zaś, jak przy procesie Ω, zastąpmy symbolicznie przez odpowiednie pochodne. Wszystkie takie agregaty niezmiennicze, przyrównane do zera, dają nam równania różniczkowe, którym poddać można „formy zredukowane". Mertens w badaniach swych korzysta wiele z takich procesów. Capelli w swoich „Fondamenti" (1882) zamiast tych procesów wprowadza układ prostych działań biegunowych; podobnież Deruyts w swojej pracy: „Théorie générale des formes algébriques" (1891).

[49]) Tożsamo stosuje się do rozwinięć trójkowych Study'ego. Oryginalne przedstawienie rozwinięcia Gordana podał Baker, Mess (2), XIX, s. 91—96 (1889).

[50]) Capelli, Batt. G. XVIII, s. 17—34 (1880), Fondamenti, 1882, Rend. Pal, I, s. 6 (1886). Math. Ann. XXXVII, s. 1—37 (1891); Rend. Acc. L. VII, s. 161—167 (1891); tamże s. 3—9 (1892).

[51]) Gött. N. 1872, s. 429—449; Math. Ann. VI, s. 205—215 (1872). Por. Clebsch u. Gordan Math. Ann. I, s. 359—400 (1869).

[52]) Math. Ann. V, s. 95—122, zwłaszcza §§ 4 i 5.

[53]) „Methoden etc." II, § 3.

[54]) l. c. II. § 8.

[55]) l. c. II, § 12.

[56]) Journ. f. Math. LXXXV, s. 89—114 (1878).

[57]) Te spółczynniki „preparowane" występują zresztą już u Clebscha, Gött. Abh. XVII, s. 14 (1872).

[58]) Am J. I, s. 336—346 (1878): porów. uwagi Sylvestera, tamże s. 341—343. La Paige podał prosty dowód symboliczny twierdzenia o podstawieniach „transponowanych", Math. Ann. XV, s. 206—210 (187·), Sharp (Proc. L. M. S. XIII s. 216—239, 1882) podał interesujące zastosowanie dawniejszych twierdzeń Sylvestera o podstawieniach pochodnych jednorodnych; wykazał bowiem, że niezmienniczość, odnośnie do podstawień ortogonalnych, większej części wyrażeń różniczkowych fizyki matematycznej podlega zasadzie Sylvestera. Study zastosował różniczkowanie względem spółczynników podstawienia ortogonalnego do tworzenia niezmienników grup skończonych (Leipz. Ber. 1892, s. 122—164).

[59]) „Methoden etc." str. 36 i nast.

[60]) Tak dawne jak i nowe twierdzenia Sylvestera o zamianie zmiennych lub spółczynników przez pochodne dają się oczywiście rozciągnąć i na przypadek jakichkolwiek dwóch dualistycznie przeciwstawnych szeregów zmiennych $p_{ikl}, \ldots, p_{i'k'l'}, \ldots$, gdyż suma $\sum p_{ikl}, \ldots, p_{i'k'l'}, \ldots$ jest oczywiście spółzmiennikiem tożsamożściowym i t. d.
O odkrytym przez Clebscha związku koneksów z równaniami różniczkowemi i o wynikającej stąd możliwości traktowania tych ostatnich według zasad algebraicznych, patrz Clebscha-Lindemanna, Odczyty o geometryi, I, 2, dział 7.

[61]) Proceed. L. M. S. XIX, s, 24—46 (1888).

[62]) „Methoden etc." II, § 18.

[63]) l. c. § 15.

[64]) Patrz uwagi Kroneckera (Berl. Ber. 1889, s. 504), który zjawisko to sprowadza do twierdzenia z dziedziny teoryi podstawień.

[65]) Berl. Berl. 1889, s. 349—362, 479—505, 603—614. Pokrewne badania Dernytsa przedstawiliśmy w rozdziale o półzmiennikach, II, D. a.

[66]) Tożsamo stosuje się zresztą do wspomnianych równań różniczkowych Forsytha jak i do nowszych wywodów równań dla wzajemników. Patrz II, C. c. β.

[67]) Inne postępowanie niesymboliczne, oparte na użyciu procesu Ω, związał Mertens bezpośrednio z równaniami różniczkowemi dla form „zredukowanych" (Wien. Ber. XCVIII, s. 691—739 1889). Najnowsze badania Hilberta przybierają coraz bardziej charakter czysto-arytmetyczny.

DOPEŁNIENIA.

Do II. C. c. *α*.

Uogólnienia.

Przekształcenia wyższe.

Na zakończenie tego rozdziału głównego, rozpatrzymy jeszcze dwa uogólnienia, z których jedno odnosi się do grup przekształceń nieliniowych, wymiernych ilości zmiennych, drugie do grupy t. z. „rozszerzonej" albo, co na jedno wychodzi, należy do teoryi „niezmienników różniczkowych".

Przekształcenia wyższe wymierne z punktu widzenia teoryi form zbadano całkowicie tylko w dziedzinie dwójkowej.

Już mówiliśmy o postaci, nadanej przekształceniu Tschirnhausowskiemu przez Hermite'a, w której nowa zmienna jest funkcyą całkowitą dawnej [1]). Gordan [2]) wykazał, że i w jaki sposób teorya niezmienników dwójkowych przekształcenia wymiernego daje się sprowadzić do teoryi łzutowej. Idzie tu tylko o niezmienniki względne, gdyż, jak łatwo widzieć, możliwość niezmiennika bezwzględnego jest tu wyłączona.

Na formie dwójkowej $f(x_1, x_2)$ wykonywa się podstawienie

$$z_1 = \varphi_m(x_1, x_2), \qquad z_2 = \psi_n(x_1, x_2)$$

w ten sposób, że tworzymy wypadkową (rugownik) F (odnośnie do x) obu form f i $z_1\psi - z_2\varphi$. Wtedy F nazywa się formą przekształconą, a zadanie sprowadza się do wyrażenia niezmienników formy F za pomocą najprostszych jednoczesnych niezmienników form f, φ, ψ; przytem można dwie ostatnie formy φ, ψ zastąpić przez ich „kombinant" [3]):

$$(1) \qquad \vartheta(x; y) = \varphi(x)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi(x).$$

Odwrotność wszakże niezawsze zachodzi: nie każdy niezmiennik jednoczesny form f, φ, ψ lub f, ϑ jest niezmiennikiem formy F; aby to miało miejsce, muszą jeszcze spełniać się pewne równania różniczkowe. Clebsch [4]) podał te równania i dowiódł zarazem, że stanowią one układ zupełny. W przypadku $m=2$ można je zcałkować.

Przekształcenia wyższe stosowano w celu nadania równaniom pewnych własności niezmienniczych [5]). W przypadkach szczególnych można, według Clebscha [6]), przekształcenia wyższe sprowadzić bezpośrednio do liniowego, jak np. przekształcenie sześcienne formy f_3. Torelli wykrył [7]) właściwe źródło tego zjawiska w pewnej tożsamości o spółczynnikach, które są spółzmiennikami liniowemi, zachodzącej pomiędzy trzema dowolnemi formami sześciennemi. Dwie nawzajem przekształcalne formy różnią się tylko czynnikiem stałym, który jest iloczynem dwóch niezmienników.

Clebsch [8]) związał przekształcenia wyższe form dwójkowych z przekształceniami liniowemi przestrzeni wielowymiarowej i nadał im, skutkiem tego, pierwszym przejrzystą interpretacyę geometryczną. Gdy mamy np. przekształcenie kwadratowe równania rzędu 5-go $f(\lambda)=0$ z pierwiastkami λ_i:

$$\xi = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3}{x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3},$$

i gdy (y), (x) przedstawiają spółrzędne dwóch punktów płaszczyzny, to pierwiastki ξ_i równania przekształconego są dane przez punkty przecięcia linii, łączącej punkty

$$z_k = y_k - \xi x_k, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

z pięciu prostemi

$$z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 = 0.$$

Te ostatnie zaś są pięcioma stycznemi stożkowej

$$z_2^2 - 4 z_1 z_3 = 0 \text{ [9])}.$$

Skąd zaś wynika wprost, dlaczego przy badaniu tych równań wystarczają przekształcenia kwadratowe. Rozmaite sposoby, jakiemi można jeszcze wybrać punkty (x), (y) na prostej (z), odpowiadają różnym przekształceniom liniowym, jakie dopuszcza jeszcze równanie przekształcone; albowiem zastąpienie tych dwóch punktów przez jakiekolwiek dwa inne punkty linii je łączącej jest równoważne podstawieniu liniowemu zmiennej ξ. Clebsch zwraca uwagę na to, że właśnie skutkiem tego elementy właściwe, tkwiące w przekształceniach wyższych, występują niezależnie od wpływu, jaki może wywrzeć jeszcze późniejsze przekształcenie liniowe. Ujawnia się też tu cała oczywistość twierdzenia Gordana, że niezmienniki równania przekształconego zależą tylko od kombinantów form φ i ψ. Dla równań rzędu szóstego [10]) i siódmego wystarczą podobne przekształcenia sześcienne, do których interpretacyi trzeba wziąć krzywą sześcienną w przestrzeni.

Jako zastosowanie opisanej zasady Clebsch rozwinął całkowicie przejrzysty przegląd związków, zachodzących pomiędzy równaniami rzędu

piątego i ich rozwiązującemi, a w szczególności z formą Jerrarda i równaniem modułowem.

Niedawno ukazała się praca Maurera [11]) o przekształceniach wyższych jednoznacznych w dziedzinie n zmiennych; celem jej jest ustanowienie równań różniczkowych dla istniejących wtedy niezmienników obok nowych n^2 równań różniczkowych Aronholda. Autor wychodzi z uwagi, że dotąd z punktu widzenia teoryi niezmienników badano tylko w pojedyńczych przypadkach [12]) takie własności form specyalnych, które mają swą podstawę w związkach (algebraicznych), zachodzących pomiędzy spółczynnikami. Dzieli on formy oznaczonego rzędu p o n zmiennych x na klasy: ogół form tworzy klasę Ω_0; te formy zaś, których spółczynniki należą do oznaczonego (nieprzywiedlnego) układu równań algebraicznych, stanowią klasę Ω_1. Jeżeli spółczynniki czynią zadość dalszemu takiemu układowi równań algebraicznych, to z klasy Ω_1 wydziela się klasa Ω_2 i t. d. Pozorna dowolność tego podziału na klasy znika, jeżeli, celem dojścia do niezmienników, wykonywamy przekształcenia, tworzące „grupę“. Pomyślmy w samej rzeczy, że przy pomocy równań, charakteryzujących klasę Ω_i, wyraziliśmy niektóre z pomiędzy spółczynników formy jako funkcye jednorodne algebraiczne t pozostałych, za zupełnie dowolnie uważanych wielkości $u_1, u_2, \ldots, u_t$; formę oznaczymy przeto przez $f(x, u)$. Poddajmy oba szeregi zmiennych x, u pasmu przekształceń

$$(\mathrm{S}) \qquad x_i = \varphi_i(y|p), \quad u_k = \psi_k(v|p)$$

następującej natury: Funkcye φ są funkcyami wymiernemi [13]) jednorodnemi zmiennych x, w których zachodzi algebraicznie m parametrów p; funkcye ψ są funkcyami algebraicznemi ilości v, p, jednorodnemi względem v. Równania (S) mają tworzyć prócz tego „grupę“ przekształceń, zawierających przekształcenie tożsamościowe; odwrócenie ma znowu tedy prowadzić do równań tej samej natury: $y = \varphi'(x|p')$, $v = \psi'(v|p')$, gdzie parametry nowe p' zależą algebraicznie od parametrów dawnych p. Jeżeli jest rzeczą możliwą, aby dla wszystkich wartości parametrów p forma $f(x, u)$ przekształcała się na $f(y, v)$, to grupa (S) nazywa się „przyporządkowaną“ do klasy Ω_i. I odwrotnie, takie układy grup (S) istnieją; te wszystkie [14]) układy prowadzą do zupełnie oznaczonego podziału na klasy Ω_i, a także do jednego i tego samego układu niezmienników klasy Ω_i.

Dowód polega na wspomnianem już twierdzeniu Christoffela [15]), według którego — prócz pewnych przypadków wyjątkowych — równoważność cechuje się równością niezmienników bezwzględnych, następnie na zasadach teoryi grup Liego, które należy tylko w pewien sposób zmodyfikować, a to ze względu na właściwość używanych tu przekształceń. Autor dochodzi na tej drodze do wyniku, że n funkcyj φ', t funkcyj ψ'

i sama funkcya f czynią zadość m równaniom różniczkowym charakterystycznym. Równania te są postaci:

$$(\mathrm{D}_1) \qquad \sum^{m} Q_i \frac{\partial \varphi'}{\partial p_i} - \sum_1^{n} X_k \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} = 0,$$

$$(\mathrm{D}_2) \qquad \sum_1^{m} Q_i \frac{\partial \psi'}{\partial p_i} - \sum_1^{t} U_i \frac{\partial \psi'}{\partial u_i} = 0,$$

$$(\mathrm{E}) \qquad \sum_1^{n} X_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^{t} U_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,$$

gdzie ilości Q zależą wyłącznie od parametrów p, ilości U od zmiennych u, wreszcie ilości X tylko od ilości x. Niezmienniki J klasy form są określone za pomocą m równań różniczkowych:

$$(\mathrm{J}) \qquad \sum_1^{t} U_i \frac{\partial J}{\partial u_i} = 0.$$

Jeżeli m' jest liczbą równań różniczkowych istotnie różnych, to klasa form posiada $t-m'$ niezmienników wzajemnie niezależnych. Każde rozwiązanie równań (E), różne od $f(x, u)$, jest spółzmiennikiem formy f. Z własności przekształceń (S) wynika, że cztery układy (D_1), (D_2), (E), (J) są „zupełnemi“. Że podział form f na klasy odbywa się w sposób oznaczony, poznajemy w ten sposób: Niechaj forma $f(x, u)$ klasy Ω_i przechodzi na formę klasy Ω_{i+1} przez poddanie ilości u układowi nieprzywiedlnemu równań

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \Pi_\nu = 0.$$

Niechaj klasa Ω_{i+1} będzie ustalona w ten sposób, że przez przekształcenie, przyporządkowane do klasy Ω_i, każda forma klasy Ω_{i+1} przechodzi na inną formę tejże klasy. Stąd można wyprowadzić, że i funkcye Π czynią zadość równaniom różniczkowym (D_2) dla funkcyj ψ'. Z równań różniczkowych (E), którym czyni zadość ogólna forma klasy Ω_i, wynika tym sposobem zupełnie analogiczny układ równań, którym czyni zadość forma klasy Ω_{i+1} i tożsamo stosuje się do równań różniczkowych dla niezmienników. Równania różniczkowe Aronholda w liczbie n^2 dla form ogólnych klasy Ω_0 utrzymują się tedy co do istotnego swego charakteru dla klas następnych; tylko w przypadkach szczególnych [16]) dla ostatnich klas występują jeszcze dalsze równania różniczkowe.

Do II *C. c. β.*

Niezmienniki rozszerzonej grupy rzutowej. [17])

Wzajemniki i niezmienniki różniczkowe.

Teoryę „wzajemników“ uzasadnił Sylvester [18]) w r. 1885; on sam oraz jego przyjaciele i uczniowie: Hammond, Mac-Mahon, Leudesdorf, Eliott, Forsyth, Rogers, Berry, a także Perrin rozwinęli ją następnie. Ważną część tej nauki [19]), t. j. naukę o niezmiennikach różniczkowych podjął już był z powodzeniem w 1878 i 1880 Halphen [20]); z drugiej zaś strony dalej sięgające badania Liego [21]) traktują ten przedmiot w takiej ogólności, że szereg twierdzeń i metod wyżej wymienionych autorów wypływa jako przypadek szczególny z tej ogólnej teoryi Liego. Nie zmniejsza to wszakże bynajmniej zasługi jego poprzedników, którzy systematycznie opracowywali takież zjawiska ogólne dla najważniejszego przypadku funkcyj całkowitych ze stanowiska teoryi niezmienników i umożliwili przez to badania geometryczno-rzutowe krzywych i powierzchni. Winniśmy jeszcze dodać, że postęp istotnej nauki byłby bezporównania szybszy, gdyby Halphen i badacze angielscy więcej uwzględniali głębokie pomysły Liego, ten ostatni zaś więcej poświęcił był uwagi tamtym teoryom specyalnym [22]). Sylvester wychodzi z uważania prostej własności tak nazwanego „wyrażenia Schwarza“ (szwarzyanu) [23]):

$$(y, x) = \frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = \frac{2y_1y_3 - 3y_2^2}{2y_1^2}$$

gdzie y_1, y_2, y_3 oznaczają pochodne pierwszą, drugą i trzecią względem x zmiennej zależnej y. Jeżeli przestawimy tu y i x, to wyrażenie (y, x)—pomijając potęgę całkowitą ilości y_1 oraz znak—przechodzi na wyrażenie „wzajemne“ (x, y) tożsamo stosuje się także do licznika $y_1y_3-y_2^2$. Takie funkcye wymierne ilości $y_1, y_2, y_3, \ldots$, które po przestawieniu ilości y i x, zmieniają się tylko o czynnik wymierny tych samych elementów, są „wzajemnikami“ dwójkowemi najprostszemi. Jeżeli ograniczymy się przytem do funkcyj całkowitych wymiernych albo do form F ilości $y_1, y_2, y_3, \ldots$, to łatwo okazać, że przybywający czynnik ma postać $\pm y_1^\mu$, gdzie μ jest liczbą całkowitą. Stosownie do znaku tego czynnika, wzajemniki dzielą się na dwie klasy: „charakteru“ parzystego i nieparzystego; μ nazywa się „charakterystyką“. Dla $\mu=0$ mamy wzajemnik „bezwzględny“.

Jeżeli, prócz tego, forma F jest jednorodną co do swych elementów, to wynika stąd samo przez się, że jest izobaryczną, przyczem jest rzeczą dogodną nadać ilościom $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$ wagi: $-1, 0, +1, +2 \ldots\ldots$ Jeżeli i jest stopień, w — waga formy F, to μ musi mieć wartość $3i+w$.

Ponieważ formy F nie zawierają wyraźnie zmiennych x, y, to, jak łatwo widzieć, i przy podstawieniach „grupy przesunięć“ $x'=x+a$, $y'=y+b$ zmieniają się tylko o czynnik, zależący liniowo od y_1. Jeżeli skombinujemy dwa twierdzenia, mianowicie, że wzajemnik przez różniczkowanie względem x przechodzi na wzajemnik (tego samego charakteru) i że jakikolwiek wzajemnik przez podzielenie przez $t^{\frac{\mu}{2}}$ staje się „bezwzględnym“, to pozyskamy operator różniczkowy liniowy ξ, który pozwala z danej formy F otrzymać nieskończony szereg takich samych form dalszych.

Następuje teraz przejście do obszerniejszej grupy podstawień liniowych, mianowicie do grupy podstawień „ortogonalnych“. Zachodzi wtedy piękne twierdzenie: „Jeżeli F i $\frac{\partial F}{\partial y}$ są wzajemnikami, to F jest wzajemnikiem ortogonalnym“. Najprostszą taką formą jest strona lewa równania różniczkowego koła. Jeszcze ważniejszym jest krok następny do grupy „powinowatej“

$$x' = ax + by + c, \qquad y = dx + ey + f.$$

Za pomocą zestawienia tej grupy z pojedyńczych podstawień zasadniczych dowodzi się, że wzajemnik po za jednorodnością i izobaryzmem, powinien być tylko niezależny jeszcze od y, aby pozostał niezmiennym w odniesieniu do grupy. Takie wzajemniki „powinowate“ nazywają się „czystemi“, w przeciwstawieniu do mieszanych, zawierających także i y_1.

Czyste wzajemniki R mają uderzające podobieństwo do półzmienników (porów. II D. a), jakkolwiek bliższe badanie wykrywa i pojedyńcze uderzające różnice. Oba rodzaje wielkości czynią zadość charakterystycznym równaniom różniczkowym analogicznej budowy. Dla obu istnieje analogiczny „generator“, który tu przetwarza półzmienniki na półzmienniki, tam zaś czyste wzajemniki na czyste wzajemniki. Wzorowi liczącemu Cayley'a $(w:i,j)-(w-1:i,j)$ [24]) na liczbę źródeł liniowo-niezależnych stopnia i i wagi w formy zasadniczej rzędu j odpowiada dla wzajemników czystych wzór $(w:i,j)-(w-1:i+1,j)$, jeżeli R zależy od pochodnych $y_2, y_3, \ldots, y_{j+2}$. Do tej pory nie znaleziono wystarczającego dowodu na ten wzór ostatni.

Dla obu rodzajów utworów niezmienniczych można utworzyć podobne układy stowarzyszone lub „protomorfy“, t. j. takie najprostsze układy, że każdy następny (przy nieograniczonej liczbie liter),—jeżeli pominiemy całkowitą potęgę pierwszej litery w mianowniku—jest ich funkcyą całkowitą wy-

mierną. Gdy jednak dla półzmienników istnieją protomorfy kolejno stopnia drugiego i trzeciego, to stopień ich dla czystych wzajemników może być dowolnie wysoki. Inne jeszcze głębsze różnice są następujące: Jeżeli niezmiennik całkowity wymierny rozkłada się na czynniki wymierne, to te ostatnie mają też własność niezmienniczą: do wzajemników w ogóle własność ta nie stosuje się. Dla oznaczonego stopnia i nieograniczonej liczby liter, liczba wzajemników czystych jest skończona, gdy tymczasem odpowiedni szereg niezmienników nie przerywa się. Stąd i „funkcye tworzące“ obustronne, mimo podobnej budowy, wykazują głębokie różnice.

Wielce interesujące wyniki otrzymujemy, wznosząc się wreszcie do ogólnej klasy „wzajemników rzutowych“, należących do ogólnej grupy kolinernej:

$$x' = \frac{ax+by+c}{gx+hy+k}; \qquad y' = \frac{dx+ey+f}{gx+hy+k}.$$

Są to „niezmienniki różniczkowe“ odnośnie do zmiennej x; podstawę ich nauki założył Halphen [25]).

Według Sylvestera taki niezmiennik różniczkowy można wprost scharakteryzować w ten sposób, że jest to forma ilości $y_2, y_3, y_4, \ldots$, jednocząca w sobie własność wzajemnika z własnością zwykłego półzmiennika. Płodność tego związku ujawnia się wyraźnie, gdy mamy uczynić istotny przegląd układu równań różniczkowych. Istnieje mianowicie łańcuch czystych wzajemników $A, B, C, D, \ldots$, dający się przedstawić według prostego wyraźnego prawa i prowadzący bezpośrednio do tworzenia wszystkich niezmienników różniczkowych — dość w tym celu $A, B, C, D, \ldots$ uważać za spółczynniki formy dwójkowej (kolejno wznoszącego się rzędu) i utworzyć odnośną protomorfę dla półzmienników; jakakolwiek funkcya całkowita wymierna tej protomorfy, podzielona przez odpowiednią potęgę ilości y_2, daje niezmiennik różniczkowy; i odwrotnie. Zamiast łańcucha ilości $A, B, C, D, \ldots$ można wziąć wprost za podstawę podobny łańcuch półzmienników względem ilości $y_2, y_3, y_4, \ldots$ Jeżeli dołączymy do tego jeszcze własność szczególną niezmiennika różniczkowego wymiernego stopnia i rzędu zero, mianowicie, że przez różniczkowanie względem x wytwarza wyrażenie tego samego rodzaju, to łatwo już będzie można zrozumieć, że na tej drodze systematycznej da się przeprowadzić w sposób naturalny zupełne całkowanie przyrównanych do zera niezmienników różniczkowych; u Halphena zaś rozwiązanie tych ważnych dla geometryi zagadnień odbywa się przez stosowanie pośrednich metod całkowania [26]).

Pozostaje nam jeszcze przedstawić ważniejsze przyczynki i rozwinięcia tej teoryi, które zawdzięczamy wspomnianym już spółpracownikom Sylvestera[27]). Jest zasługą MacMahona uporządkowanie sprawiającej zamieszanie rozmaitości liniowo-cząstkowych różniczkowań, przenikających naukę o niezmiennikach dwójkowych i o wzajemnikach. Jedyny proces tego rodzaju, w którym zachodzą cztery dowolne liczby całkowite, obejmuje przy odpowiedniem ich specyalizowaniu znane operatory[28]) Jeszcze ważniejszem jest stwierdzenie, że ta czterokrotna rozmaitość procesów stanowi układ zupełny o tyle, o ile wykonanie działania klamrowego Poissona na dwóch z pomiędzy tych procesów prowadzi zawsze do procesu, należącego do układu. Perrin[29]) przeniósł swoją teoryę reszt prawie wprost z półzmienników na wzajemniki. Jeżeli mamy przeto szereg form wzajemnikowych, zawierających każda wyrażenie y_n jako pochodną najwyższą, i jeżeli tę pochodną uważać będziemy za zmienną dwójkową, to każdy półzmiennik szeregu będzie również wzajemnikiem. Rozszerzenie teoryi Sylvestera na n zmiennych, (z których jedna uważa się za zależną) przeprowadził Elliott[30]) dla przypadku niezmienności przy kołowej przemianie zmiennych; w szczególności zaś zbudował on układ zupełny równań różniczkowych charakterystycznych przy trzech zmiennych. Dalej rozważał Elliott[31]) wzajemniki ogólnej grupy liniowej o trzech zmiennych, Forsyth[32]) zaś zbadał przypadek, w którym tylko dwie zmienne zależne są poddane ogólnemu przekształceniu liniowemu, Hammond[33]) zbadał niektóre całkowalne wzajemniki i ich zastosowania w geometryi.

MacMahon[34]) za pomocą prostej funkcyi tworzącej wyznaczył dla pierwszych sześciu stopni liczby wzajemników czystych (perpetuantów), t. j. takich wzajemników, które nie dają się przedstawić jako funkcye liniowe całkowite innych wzajemników niższego stopnia i rzędu, ale o nieograniczonej liczbie liter. Leudesdorf[35]), oprócz nowych dowodów twierdzeń Sylvestera, podał zupełne kryteryum na to, aby dana funkcya ilości $y_1, y_2, \ldots$ była wzajemnikiem (mieszanym) oraz tablicę odnośnych protomorf.

Godne uwagi uogólnienie pojęcia wzajemnika zawdzięczamy Rogersowi[36]). Wiadomo, że pokrewieństwo jedno-jednoznaczne pomiędzy dwiema parami zmiennych (x, y) i (x', y') można sprowadzić do dwóch podstawień niekongruentnych liniowo-ułamkowych oddzielonych zmiennych x i y Rogers pokazał, w jaki sposób tworzymy niezmienniki różniczkowe takiego przekształcenia. W szczególności otrzymuje on niezmienniki różniczkowe przekształcenia za pomocą promieni odwrotnych. Berry[37]) badał wzajemniki spółczesne (odnoszące się do większej liczby szeregów ilości zmiennych). Ułatwienie w tym razie (jak u Elliotta przy utworach trójkowych) stanowi przyjęcie za podstawę takich wzajemników, które wyraźne zawierają zmienne.

Forsyth[38]), nawiązując badania swoje do prac Rogersa „o wzajemnikach homograficznych", szukał układu zupełnego dla tych ostatnich.

Osiągnął on swój cel za pomocą podstawienia liniowo-ułamkowego dla każdej zmiennej, a następnie przez skombinowanie obustronnych wyników.

Ważną dla teoryi równań różniczkowych liniowych jest szczególnie klasa wzajemników zwanych „pochodnemi ilorazowemi" [39]). Jeżeli przez y rozumiemy iloraz dwóch rozwiązań szczególnych u_1, u_2 równania różniczkowego liniowego n-tego rzędu i jeżeli zróżniczkujemy $2n-1$ razy równanie $yu_1=u_2$, to przez wyrugowanie pochodnych ilości u_2 otrzymamy układ n związków liniowych jednorodnych względem $u_1, u'_1, \ldots, u_1^{(n-1)}$. Wypadkowa tego układu nazywa się „pochodną ilorazową" i zachowuje się niezmiennie względem podstawienia

$$X = \frac{ex+f}{gx+h}, \quad Y = \frac{ay+b}{cy+d},$$

gdyż zmienia się tylko o czynnik $\left(\frac{dY}{dy}\right)^n \left(\frac{dX}{dx}\right)^{-n^2}$. Tak np. z równania $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ wynika wzajemnik Schwarza $3y_2^2-2y_1y_3$. Rozległe rozwinięcie tego przedmiotu, t. j. „teoryi niezmienników równań różniczkowych liniowych" dał Forsyth w innej pracy[40]). Jeżeli mamy układ takich równań, to poddajemy go podstawieniom, nie zmieniającym rzędu i charakteru liniowego, t. j. przekształceniu liniowemu zmiennej zależnej oraz przekształceniu dowolnemu zmiennej niezależnej x. Można wtedy szukać funkcyj całkowitych (i w ogóle algebraicznych) ilości y i jej pochodnych oraz spółczynników, które, utworzone dla układu równań przekształconych, zmieniają się tylko o czynnik (potęgę ilości $\frac{dX}{dx}$). Forsyth stwierdza, że układ (set) tych funkcyj jest w znaczeniu szerszem układem zupełnym, gdyż z ograniczonej liczby funkcyj powstają inne za pomocą procesów czysto-algebraicznych. Przypadki szczególne tych funkcyj napotkali Cocle, Laguerre, Brioschi, Malet i Halphen[41]).

Do II C c. γ.

Niezmienniki różniczkowe rzutowe, występujące w teoryi krzywizny.

Mało badano dotychczas teoryę rzutową własności krzywiznowych powierzchni. Po za rozproszonemi uwagami, jakie znajdujemy w wielkiem dziele Darboux'a[42]); niektórych twierdzeń, wyprowadzonych metodą Grassmannowską przez Mehmkego[43]), pojedyńczych zastosowań nauki o wzajemnikach, poczynionych przez Sylvestera i jego uczniów[44]), mamy tu tylko do zanotowania obszerną pracę Vossa[45]) z najnowszego czasu.

Pogląd rzutowy na własności metryczne powierzchni otrzymamy, jeżeli jej cechę, że cztery punkty powierzchni, nie leżą na jednej płaszczyźnie, skombinujemy z faktem, że objętość czworościanu przy dowolnej kolineacyi zmienia się tylko o czynnik, łatwo spostrzedz się dający. Jeżeli obierzemy na powierzchni układ spółrzędnych krzywokreślnych u, v, to dwie sąsiednie linie u_0, u_0+h; v_0, v_0+k przecinają się w czterech wierzchołkach P, P_1, P_2, P_3 czworościanu T. Niechaj P oznacza punkt (u_0, v_0), P_3 punkt (u_0+h, v_0+k). Niechaj punkt P_3 posuwa się ku punktowi P_3 (na powierzchni) wzdłuż krzywej analitycznej o parametrze t:

$$u = u_0 + h' t + \dots \; ; \quad v = v_0 + k' t + \dots .$$

Jeżeli objętość T podzielimy przez kwadrat powierzchni Ω równoległoboku, oznaczonego przez wierzchołki P, P_1, P_3, otrzymamy w pierwszem przybliżeniu wyrażenie bardzo proste, mianowicie:

$$\lim_{t=0} \frac{T}{\Omega^2} = \frac{1}{6} \frac{F}{\sqrt{H}} ;$$

H jest tu wyróżnikiem $eg-f^2$ kwadratu elementu liniowego

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2;$$

F jest drugą z tak nazwanych „wielkości zasadniczych 2-go rzędu“ E, F, G. Powyższa granica nie ma jeszcze w ogóle związku ze stosunkami krzywiznowemi powierzchni. Ale inaczej rzecz się ma, jeżeli przejdziemy do układów wyróżnionych u, v. Jeżeli np. pasmo krzywych u, v jest utworzone przez krzywe asymptotyczne (Hauptangentencurven) i jeżeli K oznacza miarę krzywizny powierzchni w punkcie P, iloraz $\frac{F}{\sqrt{H}}$ zamienia się wprost na $\sqrt{-K}$. Jeszcze ciekawsze wyniki otrzymujemy dla układu „sprzężonego“ ilości u, v, dla którego F znika tożsamościowo, co w dalszym ciągu przyjmujemy. Aby dojść teraz do wyznaczenia granicy, podzielmy $\frac{T}{\Omega^2}$ przez kwadrat elementu liniowego $S = \overline{PP_3}$, wtedy:

$$\lim_{t=0} \frac{T}{\Omega^2 S^2} = \frac{1}{72\sqrt{H}} \frac{E\alpha k'^2 + G\beta k'^2}{eh'^2 + 2fh'k' + gk'^2},$$

gdzie α, β [46]) zależą tylko od e, f, g, a więc zachowują się niezmiennie przy zginaniu powierzchni. Właśnie wyrażenia te α, β pozostają niezmiennemi przy jakiejkolwiek kolineacyi powierzchni (odniesionej do układu krzywych spółrzędnych sprzężonych), są więc w tem pojmowaniu niezmiennikami bezwzględnemi rzutowemi. Wtedy i tylko wtedy, gdy one zlewają się ze sobą

powyższa wartość graniczna, t. j. „krzywizna parametrowa“ zlewa się z „krzywizną normalną“ (w kierunku PP_3). Ta okoliczność pobudziła V o s s a do systematycznego badania najważniejszych wielkości krzywiznowych co do ich niezmienniczości rzutowej. Niechaj x, y, z będą spółrzędne pierwotne kartezyańskie punktu P powierzchni; x', y', z' — spółrzędne liniowo przekształcone; $t = t\,(x, y, z)$ — wspólny mianownik tych ostatnich; D — wyznacznik podstawienia. Wtedy trzy wielkości zasadnicze 2-go rzędu odtwarzają się, przybierając ten sam czynnik, mianowicie:

$$E' = \frac{\lambda}{t} E, \quad F' = \frac{\lambda}{t} F, \quad G' = \frac{\lambda}{t} G,$$

gdzie λ oznacza proste wyrażenie algebraiczne, zależne tylko od spółczynników podstawienia i od dostaw kierunkowych normalnej w punkcie P (a więc tylko od „pierwszych pochodnych“ powierzchni). Podobnież otrzymujemy:

$$H' = H \frac{D^2}{\lambda^2 t^6},$$

a stąd dla miary krzywizny K:

$$K' = K \frac{(\lambda t)^4}{D^2} .$$

Z tych równań wynikają liczne zastosowania geometryczne; bezpośrednio zaś mamy twierdzenie, podane przez M e h m k e g o [47]): „Jeżeli dwie powierzchnie dotykają się w pewnym punkcie, to iloraz ich miar krzywiznowych w tym punkcie jest niezmiennikiem bezwzględnym rzutowym.“ Ze związku dla K wyprowadził w szczególności V o s s rezultat następujący: „Dla każdej kolineacyi (z wyłączeniem „powinowatej“) istnieją powierzchnie takie, że przy wykonaniu kolineacyi powierzchnia dana przechodzi w ten sposób na inną, iż miara krzywiznowa w odpowiednich punktach zmienia się tylko o czynnik stały“. V o s s wypisuje równania tych powierzchni.

Do II C. c. δ.

Przekształcenia wyższe form różniczkowych w teoryi powierzchni. Parametry różniczkowe.

Teorya powierzchni jest podległa przekształceniom pewnych dwójkowych form różniczkowych [48]). Na pierwszem miejscu stają tu dwie takie formy kwadratowe; kwadrat elementu liniowego powierzchni

$$A = ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

i wielkość A podzielona przez promień krzywizny ϱ, t. j.

$$B = \frac{ds^2}{\varrho} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Powierzchnia jest wtedy odniesiona do układu spółrzędnych krzywokreślnych (u, v). Sześć wielkości e, f, g; E, F, G, t. j. wielkości zasadnicze 1-go i 2-go rzędu" są związane ze sobą trzema „równaniami zasadniczemi". Przekształcenie polega na przejściu od układu pierwotnego u, v do nowego u', v' w ten sposób, że te u', v' uważamy za funkcye jednoznaczne i jednoznacznie odwracalne, zresztą d o w o l n e [49]) ilości u, v. Jeżeli położymy:

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = \beta, \quad \frac{\partial v'}{\partial u} = \gamma, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = \delta,$$

$$du = \xi, \quad dv = \eta, \quad du' = \xi', \quad dv' = \eta',$$

to ξ, η przekształcają się l i n i o w o na ξ', η' w ten sposób, że

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad \eta' = \gamma\xi + \delta\eta;$$

odwrócenie zaś tych wzorów daje bezpośrednio:

$$\frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\,\delta, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\,\beta, \quad \frac{\partial u}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\,\gamma, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}\,\alpha,$$

$$\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\,\frac{\partial u}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}.$$

Jeżeli przez podane przekształcenie jakakolwiek forma dwójkowa różniczkowa $A = a_{11}\,du^2 + 2\,a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$ przechodzi na odpowiednią $A' = a'_{11}\,du'^2 + 2\,a'_{12}\,du'\,dv' + a'_{22}\,dv'^2$, to podobnie rzecz ma się z formą dwuliniową:

$$A_1 = a_{11}\,du\,\delta u + a_{12}\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + a_{22}\,dv\,\delta v.$$

T u du, dv jak i δu, δv n i e p o t r z e b u j ą b y ć k o n i e c z n i e r ó ż n i c z k a m i; w y s t a r c z a, j e ż e l i s ą w i e l k o ś c i a m i s p ó ł p o d s t a w i e n i o w e m i z i l o ś c i a m i ξ, η. Z tej uwagi, podobnie jak w algebraicznej teoryi niezmienników, wynika ważne zastosowanie co do pocho-

dnych funkcyi. Jeżeli mianowicie $\chi(u, v)$ jest funkcyą dowolną ilości u, v; $\overline{\chi}(u', v')$ funkcyą przekształconą, to z łatwością dochodzimy do związków:

$$\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial\chi}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial\chi}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial\chi}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial\chi}{\partial v}\,\frac{\partial u'}{\partial u}.$$

Ponieważ wyróżnik $a = a_{11}a_{22} - a^2_{22}$ ilości A jest niezmiennikiem względnym, stąd zaś

$$a = \Delta^2 a', \qquad \sqrt{a} = \Delta\sqrt{a'},$$

widzimy przeto odrazu, że wielkości $\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial\chi}{\partial v}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial\chi}{\partial u}$ są s p ó ł p o d s t a w i e n i o w e m i z ξ, η, t. j. mogą być podstawione zamiast δu, δv w tożsamości $A_1 = A'_1$, przez co ta ostatnia przyjmuje postać:

$$Udu + Vdv = U'du' + V'dv'$$

tak, że strona lewa jest s p ó ł z m i e n n i k i e m l i n i o w y m ilości A. Stąd przy pomocy prostego różniczkowania wynika istnienie niezmiennika:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

a przez podstawienie istotnych wartości niezmiennika:

$$\Delta_a{}^2(\chi) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}\,\frac{d\chi}{\partial u} - a_{12}\,\frac{\partial\chi}{\partial v}}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_{11}\,\frac{\partial\chi}{\partial v} - a_{12}\,\frac{\partial\chi}{\partial u}}{\sqrt{a}}\right)\right\}.$$

Gdybyśmy w formie liniowej $Udu + Vdv$ zamiast du, dv podstawili utworzone dla drugiej funkcyi dowolnej $\omega(u, v)$, podobnie jak dla χ utworzone, wartości $\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial\omega}{\partial v}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial\omega}{\partial u}$, otrzymalibyśmy niezmiennik $\Delta_a(\chi, \omega)$, mianowicie:

$$\Delta_a(\chi, \omega) = \frac{1}{a}\left\{a_{11}\,\frac{\partial\chi}{\partial v}\,\frac{\partial\omega}{\partial v} - a_{12}\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\,\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\chi}{\partial u}\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) + a_{22}\,\frac{\partial\chi}{\partial u}\,\frac{\partial\omega}{\partial u}\right\},$$

z którego, gdy χ i ω zlewają się, wynika specyalniejszy niezmiennik $\Delta'_a(\chi)$.

Jeżeli zamiast A napiszemy tu formę

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

przez co trzy niezmienniki $\Delta_a^1(\chi)$, $\Delta_a^2(\chi_1)$ $\Delta_a(\chi\ \omega)$ niechaj przechodzą na $\Delta^1(\chi)$, $\Delta^2(\chi)$, $\Delta(\chi, \omega)$, to te ostatnie będą właśnie „parametrami różniczkowemi 1-go i 2-go rzędu ilości χ“ oraz „parametrami pośredniemi“ ilości χ i ω, przez Beltrami'ego z takiem powodzeniem wprowadzonemi do nauki.

Funkcya Δ^2 pozwala wniknąć głębiej w istotę niezmienniczą miary krzywiznowej Gaussa K. Jeżeli n jest mnożnikiem formy A, tak że

$$n\,A = dp\,dq,$$

to K zlewa się z wyrażeniem $\frac{1}{2}\Delta^2 \log n$.

Inne wyniki tego samego rodzaju otrzymujemy przez jednoczesne przekształcenie dwóch form różniczkowych, takich jak A i B:

$$A = edu^2 + 2fdu\,dv + gdv; \quad B = Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2.$$

Algebra daje odrazu dwa niezmienniki bezwzględne, mianowicie:

$$H = \frac{eG - 2fF + Eg}{eg - f^2}, \quad K = \frac{\varepsilon G - F^2}{eg - f^2},$$

H oznacza tu średnią arytmetyczną dwóch miar krzywiznowych, K ich iloczyn, t. j.

$$H = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}, \quad K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}.$$

Jeżeli utworzymy jeszcze wyznacznik funkcyjny ilości A, B i podzielimy go przez $4\sqrt{a} = 4\sqrt{eg - f^2}$, to dojdziemy do „formy linij krzywiznowych“ Γ. Z algebry otrzymujemy:

$$\Gamma^2 = -KA^2 + HAB - B^2.$$

Nakoniec kwadrat elementu liniowego $d\sigma$ na kuli Gaussowskiej przedstawia się jako spółzmiennik form A, B, mianowicie:

$$ds^2 = -KA + HB.$$

Dla uzupełnienia znaczenia geometrycznego tych wzorów, dodajmy jeszcze, że forma dwuliniowa $A_1 = \Sigma\, dx\, \delta x$ przedstawia iloczyn dwóch elementów liniowych ds, δs przez dostawę kąta pomiędzy niemi zawartego. Nakoniec mamy:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,dv + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v$$
$$= dr\,\delta s\left(\frac{\cos\psi\cos\psi^1}{\varrho_1} + \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\varrho_2}\right),$$

gdzie ψ, ψ' są kąty, jakie elementy ds, δs tworzą z jedną z przechodzących przez ich punkt przecięcia stycznych głównych.

PRZYPISY.

[1]) Dodajmy, że Brioschi, nawiązując rzecz bezpośrednio do badań Hermite'a, otrzymał równania różniczkowe, którym czynić mają zadość spółczynniki równania przekształconego (Att. Ist. Lomb. I. s. 231, 1858) Twierdzenie Hermite'a wyraził później w dobitniejszej postaci Klein, odniósłszy przekształcenie Tschirnhausenowskie do „typowego“ układu spółrzędnych (Vorlesungen über d. Ikosaeder, 1884, dział II, rozdz. II, §§ 5, 5) Wspomnijmy o jednem jeszcze zastosowaniu przekształcenia wyższego. Jeżeli $f_1(x, 1)$ jest formą dwójkową, napisaną w postaci niejednorodnej, to przez podstawienie $z = \frac{g(x, 1)}{f(x, 1)}$ przechodzi f na formę $F_n(z, 1)$, której spółczynniki są wszystkie niezmiennikami, w założeniu, że g jest spółzmiennikiem rzędu n--2 (Hermite C. R. 1861, por, Rahts, Math. Ann. XXVIII s. 34—60, 1866. Bruno-Walter s. 191 rozszerzają to twierdzenie, zakładając, że f jest spółzmiennikiem rzędu n-tego. Junker (Diss. Freiburg 1887) dowiódł, że ostatnie twierdzenie podlega pewnym ograniczeniom. Brioschi w szeregu artykułów, znów nawiązanych do badań Hermite'a, wykazał, jak prostym sposobem dają się przedstawić przekształcone niezmienniki przy podstawieniu pierwiastka formy pierwotnej. Math. Ann, XXIX, s. 327—330 (1887); Annali di Mat. (2) XVI, s. 181—189, 329—334 (1888): London M. S. Proc. XX, s. 127—131 (1889). Rend. Acc. Lin. (5), IV s. 363—369 (1865).

[2]) Journ. f. Math. LXXI, s. 164—194 (1870).

[3]) Funkcya $\vartheta(x, y)$ jest tem, czem wprowadzona później przez Gordana „funkcya tworząca“ R kombinantów φ i ψ (porów. II D. b.). Już i tu występuje rozwinięcie tworzącej R według „spółzmienników elementarnych“. Przykład wyrachowany, mianowicie przekształcenie kwadratowe formy dwukwadratowej, znajdujemy u Cayleya, Math. Ann. III s. 359—361 (1871).

[4]) Gött. Abh. XV, s. 65—99 (1870).

[5]) W szczególności, według postępowania Hermite'a, na podstawie przekształcenia wyższego formę typową uczynimy „typową“ o spółczynnikach, które są niezmiennikami. Nie zbadano dotąd w ogólności, jakim wtedy warunkom czynić muszą zadość przekształcenia.

[6]) l. c.

[7]) Atti. dell'Acc. P. Nap. XVIII, s 215—225 (1880). Pal. Rend. II, s. 165—171 (1888)

[8]) Gött. Nach. 1871, s. 335—345; Math. Ann. IV, s. 284—345 (1871) Co do równań rzędu 5-go patrz przedstawienie u Clebscha-Lindemanna II. 1, dział 3, N. XI.

[9]) Można stąd odczytać wprost działanie tego przekształcenia kwadratowego, powstającego z poprzedniego przez zamianę ilości ξ i λ. Niechaj $F(\xi) = 0$ będzie danem

równaniem rzędu 5-go: pięć pierwiastków ξ_i tego równania przedstawia pięć punktów $(y)-\xi_1(x)$ prostej (y) (x). Jeżeli z tych punktów poprowadzimy pięć możliwych stycznych do stożkowej

$$z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda^2{}_r z_3 \qquad (r = 1, 2. \ldots, 10),$$

to 10 argumentów λ da nam pierwiastki równania przekształconego. Utwory niezmiennicze formy przekształconej są jednoczesno-niezmiennicze dla trzech form

$$F(\xi), \quad x_1 + \xi x_2 + \xi^2 x_3, \quad y_1 + \xi y_2 + \xi^2 y_3.$$

Szereg wzorów wyrażnych tej postaci podał S p o t t i s w o o d e (Rom. Acc. Linc. (3), VII s. 218—223, 188?; Lond. Proc. XVI, s. 148—171, 1885). P i t a r e l l i dał dowód ich zupełny przy pomocy rachunku symbolicznego (Rom. Acc. L. Rend (4), I, s. 327—3 1, 374—381, 1885).

10) Byłoby do życzenia przeprowadzić podobne badanie dla równań rzędu 6-go i 7-go tak mianowicie, aby wyraźnie ujawnić zależności grupowe.

11) Journ. f. Math, CVII, s. 89—116 (1890). Zwracamy uwagę na to, że przekształcenia, stosowane przez M a u r e r a, muszą zawierać j e d e n parametr dowolny. Zresztą praca ta jest uogólnieniem badań tegoż autora, wspomnianych tu na końcu Części I-ej. O teoryi algebraiczno-geometrycznej przekształcenia jednoznacznego dwu zmiennych, rozwiniętej przez R i e m a n n a, C r e m o n ę. C l i f f o r d a, N o e t h e r a, R o s a n e s a, B r i l l a i innych, patrz dzieło C l e b s c h a-L i n d e m a n n a I, 4, dział IX, a zwłaszcza N o e t h e r, Math. Ann. XXIII, s. 311—358 (1887). Liczbę niezmienników bezwzględnych (modulów) „powierzchni" wyznaczył N o e t h e r w r. 1888 (Berl, Ber., s. 1—5).

12) Porówn. badania D e r u y t s a (II D. a), który doszedł do rezultatów równoważnych z rezultatami M a u r e r a.

13) Dalszy przebieg badania pokazuje, że funkcye φ są jednorodnemi pierwszego stopnia względem zmiennych x.

14) Tu zarazem milcząco zawiera się uogólnienie, polegające na tem, że funkcye φ zależą w pewien sposób algebraiczny i od zmiennych u. Układów (S), nie zawierających ilości u, istnieje faktycznie tylko j e d e n. Inaczej zupełnie rzecz się ma u L i e g o, u którego charakter funkcyonalny ilości φ i ψ nie ulega żadnym ograniczeniom.

15) Math. Ann. XIX, s. 280—290 (1882).

16) Aby to miało miejsce, musi znikać wyróżnik formy f—przypadek ten już A r o n h o l d uważał za wyjątkowy.

17) Jesteśmy świadomi tego, że temat ten opracowaliśmy bardzo niezupełnie, lecz konieczną było rzeczą ograniczyć się do tych działów, które poddane są metodom zwykłej teoryi niezmienników. Z tego powodu nie mówimy wcale w tekście o teoryi „niezmienników równań rożniczkowych", rozwiniętej przez L i e g o, H a l p h e n a, V e s s i o t a i innych; niezmienniki te tak się mają do niezmienników różniczkowych, jak zwyczajne teorye niezmiennicze algebry do tworów „tożsamościowych" (zawierających tylko zmienne).

18) Mess. XV, s. 74—76, 88—92; O. R. CI, s. 1042—1046, 1110—111?, 1225—1229, 1460—1464. Opracowanie teoryi S y l v e s t e r a znajdujemy w jego odczytach, wydanych przez H a m m o n d a, Am. J. VIII, s. 196—260; IX, s. 1—37, 113—161, 297—352 (1886); X, s. 1- 6 (1887)

19) „Niezmienniki różniczkowe" należą do ogólnej grupy rzutowej, „wzajemniki" mogą się też odnosić do jednej z podgrup. Według pierwotnej terminologii S y l v e s t e r a, wyraz „wzajemnik" wskazywał tylko przemianę zmiennych. U innych znów autorów, odwrotnie pojęcie niozmiennika różniczkewogo jest ogólniejsze.

20) Rozprawa doktorska. Éc. Pol. Mém prés. (2), XXVIII (1878—1884). Porówn. też komunikaty C R LXXX, 1, 1 53 (1875); Journ. de Math. (3). II (1876). H a l p h e n korzysta tu z twierdzenia, że niezmiennik różniczkowy przez różniczkowanie względem zmiennej niezależnej przechodzi na takiż niezmiennik. Por. S y l v e s t e r, Am. 7. IX, s. 297—352 (2887); E l l i o t Mess. (2) XIX, s. 7—14 (1889).

21) Math. Ann. XXIV, s 337—388; L i e-E n g e l. I, rozdz. 25.

22) Przedstawienie szczegółowe wzajemnego związku tych badań stanowić może temat do wdzięcznej pracy. L i e dotyka w różnych miejscach związku swych badań z pracami innych autorów, a zwłaszcza H a l p h e n a. Math. Ann. XXXII, s. 212—281; XXIV, s. 537—578 (1884); Math. Ann. XXV s. 71—151 (1885); Leipz. Ber. 1887, s, 83—88; Am. J. XI, s. 182—186 (1888). L i e - E n g e l I, s 552—543; Leipz. Ber. 1891, s. 253—270, zwłaszcza str. 267. S t ö c k e r t, Progr. Chemnitz 1895.

23) Wyrażenie to występuje już u L a g r a n g e'a.

24) S y l v e s t e r daje tu nowy dowód wzoru, oparty na tem, że dwie formy izobaryczne, należące do „typów dopełniających się" w, i, j i $ij-w, i, j$ mają jednakową liczbę wyrazów. Por. E l l i o t, Lond. Proc. XXIII s. 298—309 (1892), XXIV s. 21—36 (1893).

25) l. c. H a l p h e n w pracy, cytowanej na drugiem miejscu rozważał „niezmienniki różniczkowe trójkowe", w których wyrażeniu występują pochodne dwu zmiennych zależnych względem trzeciej niezależnej. Badacze zaś angielscy, E l l i o t, F o r s y t h i inni badali głównie takie niezmienniki i wzajemniki trójkowe, w których jedna zmienna jest zależna. dwie inne niezależne.

26) Okazuje się to wyraźnie n.p. przy traktowaniu zagadnienia o wyznaczeniu takiego niezmiennika różniczkowego, którego znikanie daje „równanie różniczkowe krzywej płaskiej rzędu 3-go (n-tego)", któremu zatem czyni zadość y, jako funkcya zmiennej x, gdy y i x są związane równaniem rzędu 3-go (n-tego).

27) Nie należy zapominać o tem, że obszerność zewnętrzna tych rozwinięć uwarunkowana jest w części przez szereg pojedyńczych wydzielonych pytań (wyznaczenie p o j e d y ń c z y c h klas niezmienników różniczkowych p o j e d y ń c z y c h podgrup grupy liniowej). Tu czuć wyraźnie dotkliwy brak znajomości zasad kierowniczych teoryi L i e g o.

28) Lond. Proc. XVIII s. 61—88 (1887).

21) Proces ten przedstawia wzór:

$$(\mu, \nu; m, n) = \sum_{s=0}^{\infty} (\mu + s n)\, A_{sm} \frac{\partial}{\partial a_{n+s}},$$

$$A_{sm} = \sum_k \frac{(m-1)!}{k_0!\; k_1!\; k_2! \ldots\ldots} a_0^{k_0} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots\ldots$$

gdzie

$$k_0 + k_1 + k_2 + \ldots\ldots = m,$$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots\ldots = s,$$

cztery zaś paramesry μ, ν, m, n są liczbami całkowitemi ≥ 0. Np.

$$(1, 1; 1, 1) = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_3 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots = 0$$

jest: r ó w n a n i e m r ó ż n i c z k o w e m p ó ł n i e z m i e n n i k ó w;

$$(4, 1; 2, 1) = 4 \frac{a_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial a_1} + 5a_0 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 6\left(a_0 a_1 + \frac{a_1^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots = 0$$

r ó w n a n i e m r ó ż n i c z k o w e m w z a j e m n i k ó w. To ostatnie, według relacyi S y l v e s t e r a, podał H a m m o n d. M a c-M a h o n dla procesów tych utworzył symbolikę, wiążącą je bezpośrednio z funkcyami symetrycznemi (Lond. Proc. XIX, s. 112—128, 1888). Utwory w dziedzinie trójkowej analogiczne do procesu $(\mu, \varkappa; m, n)$ badał Mac Mahon, a później szczegółowo Elliot, Lond. Phil. Tr. CLXXXI. s. 19—51 (1890).

[29]) C. R. C. II, str. 351—353 (1886).

[30]) Lon. Proc. XVII, s. 172—196, (1886); XVIII, s. 142—164 (1887); XIX, s. 6—23, 377—405 (1888); Mess. (2) XIX, s. 7—14; Lond. Proc. XX, s. 131—160 (1889). Druga z wymienionych prac zawiera wywód sześciu równań charakterystycznych dla „wzajemników trójkowych czystych". Jeżeli pomyślimy sobie z jako funkcyę zmiennych x i y i oznaczymy $\frac{1}{r!\,s!}\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r\,\partial y^s}$ przez z_{rs}, to dwa z tych równań orzekają tylko, że wzajemnik jest jednorodny i izobaryczny odnośnie do każdego ze skażników r i s. Dalsze dwa równania wyrażają, że wzajemnik jest niezmiennikiem jednoczesnym form dwójkowych:

$$z_{20}\lambda^3 + 2z_{11}\lambda\mu + z_{02}\mu^2,$$

$$z_{00}\lambda^3 + 3z_{21}\lambda^2\mu + 3z_{12}\lambda\mu^2 + z_{00}\mu^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Porówn. zjawisko analogiczne dla półniezmienników wyższych u Forsytha, o czem wyżej była już mowa. Dwa ostatnie równania stanowią wreszcie uogólnienie równania różniczkowego Hammonda dla wzajemników dwójkowych. Układ wszystkich sześciu równań jest „zupełny", jak to wykazano w trzeciej pracy.

[31]) Lond. Proc. XX, s. 131—160 (1889).

[32]) Lond. Phil. Tr. CLXXX, s. 71—118 (1889).

[33]) Lond. Proc. XVII. s. 128—138 (1886). W szczególności bada autor te równania różniczkowe $(y', y'' \cdot y''' \ldots) = 0$, które posiadają całkę postaci $y'' = F(y')$. Prosty przykład geometryczny dają krzywe wymierne płaskie, które dają się przedstawić przez znikający wzajemnik.

[34]) Lond. Proc. XVII s. 139—151 (1886). (Porówn Griffiths, Ed. Times, LI, s. 137—149, 1889). Jeżeli w oznacza wagę, ϑ—stopień, to należy liczbę w rozłożyć wszelkiemi możliwemi sposobami najprzód na ϑ, potem na $\vartheta+1$ liczb składowych; różnica obu liczb daje liczbę liniowo niezależnych „perpetuantów" stopnia — wagi (ϑ, w). Np. dla $\vartheta=3$ liczba ta jest spółczynnikiem przy x^w w rozwinięcia funkcyi tworzącej

$$\frac{1-x-x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + \ldots\ldots$$

Wzoru ogólnego dotąd nie znaleziono

[35]) Lond. Proc. XVII s. 197—219, 329—343 (1886); tamże XVIII, s. 235—252 (1887). W drugiej pracy bada autor warunki konieczne i dostateczne na to, aby dana funkcya ilości $y_1, y_2, \ldots$, była wzajemnikiem mieszanym.

[36]) Lond. Proc. XVII, s. 220—231, 344—354 (1886); XVIII, s. 130—141 (1887). XX, s. 161—179 (1889; Mess. (2) XVIII, s. 153—158 (1889).

[37]) Quart. J. XXII, s 260—288 (1888); XXIII, s. 289—316 (1889).

[38]) Mess. (2) XVII, s. 154—192 (1888).

[39]) Lond. Phil. Trans. 1884, s. 377—489.

[40]) Lond. Phil. Trans. 1889, s. 71—118. Por. Platts. Quart J. XXV s. 00—315 (1891).

[41]) Patrz cyt [37]).

[42]) „Leçons sur la théorie générale des surfaces". Paryż, 1870. I, ks. 2.

[43]) Schlöm. Z., XXXVI, s. 56—60, 206—213 (1891). Autor bada tu, o ile jego twierdzenia stosują się do dowolnych przekształceń punktowych. Porówn. też Böklena Mittheil. 1892 i Schlöm. Z XXXVII, s. 186—189 (1892),

[44]) Elliot, Lond. Proc XVII, s. 172—196 (1886)

[45]) Math. Ann. XXXIX, s. 179—256 (1891). Voss rozważa też ogólniejsze niezmienniki różniczkowe, przechodzące przy dowolnem przekształceniu na analogiczne zbudowane wyrażenia (za pominięciem czynnika). W tekście ograniczamy się na przekształceniach rzutowych.

[46]) α i β są zarazem dwoma niezmiennikami t. z. równania Laplace'owego: por. Darboux, l. c. II, § 23 i dalsze.

[47]) Ponieważ treść tego rozdziału luźnie tylko wiąże się z przedmiotem głównym, więc zamiast cytat szczegółowych wymieniamy tylko nazwiska: Riemanna, Beltrami'ego, Christoffela, Weingartena, Halphena, Ricci'ego, Knoblaucha Frobeniusa.

[48]) Dalsze rozwinięcie u Knoblaucha „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen", Lipsk 1888. rozdz. III. Tenże autor badał i sześcienne formy różniczkowe w związku z teoryą powierzchni. Journ. f. Math. CIII, s. 25—39 (1888). Stäckel tamże CXIII, s. 58—60 (1894).

[49]) Grupa przekształcenia jest t. z. grupą „nieskończoną", co do której patrz badanie Liego w Loipz Ber. 1891, s. 316—352. 353—393.

Do II D. a.

Specyalne grupy podstawień i formy.

Półniezmienniki i funkcye półniezmiennicze.

Dotąd rozpatrywaliśmy ogólne własności form niezmienniczych; obecnie zajmiemy się zjawiskami charakteru bardziej specyalnego, zależnemi od ograniczenia już to grupy wykonywanych podstawień, już to przyjętych za podstawę form pierwotnych, już to od jednego i drugiego zarazem.

Pomiędzy utworami niezmienniczemi, należącemi do podgrup [1]) ogólnej grupy podstawienia liniowego, najogólniej badano tak nazwane półniezmienniki [2]), t. j. wyrazy główne spółzmienników, przeciwzmienników, form pośrednich i t. d. i ich uogólnień.

Zacznijmy od dziedziny dwójkowej. Załóżmy, że rozpatrywane wyrażenia całkowite wymierne C_0 są jednorodne i izobaryczne względem szeregów spółczynników (a), (b).... form pierwotnych, lub co wychodzi na to jedno, że przy podstawieniach grupy

(A) $$x_1 = ax_1', \qquad x_2 = dx_2'$$

wyrażenia te zmieniają się o potęgę wyznacznika podstawienia ad.

Jeżeli to samo żądanie postawimy dla grupy, powstającej z połączenia grupy (A) z grupą

(B) $$x_1 = x_1' + bx_2', \qquad x_2 = x_2',$$

to C_0 staje się półniezmiennikiem i czyni zadość charakterystycznemu równaniu różniczkowemu:

$$(D)\qquad \Omega \equiv a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_0}{\partial a_3} + \ldots\ldots$$
$$+ b_0 \frac{\partial C_0}{\partial b_1} + 2b_1 \frac{\partial C_0}{\partial b_2} + 3b_2 \frac{\partial C_0}{\partial b_3} + \ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Jeżeli C_0 zawiera $n+1$ argumentów a, $m+1$ argumentów b i t. d., to C_0 jest zawsze wyrazem głównym, t. j. spółczynnikiem najwyższej potęgi ilości x_1 oznaczonego spółzmiennika form f_n, g_m... ze spółczynnikami a, b...

Sylvester [4]) wychodzi z prostego spostrzeżenia, że C_0 staje się zarazem wyrazem głównym spółzmiennika form

$$f_{n'}', g_{m'}' \ldots (n' \geqq n,\ m' \geqq m \ldots),$$

którego pierwsze $n+1$, $m+1$... spółczynników zlewa się odpowiednio z a, b.... Teorya półniezmienników staje się przeto niezależną od form szczególnych f_n, g_m... i ich rzędów i pozostaje tylko atrybutem dowolnie przedłużonych szeregów elementów (a), (b).... Dla prostoty weźmy tylko pojedyńczy szereg elementów (a). Jeżeli ilości a zastąpimy ich wielokrotnościami liczbowemi, to wyrazy wyrażenia Ω zmieniają się tylko o czynniki liczbowe, i odwrotnie. Jeżeli więc w C_0 uczynimy pierwszy element a_0 zerem, to „reszta" będzie półniezmiennikiem odnośnie do nowego szeregu elementów $a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots$ Sylvester i Perrin [5]) pokazali, w jaki sposób na podstawie powyższego upraszcza się znacznie wyprowadzenie nietylko „form zasadniczych" ale i odpowiednich syzygij. Objaśnia to pomiędzy innemi twierdzenie Perrina, że do wyrazów głównych układu zupełnego form zasadniczych formy f_n potrzeba tylko dołączyć jedną „formę resztową" ilości $a_0, a_1, \ldots, a_n$, aby otrzymać układ zupełny form resztowych, należących do formy pierwotnej f_{n+1}. Postęp w innym kierunku dało uważanie wyrazu C_0 za formę dwójkową zmiennych niejednorodnych a_n [6]). Jeżeli mamy szereg wyrazów głównych C_0, C'_0, C''_0... formy pierwotnej f_n, to, według Sylvestera, każdy spółzmiennik ilości C, uważanych za formy ilości a_n, jest znowu wyrazem głównym spółzmiennika formy f_n. W tem znaczeniu każdy półniezmiennik C_0 posiada znowu wyraz pierwotny, którym jest spółczynnik najwyższej potęgi ilości a_n. Te „zarodki" (germs) spółzmienników formy f_n pozwalają, jak to wykazał Sylvester na przykładach form f_5 i f_6, wniknąć bliżej w budowę zupełnego układu formy f_n.

Wspominaliśmy już o stosowaniu półniezmienników stopnia drugiego i trzeciego względem ilości a do otrzymywania „układów stowarzyszonych" oraz o zadaniu podstawowem wydzielania z pomiędzy półniezmienników (dla nieograniczonego n) tak zwanych „perpetuantów", t. j. półniezmienników „nieprzywiedlnych", które nie dają się wyrazić jako funkcye całkowite półniezmienników stopnia niższego względem elementów; wreszcie była już mowa o ścisłym związku pomiędzy półniezmiennikami a funkcyami symetrycznemi. D'Ocagne [7]) w r. 1886 doszedł sposobem bardzo prostym do nowego układu półniezmienników stowarzyszonych formy f_n. Uważajmy na chwilę a_0 jako funkcyę zmiennych ξ, zaś $a_1, a_2, \ldots$ jako jej pierwszą, drugą... pochodną względem ξ. Wtedy kolejno pochodne ilości $\log a_0$ względem ξ od pierwszej do $(n-1)$-ej dają układ żądany: wszystkie inne półniezmienniki formy f_n dają się wyrazić za pomocą indywiduów tego układu wymiernie z potęgą ilości a_0 w mianowniku. D'Ocagne [8]) i Cesàro [9]) zbadali związek tego układu z układem Hermite'a. Różniczkowanie względem ξ jest oczywiście tylko symbolicznem skróceniem procesu

$$\frac{d}{d\xi} = a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\ldots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

a postępowanie powyższe pozwala z dwóch danych półniezmienników, np. z $a_0a_2 - a_1^2$ i a_0^2 otrzymać nowy. W ten sposób d'Ocagne [10]). Perrin [11]), Deruyts [12] i Roberts [13]) zbudowali cały szereg podobnych procesów („generatorów różniczkowych"). Deruyts przyjął za podstawę cały szereg grup elementarnych (a), (b)... i zbadał bliżej ścisłe pokrewieństwo procesu

$$\frac{d}{d\xi} = \sum \left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_i} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\ldots\right)$$

z poprzedniemi procesami Cayleya D i Δ (w ich działaniach na półniezmienniki). Dla objaśnienia przytoczmy twierdzenie, według którego podstawienie

$$x_1 = X_1 - X_2 \frac{\lambda}{S}, \quad x_2 = X_2,$$

w którem wyrażenie λ posiada własność, że $D\lambda$ równa się półniezmiennikowi S, przekształca każdy spółzmiennik tak, że nowe spółczynniki mają w licznikach półniezmienniki. Biorąc tu w szczególności $S = a_0$, $\lambda = a_1$ otrzymujemy znane twierdzenie Hermite'a.

Deruyts rozciągnął naukę o półniezmiennikach na formy pierwotne z większą liczbą szeregów o n zmiennych i posunął przez to teoryę niezmienników takich ogólnych form pierwotnych. Rozprawy w tym przedmiocie, rozproszone w czasopismach, a przeto nie łatwo dostępne [14]), zebrał Deruyts w r. 1891 w monografii [15]), którą tu przyjmiemy za podstawę sprawozdania. Abstrakcyjność przedmiotu zmusza nas do zwrócenia uwagi tylko na niektóre punkty główne.

Deruyts [16]), podobnie jak Kronecker [17]), zestawia ogólne przekształcenie liniowe o n zmiennych x z dwóch odpowiednio dobranych przekształceń prostszych. Są to najprzód przekształcenia, przy których pojedyńcza zmienna przybiera czynnik stały

$$(S_h) \qquad x_h = \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k, \qquad (k \lesseqgtr h)$$

z drugiej strony takie, przy których pojedyńcza zmienna powiększa się o drugą, pomnożoną przez czynnik stały

$$(S_{h,l}) \qquad x_l = X_l + \eta X_h, \quad x_k = X_k. \qquad (k \lesseqgtr l)$$

Rozpatrzmy funkcye całkowite F spółczynników form pierwotnych, które, prócz tego, zależeć mogą sposobem całkowitym od jednego lub kilku szeregów ilości zmiennych (x), (y), $z)$ . . . , które to funkcye, po wykonaniu podstawień S_h, $S_{h,l}$, mają się zmieniać tylko o potęgę wyznacznika podstawienia (ε lub 1).

Pierwsze żądanie odnośnie podstawień S_h orzeka tylko, że F „względem pojedyńczych skaźników 1, 2,..., n“ jest izobaryczne [18]); jest tedy F oraz jednorodnem co do pojedyńczych spółczynników i szeregów ilości zmiennych. Jeżeli F przy stosowaniu podstawienia S_h zmienia się o potęgę ε^{π_h}, to π_h nazywa się wagą formy F względem skaźnika h; istnieje więc n takich wag:: $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. Z podstawień $S_{h,l}$ można przeto wydzielić $n-1$ takich, że liczby h, l ograniczają się do $n-1$ par wartości

$$h, l = (1, 2), (2, 3) \ldots (n-1, n).$$

Dla następnego badania wystarcza stosowanie n—1 podstawień S_{n+i}. Warunek, by F było niezmienne przy podstawieniach $S_{l,h}$, jest równoważny równaniu różniczkowemu liniowemu $[h, l] = 0$.

„Funkcyą półniezmienniczą“ nazywa się każda funkcya izobaryczna F spółczynników i zmiennych, która czyni zadość $n-1$ równaniom $(i, i+1] F = 0$ [19]). Jeżeli F nie zawiera zmiennych, to nazywa się „półniezmiennikiem.“ Jeżeli zaś dołączymy jeszcze żądanie, by n wag $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ formy F miały wszystkie wartość równą $(=\pi)$, to F przechodzi na zwykłą „funkcyę niezmienniczą“ (utwór niezmienniczy) lub na zwykły niezmiennik. Tak np. wyznacznik jedno, dwu, trzyszeregowy [20]), wzięty ze schematu szeregów ilości zmiennych, jest funkcyą półniezmienniczą.

Dla dalszego rozwinięcia swojej teoryi Deruyts stosuje i do funkcyj półniezmienniczych symbolikę Clebscha-Aronholda, która była dotych czas stosowaną tylko do funkcyj niezmienniczych, [21]). Przytem okazuje się dogodnem nadanie wyrażeniom symbolicznym postaci kanonicznej [22]) symetrycznej co do pojedyńczych równoważnych elementów symbolicznych; przynosi to, między innemi, tę korzyść, że każdemu nieznikającemu utworowi symbolicznemu odpowiada nieznikający także utwór realny i odwrotnie. Przy takich założeniach nietrudno okazać, że funkcya niezmiennicza ψ ma za wyrażenie symboliczne, odnoszącą się do form liniowych funkcyę półniezmienniczą ψ' tych samych wag. Te formy liniowe powinny być liniowemi nietylko co do spółczynników symbolicznych, lecz i co do szeregów ilości zmiennych; są więc wszystkie typu $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$. Jeżeli z n pierwszych kolum schematu spółczynników symbolicznych utworzymy kolejno wszystkie możliwe wyznaczniki $\delta_n, \sigma_{n-1}, \ldots, \delta_1$ rzędów 1, 2, . . . , n; z drugiej zaś strony z n ostatnich kolumn schematu zmiennych utworzymy odpowiednio wyznaczniki $\delta'_n, \delta'_{n-1}, \ldots, \delta'_1$ rzędów $n, n-1, \ldots, 1$, to zachodzić będzie twierdzenie zasadnicze [24]).

„Wyrażenie symboliczne ψ' funkcyi półniezmienniczej ψ daje się przedstawić jako suma iloczynów z trzech grup czynników δ, δ', $(a_k, b_x, \ldots)$“.

W szczególności przy funkcyi niezmienniczej występują tylko n-szeregowe wyznaczniki δ_n, δ'_n i tym sposobem dochodzimy do zasadniczego twierdzenia symboliki Clebscha.

Dalsze uproszczenie teoryi osiągamy, stosując z Capellim, proces Aronholda; Deruyts posługuje się tu jednocześnie spółczynnikami (symbolicznemi) i szeregami zmiennych. Stąd ze wspomnianego przedstawienia symbolicznego funkcyj półniezmienniczych otrzymujemy z jednej strony wyrażenie symboliczne dla jakiegokolwiek półniezmiennika o wagach $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, a to poddając iloczyn

$$a_1^{\pi_1 - \pi_2} (a_1 b_2)^{\pi_2 - \pi_3} \ldots\ldots (a_1 b_2 c_3 \ldots k_{n-1})^{\pi_{n-1} - \pi_n} (a_1 b_2 c_3 \ldots k_{n-1} l_n)^{\pi_n}$$

utworzony z głównych podwyznaczników schematu spółczynników, dostateczną liczbę razy procesom takim, jak D_{ab}, D_{ac}, D_{bc} . . . [25]). Z drugiej strony [26]), zastępując wszędzie szeregi spółczynników a, b . . . szeregami zmiennych, dochodzimy do nowego rodzaju funkcyj niezmienniczych, do „półniezmienników tożsamościowych drugiego gatunku“.

Nie trudno widzieć, że wyraz główny [27]) funkcyi niezmienniczej o n szeregach ilości zmiennych rzędów $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ jest półniezmiennikiem o wagach $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ i że ten związek może być jednoznacznie odwrócony. W samej rzeczy [28]) dość w wyrażeniu symbolicznem półniezmiennika ψ zastąpić elementy symboliczne (a), (b) . . . tylomaż szeregami form symbolicznych liniowych, aby mieć funkcyę półniezmienniczą ψ z wyrazem głównym φ. Funkcya ψ ma jako czynnik $\pi_n - a_n$ potęgę wyznacznika δ'_n. Jeżeli drugi czyn- oznaczymy przez χ, to χ będzie funkcyą niezmienniczą, zawierającą tylko $n-1$ pierwszych szeregów ilości zmiennych w rzędach $\pi_1-\pi_n, \pi_2-\pi_n, \ldots, \pi_{n-1}-\pi_n$, będącą wagi π_n i mającą ψ za wyraz główny. Te funkcye χ, które Deruyts nazywa „spółzmiennikami pierwotnemi", są, jak to okazał Capelli [29]), właściwym fundamentem teoryi niezmienników form o dowolnej liczbie spółpodstawieniowych szeregów n zmiennych". W samej rzeczy można je także określić jako funkcye wszędzie izobaryczne o $n-1$ szeregach ilości zmiennych, sprawdzające $n-2$ równań różniczkowych liniowych częściowych

$$D_{12} = 0, \quad D_{23} = 0, \; \ldots\ldots, \; D_{n-2, n-1} = 0.$$

Deruyts nietylko otrzymuje rezultaty Capelli'go, mianowicie twierdzenie zasadnicze o rozwinięciu szeregowem [30]), lecz odkrywa także szereg nowych własności funkcyj χ, a to przy pomocy swojego przejrzystego symbolicznego przedstawienia półniezmienników. Tu należy przedewszystkiem przeprowadzony według metody Hilberta [32])dowód, że funkcye χ tworzą dziedzinę całkowalności o podstawie skończonej. Przy pomocy funkcyj χ Deruyts mógł znacznie rozszerzyć twierdzenie Sylvestera (II. C. b. c), tworząc z dwu funkcyj półniezmienniczych trzecią przez zastąpienie spółczynników jednej z nich pochodnemi pierwszemi drugiej funkcyi względem jej spółczynników.

Funkcye χ można sprawdzić do szeregu najprostszych typów [32]) z których wyprowadzają się inne przy pomocy uogólnionych procesów Ω. W końcu dodajmy, że funkcye χ pozwalają badać przy pomocy teoryi form takie specyalne [33]) formy pierwotne, pomiędzy spółczynnikami których zachodzą pewne związki algebraiczne. Zakłada się tylko, że i te związki są same natury niezmienniczej, t. j. że postać ich nie zmienia się przy liniowem przekształceniu zmiennych.

Zdawałoby się na pozór, jakoby do takich form pierwotnych należały funkcye, które przyjmują własność niezmienniczą dopiero skutkiem tych związków. Jest wszakże inaczej, gdyż można dowieść, że wszystkie funkcye χ dają się otrzymać z takich funkcyj „foremnych", które istnieją niezależnie od tych związków.

Do II D. b.

Kombinanty i apolarność.

Pomiędzy formami o większej liczbie szeregów ilości zmiennych, poddanych [34]) różnym przekształceniom liniowym, wielokrotnie już wymienialiśmy [35]) kombinanty jako najczęściej zachodzące.

Związek kombinatów z „teoryą apolarności" jest tak ścisły, że nadaje się z nią do wspólnego omówienia. Nie będziemy wprawdzie mogli dać dokładnego wyobrażenia o znaczeniu tej gałęzi teoryi form, ponieważ jej najważniejsze zastosowania należą do geometryi; tu właśnie występuje zjawisko, że twierdzenia, w algebrze prawie oczywiste lub mające znaczenie drugorzędne, są w geometryi źródłem deleko sięgających badań.

Niechaj $f_1, f_2, \ldots, f_p$ będą funkcye jednorodne n-tego stopnia zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pomiędzy utworami niezmienniczemi jednoczesnemi form f nazywamy te kombinantami, które przy podstawieniu liniowem form f zmieniają się tylko o potęgę wyznacznika podstawienia. Jeżeli przy pomocy nowych zmiennych $u_1, u_2, \ldots, u_p$ utworzymy formę liniową

$$F = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \; . \; . \; . \; + u_p f_p,$$

to kombinanty form f będzie można określić, jako funkcye spółczynników i zmiennych form f, nie zawierające u i nie zmieniające się przy dowolnych przekształceniach liniowych ilości u i x. Ta definicya jest o tyle odpowiedniejszą, że nietylko daje bezpośredni powód do specyficznej poprzednio już wspomnianej symboliki, lecz prowadzi i do ważnego uogólnienia; dochodzimy mianowicie do „kombinantów form f w znaczeniu rozleglejszem" jeżeli usuniemy podane ograniczenie co do ilości u.

Gordan [36]) położył podwaliny dzisiejszego rozwoju teoryi przy pomocy twierdzenia: każdy kombinant form f daje się przedstawić jako utwór niezmienniczy kombinantu wyróżnionego R, a mianowicie tego wyznacznika, którego elementy powstają, jeżeli formy f wypiszemy tyle razy z różnemi spółpodstawieniowemi zmiennemi, ile wykazuje ich liczba.

Gordan dochodzi do tego, łącząc w pewien sposób właściwy twierdzenie zasadnicze symboliki—„każdy niezmiennik układu form liniowych jest formą wyznaczników, utworzonych ze spółczynników form"—z rozwinięciem szeregowem formy, zawierającej dwa szeregi zmiennych spółpodstawieniowych. Kombinanty stanowią przeto układ zamknięty form, mający, według Hilberta, własność skończoności, ponieważ wyprowadzić one się dają z jedynej formy pierwotnej ze spółpodstawieniowemi szeregami zmiennych.

Daleko przejrzyściej układa się nauka o kombinantach, jeżeli uwzględnimy zasadę dualizmu. Jeżeli ze Strohem [37] zbudujemy nowy wyznacznik Q, dopełniając p szeregów spółczynników formy f odpowiedniemi iloczynami potęg dostatecznej liczby szeregów ilości zmiennych (v), (w)... spółpodstawieniowych z pierwotnemi zmiennemi, to Q może w zupełności zastąpić formę R, gdyż Q jest kombinantem form f, R zaś utworem niezmienniczym wyznacznika Q. Jeżeli N jest liczbą spółczynników ogólnej formy f, to $N—p$ jest liczbą nowych szeregów ilości zmiennych. Z podanego twierdzenia wynika przeciwstawienie p „formom rzędowym" f (napisanych ze spółczynnikami wielomianowemi) $N—p$ „form klasowych" φ (napisanych bez spółczynników wielominowych) w zmiennych przeciwpodstawieniowych. Wtedy kombinanty jednego układu przechodzą na kombinanty drugiego wprost w ten sposób, że we wszystkich formach, zamiast wyznaczników pierwszego układu spółczynników, piszemy wyznaczniki dołączone drugiego.

Tu jest punkt, o który zaczepia teorya apolarności.

Nazywamy dwie formy, takie jak f i φ (gdzie więc rząd formy f jest klasą formy φ), „sprzężonemi" (Rosanes) lub „apolarnemi" (Reye [38]), jeżeli znika ich niezmiennik dwuliniowy.

Układowi p form f liniowo-niezależnych odpowiada właśnie układ $N—p$ form φ także liniowo-niezależnych, i odwrotnie tak, że każda forma f jest apolarna względem każdej formy φ. Dwa takie układy nazywają się „wzajemnie apolarnemi". Jeżeli obierzemy układ φ apolarny względem układu f, to według twierdzenia, które pierwszy Brill udowodnił zupełnie [39], każde dwa wyznaczniki dołączone obu układów spółczynników są proporcyonalne, albo też są równe, jeżeli nie mający istotnego znaczenia spółczynnik proporcyonalności uczynimy równym jedności.

Wynika stąd podstawowa „zasada kombinantów": „kombinanty dwóch apolarnych układów form zgadzają się tak co do liczby jak i postaci [40]. Tak np. można według tego trzy formy dwukwadratowe dwójkowe, jeżeli idzie o ich kombinanty, zastąpić tylko dwiema takiemi formami: jeżeli pierwsze były formami ogólnemi, to i ostatnie będą takiemi [41].

Szczególny interes przedstawiają kombinanty najprostsze układów form dwójkowych, ponieważ na ich podstawie budują się kombinanty wyższe. Dowód, jaki dla tego przypadku podał Brill [42], jest tem godniejszy uwagi, że występuje w nim istotnie nowy punkt widzenia. Z wyznacznika Gordana R, napisanego w postaci niejednorodnej, wydziela Brill $\frac{p(p-1)}{2}$ różnic p zmiennych y, które są czynnikami wyznacznika, a potem zakłada, że wszystkie ilości y są równe. Powstający w ten sposób prostszy kombinant $W(y)$ [43] rzędu $p(n-p+1)$ co do zmiennej y może zastąpić formę Gordanowską R o tyle, o ile nie wymagamy wymiernego przedstawienia utworów niezmienniczych; i w samej rzeczy dowodzi Brill, że każdy kombinant form f daje się przedstawić jako niezmiennik lub spółzmiennik formy dwójkowej W (porówn. II B. b.).

Z „ogólności" form f wypływa znów ogólność formy W, t. j. te spółczynniki tej ostatniej są od siebie niezależne.

Jeżeli, odwrotnie, chcemy ogólnej formie dwójkowej rzędu $p(n-p+1)$ nadać postać formy W, musimy dołączyć do niej funkcyę niewymierną spółczynników. Tak np. ta ostatnia funkcya dla formy szóstego rzędu jest pierwiastkiem równania rzędu piątego [44]: to dołączenie wystarcza do sprowadzenia formy danej za pomocą przekształcenia liniowego do dwóch pewnych postaci kanonicznych.

Do ugruntowania zasady kombinantów użyto pojęcia układów apolarnych. Pojęcie to występowało już dawniej: źródło jego tkwi w rozciągnięciu na układy przedstawienia kanonicznego Sylvestera form dwójkowych przez sumy potęg. Pierwszy krok w tym kierunku uczynił w r. 1872 Rosanes [45]) dowiódłszy za pomocą symboliki prostego lecz doniosłego twierdzenia, że znikanie niezmiennika dwuliniowego dwóch form dwójkowych równego rzędu jest koniecznem i wystarczającem na to, aby każda z nich dała się przedstawić jako suma potęg czynników liniowych drugiej." Jeszcze dogodniej można wyrazić to w ten sposób: „jeżeli forma dwójkowa n-tego rzędu posiada czynnik $\lambda-\alpha$, to jest apolarną względem n-ej potęgi tego czynnika, i odwrotnie". Stąd wynika w szczególności, że n danych form dwójkowych n-tego rzędu można przedstawić jako połączenia liniowe potęg zupełnych tychże n form liniowych. Iloczyn tych ostatnich jest właśnie formą apolarną do form danych.

Wkrótce potem Rosanes rozciągnął w mowie będącą zasadę odpowiedniość apolarnych na formy wyższe [46]. Mamy tu analogicznie: „Jeżeli $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ jest formą n-tego rzędu r zmiennych i jeżeli $u_1, u_2, \ldots, u_r$ oznaczają zmienne spółpodstawieniowe, to forma f jest wtedy i tylko wtedy apolarną względem n-ej potęgi formy liniowej $u_1y_1+u_2y_2+\ldots+u_ry_r$, jeżeli spełnia się równanie $f(y_1, y_2, \ldots, y_r)=0$ [47]. Na tem opiera się możliwość przedstawienia formy liniowej f za pomocą pewnej liczby potęg form liniowych; zadanie to poprzednio już było podjęte z powodzeniem przez Reyego [48]) przy pomocy interpretacyi mechanicznej. Lecz obecnie przybywa nowy moment, prowadzący do związku z własnościami biegunowemi formy f. Utwórzmy pierwszą biegunową formę f względem układu wartości („punktu") (y); tej formy znowu pierwszą biegunową względem drugiego punktu (z) i t. d., póki nie dojdziemy do formy liniowej w n punktach $(x), (y), (z), \ldots, (w)$. Jeżeli ten ostatni utwór znika, to mówimy, że n punktów tworzy „n-kąt biegunowy“ formy f [46]). Wtedy łatwo widzieć, że n-kąt biegunowy formy f, t. j. iloczyn n form liniowych $u_n, u_y, \ldots, u_w$ jest formą klasową apolarną względem f, i odwrotnie. Pojęcie n-kąta biegunowego można rozszerzyć, tworząc pojęcie zupełnego $(n+1)$ kąta biegunowego, jeżeli każde n wierzchołków tego ostatniego tworzy n-kąt biegunowy. Stąd, w połączeniu z poprzedzającem, wynikają twierdzenia, takie jak następujące, w którem ograniczamy się do przypadku trzech zmiennych, i dla krótkości wybieramy wysłowienie geometryczne:

„Krzywa ogólna C_n daje się za pomocą „boków“ zupełnego $(n+1)$ kąta biegunowego przedstawić jako suma n-tych potęg $\frac{n(n+1)}{2}$ form liniowych“.

Jest rzeczą godną uwagi, iż doniosłość tych twierdzeń polega w istocie rzeczy na uczynionem założeniu, że z dwóch apolarnych form f, φ jedna jest przywiedlną t. j. jest iloczynem samych form liniowych.

Z kolei rzeczy pytać należy o znaczenie apolarności dwóch form nieprzywiedlnych. Faktycznie to ogólniejsze zadanie jest dawniejszem, tylko — że wtedy ograniczano się na przypadku rzędu drugiego oraz na przypadkach, dających się do tegoż sprowadzić [50]). Tymczasem odpowiedź na to pytanie, tak ważna dla geometrów, była natury tak specyalno-algebraicznej, że mogła wywrzeć wpływ skuteczny na rozwój teoryi form. H e s s e [51]) dowiódł był już dawniej, że apolarność dwóch form drugiego rzędu lub klasy stanowi kryteryum na to, aby przy pomocy przekształcenia liniowego (a wtedy i nieskończenie wielu sposobami) można było obie formy sprowadzić do postaci normalnej, tak by w j e d n e j z n i c h z a c h o d z i ł y w y ł ą c z n i e k w a d r a t y, w d r u g i e j w y ł ą c z n i e i l o c z y n y z m i e n n y c h. Stąd R o s a n e s i R e y e, opierając się nadto na zasadzie wyżej wyłożonej, wyprowadzili daleko sięgające wnioski dla układów stożkowych, dla powierzchni 2-go rzędu (oraz dla krzywych przestrzennych 3-go rzędu).

Z zadaniem o sprowadzeniu w mowie będącego, zupełnie inaczej zbudowanego przedstawienia kanonicznego, do przedstawień dawniejszych łączy się zagadnienie charakteru ogólniejszego, dotyczące wyprowadzenia zjawisk apolarności w dziedzinie trzech, czterech zmiennych ze źródła czysto dwójkowego. Zagadnieniem tem zajmował się szczegółowo autor niniejszej pracy [53]) i dowiódł, że należy dać odpowiedź twierdzącą na oba pytania, mianowicie: t e o r y a a p o l a r n o ś c i i w ł a s n o ś c i k o m b i n a n t o w e d z i e d z i n w y ż s z y c h p o d p o r z ą d k o w u j ą s i ę p o d t e o r y ę k o m b i n a n t ó w d w ó j k o w y c h. Można to osiągnąć za pomocą łańcucha zasad przeniesienia (lub jeżeli kto chce, odwrotnie, za pomocą łańcucha zasad redukcyi). J ą d r o p o s t ę p o w a n i a t k w i w t e m, ż e g d y p r z y j m i e m y z a p o d s t a w ę k a n o n i c z n ą „u k ł a d s p ó ł r z ę d n y c h“, t o w y m a g a n e p r o c e s y b i e g u n o w e p r z e c h o d z ą n a p r o s t e p r z e k s z t a ł c e n i a f u n k c y j e l e m e n t a r n y c h s y m e t r y c z n y c h.“

Ponieważ przy utworach w mowie będących nie ma znaczenia okoliczność, czy formy te przyrównywamy do zera czy też nie, to przyjmiemy przypadek pierwszy i zarazem dogodny geometryczny sposób wyrażenia. By nie wdawać się w objaśnienia bardziej skomplikowanych pojęć, wystarczy rozpatrzenie, dla przykładu, najprostszego przypadku dwóch stróżkowych [54]). Niechaj będą stożkowa rzędowa i klasowa:

$$\begin{aligned} f &\equiv a_x^2 = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \\ \varphi &\equiv u_x^2 = \Sigma\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0, \end{aligned} \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

Drugą z nich sprowadźmy do „postaci normalnej“ [55])

$$\varphi \equiv u_0 u_2 - u_1^2 = 0,$$

lub, przez wprowadzenie parametru dowolnego λ, do postaci

$$u_0 : u_1 : v_2 = \lambda^2 : -\lambda : 1 .$$

Związek apolarności między f i φ wyraża się teraz w ten sposób:

$$a_{02} = a_{11}$$

tak, że gdy ten związek się spełnia, można napisać:

$$a_{0r} = a_0, \quad a_{01} = a_1, \quad a_{02} = a_1, \quad a_{02} = a_2, \quad a_{12} = a_3, \quad a_{12} = a_4 .$$

Z punktu (x) przeprowadźmy styczne α, β do „stożkowej normalnej“ φ, wtedy x_0, x_1, x_2 będą związane z α i β za pomocą związków prostych:

$$x_0 : x_1 : x_2 = 1 : \alpha+\beta : \alpha\beta.$$

Twierdzenie zasadnicze brzmi:

„W a r u n e k n a t o, b y d w a p u n k t y $(x) = (\alpha, \beta)$, $y = (\gamma, \delta)$ b y ł y s p r z ę ż o n e m i z e w z g l ę d u n a s t o ż k o w ą, w y r a ż a s i ę w p o s t a c i **symetrycznej** w z g l ę d e m $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, następującej:

$$a_{xy} = a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 = 0,$$

g d z i e $\frac{s_1}{s_0}$, $\frac{s_2}{s_0}$, $\frac{s_3}{s_0}$, $\frac{s_4}{s_0}$ o z n a c z a j ą f u n k c y e e l e m e n t a r n e s y m e t r y c z n e i l o ś c i $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Stąd bezpośrednio wynikają wnioski:

„W s z y s t k i e r o z w i ą z a n i a r ó w n a n i a $a_s = 0$ p r z e d s t a w i a j ą p a s m o (potrójnie nieskończone) o p i s a n y c h n a φ c z w o r o b o k ó w b i e g u n o w y c h s t o ż k o w e j f a p o l a r n e j w z g l ę d e m φ“.

Jeżeli w a_s położymy $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\lambda$, otrzymamy równanie $a_\lambda{}^4=0$ czterech punktów przecięć stożkowych φ i f.

Stąd i z określenia apolarności dwójkowej wynika: „czworoboki biegunowe poprzedniego twierdzenia przedstawia na stożkowej f grupa apolarna względem dwójkowej czwórki $a_\lambda{}^4$ punktów przecięcia stożkowych φ i f.

Od czworoboków biegunowych stożkowej f można przejść do trójboków biegunowych, pozostawiając jeden ich bok nieoznaczonym. Jeżeli jednocześnie boki trójboku biegunowego mają być stycznemi α, β, γ do φ, to równanie $a_s=0$ rozpada się na dwa następujące:

$$a_0\sigma_0+a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3=0,\quad a_1\sigma_0+a_2\sigma_1+a_3\sigma_2+a_4\sigma_3=0,$$

gdzie

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0}=\alpha+\beta+\gamma,\quad \frac{\sigma_2}{\sigma_0}=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma,\quad \frac{\sigma_2}{\sigma_0}=\alpha\beta\gamma.$$

W tem zawiera się całkowite wyjaśnienie twierdzenia Hessego, „gdyż opisane na φ trójboki biegunowe stożkowej f przedstawione są na φ przez grupę apolarną do grupy pierwszych biegunowych czwórki (f i φ) punktów przecięcia."

Połączenie dziedziny dwójkowej i trójkowej staje się jeszcze ściślejszem przez dalszą zasadę przeniesienia, uzasadnioną przez pierwszy za pomocą rachunku symbolicznego przez O. Schlesingera [59]), a polegającą na tem, że jednę i tę samą stożkową można uważać raz za utwór rzędowy, drugi raz za utwór klasowy. Niechaj na stożkowej K dana będzie czwórka punktów $a_\lambda{}^4$ oraz czwórka stycznych $b_\lambda{}^4$. Istnieje jedna tylko stożkowa rzędowa f apolarna do K, mająca z K wspólną czwórkę punktów $a_\lambda{}^4$ i podobnież istnieje jedna tylko stożkowa klasowa Φ, apolarna względem K i mająca z K wspólną czwórkę stycznych $b_\lambda{}^4$. Wtedy—pomijając czynnik nieistotny—niezmiennik dwójkowy dwuliniowy obu czwórek $a_\lambda{}^4$, $b_\lambda{}^4$ jest identyczny z niezmiennikiem trójkowym dwuliniowym obu stożkowych f, φ.

Przerywamy tu dalsze wyjaśnienia i ograniczamy się na charakterystyce uogólnienia dla dziedzin wyższych, polegającej na tem, że rząd n formy dwójkowej $f_n=a_\lambda{}^n$ rozkłada się na dwa czynniki n_1, n_2 [60]) pierwiastki zaś formy $f_n=0$ uważa się za punkty rozmaitości jednowymiarowej w przestrzeni o n_1 wymiarach; spółrzędnemi tych punktów są potęgi 1, λ_1, λ^2, . . . , λ^{n_1} zmiennej λ.

Jako zastosowanie omawianych tu zasad przeniesienia niechaj służą dwa następujące twierdzenia, rzucające nowe światło na naturę przedstawień

kanonicznych potęgowych. Pierwsze twierdzenie [61]) orzeka naprzykład, że dwa zadania: przedstawienie formy dwójkowej rzędu dziewiątego pod postacią sumy pięciu potęg dziewiątych, oraz przedstawienie formy czwórkowej sześciennej, jako sumy pięciu sześcianów — że zadania te są równoważne; jedno sprowadza się do drugiego za pomocą procesów niezmienniczych.

Drugie twierdzenie [62]) orzeka znów równoważność dwóch zagadnień: kanonicznego przedstawienia układów form przez sumy potęgowe oraz szukania największego wspólnego dzielnika takich układów. Niechaj będą mianowicie dwie apolarne dwójkowe grupy form; wtedy **każdej podgrupie** jednej, której wszystkie indywidua dają się przedstawić jako sumy tych samych potęg zupełnych, odpowiada oznaczona podgrupa drugiej, której wszystkie indywidua mają jednę i tę samą formę jako czynnik wspólny, i odwrotnie.

W ostatnich czasach badano także wspomniane wyżej „rozszerzone kombinanty" układu form dwójkowych f_1, f_2, . . . , f_n, które przeto, oprócz zmiennych λ, zawierają jeszcze jeden lub więcej szeregów wielkości u, przeciwpodstawieniowych z formami f. Okazuje się przytem dogodnem wprowadzenie, zamiast ilości u, szeregów zmiennych (x), (y)..., spółpodstawieniowych z formami f. Do kombinantu tworzącego R Gordana (wyznacznika ilości f, napisanych w rozmaitych zmiennych λ, μ, ν . . .), można, według Brilla [63]) dodać kilka dalszych, powstających przez to, że jeden, dwa trzy . . . p szeregów ilości l zastępujemy odpowiednio zmiennemi (x); (x), (y); (x), (y), (z) i t. d. Te rozszerzone kombinanty służą geometrycznie do poznania niezmienniczych własności rozmaitości pojedyńczej, którą przedstawiają formy f wewnątrz rozmaitości o $p-1$ wymiarach.

Zadaniem najważniejszem jest tworzenie rzutowe tej rozmaitości form f z innych rozmaitości rzędu niższego. Algebraicznie brzmi ono tak: „Znaleść $p-1$ szeregów form rzędów n_1, n_2, . . . , n_{p-1} ($n=n_1+n_2+\ldots n_{p-1}$), aby p zupełnych wyznaczników, utworzonych z $p-1$ szeregów, zlewało się z p danemi formami f rzędu n-go."

Autor niniejszego [64]) rozwiązał to zadanie przy pomocy postulatu dowiedzionego, następnie ogólnie przez Hilberta [65]), traktując je jako przypadek szczególny zadania o podzielności [66]): „Znaleść dla funkcyi całkowitej $F(\lambda, \mu)$ dwóch zmiennych niejednorodnych kryteryum na to, aby ta funkcya dała się podzielić przez inną funkcyę ilości λ, μ, zawierającą jednę ze zmiennych tylko w stopniu pierwszym".

Rozwiązanie tego zadania uskutecznia się przy pomocy procesów nasunięcia i biegunowego W. Stahl dał bezpośrednie rozwiązanie tego zadania dla szeregu przypadków $r=3$, $r=4$ przez wyraźne wzory wyznacznikowe.

Do II D. c.

Wypadkowe i wyróżniki.

Pomiędzy specyalnemi niezmiennikami wypadkowe (rugowniki) i wyróżniki zasługują na szczególną uwagę ze względu na liczne zastosowania. Naukę o wypadkowych i o wyróżnikach form algebraicznych możemy tu tylko o tyle uwzględnić, o ile natura niezmiennicza tych utworów występuje na plan pierwszy, choćby formalnie [68]. W tym kierunku rozwój historyczny teoryi form parł przedewszystkiem ku rozwiązaniu zadania, polegającego na otrzymaniu wyrażenia symbolicznego dla tych utworów w przypadkach najprostszych. Nie przedstawiało to trudności dla wypadkowej formy dwójkowej f_n rzędu n-tego i dwójkowej liniowej f_1. Rozwiązanie w przypadku form dwójkowych f_n, f_2 podał Salmon [69]) za pomocą rachunku nadwyznaczników i to w sposób, pozwalający na uogólnienie w przypadkach wyższych. Clebsch [70]) uczynił krok dalszy, gdy na podstawie symboliki Aronholdowej przerobił wyrażenie wypadkowej form f_n i f_2 o tyle, że możliwem się stało sprowadzenie istotne tego wyrażenia do szeregu niezmienników i spółzmienników pośrednich. Mniej przejrzyście wypadło u Clebscha uogólnienie w przypadku większej liczby zmiennych dla wypadkowej formy dowolnego rzędu, formy kwadratowej i szeregu form liniowych. Postępowanie Clebscha zastosował Gordan [71]) do wypadkowej R dwóch dowolnych form dwójkowych f_m i f_n. Przedewszystkiem udało się w przypadku wyróżnionym $m=n$, przez wprowadzenie symboli na pojedyńcze „spółzmienniki elementarne„ Cayleyowsko-Bézoutowskiej formy rugownika i przy pomocy zasady rozwinięcia szeregowego, wyprowadzić rugownik form danych przez zastosowanie samego tylko procesu nasunięcia. Dalej analogicznie buduje się spółzmiennik, którego spółczynniki dla $R=0$ są równe potęgom wspólnych pierwiastków form f_m i f_n, potem spółzmiennik, którego znikanie tożsamościowe jest kryteryum wspólności pierwiastku podwójnego i t. d. Jezeli f_m i f_n są rzędów nierównych, to w symbolicznej swojej budowie rugownik występuje jako iloraz dwóch stosunkowo prostych utworów. Zresztą w każdym szczególnym przypadku dzielenie jest wykonalne i otrzymujemy wynik podobny do poprzedzającego. Przykłady wyrachowane obejmują wszystkie przypadki, w których żaden z rzędów m, n nie przekracza liczby 5. Dla przypadku n dowolnego oraz $m=3$ napisał Pascal [72]) wypadkową w postaci symbolicznej tak, że i faktyczne przeprowadzenie na agregat nasunięć nie przedstawia istotnych trudności.

Na teraz ogólne rozwiązanie tego zadania wydaje się niemożliwem [73]) i należy zadowolić się tem, by udoskonalić przedstawienie niezmiennicze wypadkowej w przypadkach niższych w ten spo ób, aby w przedstawieniu występowały tylko formy odnośnego układu zupełnego. Por. np. u Brioschi'ego [74]) przypadek $m=3$, $n=4$, u d'Ovidio [75]) $m=4$, $n=4$ oraz $m=5$, $n\leq 5$.

Jeszcze mniej udoskonalonem jest odpowiednie przedstawienie wyróżnika. Gordan [76]) podał dla form dwójkowych f_n postępowanie systematyczne dla dojścia do wyrażenia wyróżnika przez niezmienniki zasadnicze; przy wzrastającym rzędzie trudności rachunku (symbolicznego) piętrzą się do takiego stopnia, że zwalczono je dopiero dla przypadku $n=7$ [77]).

Jeżeli daną jest pewna forma f_7, to metoda Bézout-Cayley'a wyznaczania czynnika podwójnego $a_x=a_1x_1+a_2x_2$ formy f daje sześć równań jednorodnych stopnia piątego względem ilości a. Za pomocą odpowiedniego nasunięcia stron lewych i następnego dzielenia przez a_x otrzymujemy równania stopnia czwartego względem a. Postępując w ten sposób dalej, dochodzimy do równań kwadratowych, z których można wyrugować ilości a; strona lewa rugownika jest wtedy wprost szukanym wyróżnikiem.

Na drodze pośredniej załatwił Maisano [78]) przypadek następny $n=8$, badając najprzód specyalną funkcyę f_8, która jest hesyanem formy f_6 i wykazując następnie, że wyróżnik ogólnej formy f_8 ma budowę analogiczną.

Warunki istnienia czynnika wielokrotnego formy f_n otrzymano niedawno dla przypadku $n=6$. Odpowiednie spółzmienniki, które muszą wtedy znikać tożsamościowo, wyrazili Maisano [79]) i d'Ovidio [80]) przy pomocy form układu, jako wyróżniki biegunowych formy pierwotnej.

O utworach trójkowych można powiedzieć niewiele. Wypadkowa trzech form kwadratowych jest u Gundelfingera [81]) i Mertensa [82]) funkcyą całkowitą dwóch kombinantów zasadniczych. Gordan [83]) przy pomocy spółzmiennika, występującego już u Derscha, wyraził wyróżnik formy trójkowej C_n w postaci wyznacznika, jako funkcyę całkowitą spółczynników.

Przejdźmy teraz do pojedyńczych własności rugowników i wyróżników form dwójkowych. Utwory te, jako funkcye spółczynników, czynią zadość pewnym specyficznym równaniom różniczkowym obok tych, którym czynią zadość niezmienniki. Pierwszy Brioschi [84] podał układ zupełny równań liniowo-niezależnych, Noether [85]) zaś wykazał, że już jedno z tych równań, dowolnie wybrane, wystarcza do scharakteryzowania tych utworów. Godne uwagi zastosowanie równań wyróżnikowych Brioschi'ego wskazał Wiltheiss [86]), nadając równaniu różniczkowemu funkcyj hypereliptycznych θ taką postać, że wypływają one przez odpowiednią kombinacyę liniową z równań Brioschi'ego; odnośna forma dwójkowa jest tu właśnie pierwiastnikiem, znajdującym się pod znakiem całkowym.

Gordan [87]) pierwszy wskazał ścisłe związki wzajemne tak rugowników jak i wyróżników oraz związki pomiędzy jednemi i drugiemi. Prosty rachunek wykazał, że rugowniki pewnych wybitnych spółzmienników formy pierwotnej zawierały wyróżnik tej formy jako czynnik. Istotną przyczynę tego zjawiska odkrył niedawno Kohn [88]. Jeżeli mianowicie wprowadzimy pierwiastki przedstawienia wyróżnionego typowego formy f (pochodzącego od Hermite'a) jako wielkości samodzielne, to dojdziemy prawie bezpośrednio do twierdzenia, że wszystkie spółzmienniki formy f, których wagi leżą poniżej pewnych granic, mają tę własność, że ich wypadkowe z formą f, a także ich wyróżniki zawierają wyróżnik formy f w pewnej potędze. Odpowiednie twierdzenia stosują się do układów form pierwotnych. Autor niniejszego ustanowił [89] dla formy dwójkowej f rzędu nieparzystego $n=2l+1$ szereg zamknięty spółzmienników $f, f_1, f_2, \dots, f_\nu$, których wyróżniki prócz pierwszego i ostatniego, rozpadają się na dwa czynniki i są związane pomiędzy sobą łańcuchowo w ten sposób, że dwa następujące po sobie wyróżniki mają czynnik wspólny. Dla pewnych układów szczególnych form dwójkowych związek rugowników i wyróżników zbadano jeszcze dokładniej. Są to formy, które, przyrównane do zera, wyznaczają osobliwości (rzędowe) krzywej wymiernej na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Rugowniki i wyróżniki tych form rozpadają się, jak to widzieć można z rozwiązań geometrycznych, na pewną liczbę czynników nieprzywiedlnych, te ostatnie zaś są w części, lubo w różnej wielokrotności, wspólnemi. Odnośne rozkłady wykonali w zupełności: Brill [90] dla płaszczyzny i dla pewnego kanonicznego układu równań, autor zaś niniejszego dla płaszczyzny i przestrzeni ogólnie [91]. W szczególności wyróżnik wyznacznika funkcyjnego trzech lub więcej form dwójkowych równego rzędu rozkłada się na dwa czynniki; wynik ten już dawniej uogólnił był Brill [91] dla dowolnej liczby takich form.

Poznanie innego, należącego tu zjawiska przywiedlności zawdzięczamy Cayley'owi [93]. Jeżeli utworzymy wyróżnik pęku form dwójkowych $k_1f+k_2\varphi$, a następnie wyróżnik tej formy zmiennych k_1, k_2, to rozłoży się on na iloczyn postaci AB^2C^3, gdzie znikanie niezmienników A, B, C ma łatwo określić się dające znaczenie dla danego pęku.

W dziedzinie większej liczby zmiennych istnieje w tym kierunku twierdzenie Brilla [94]. Jeżeli z n równań $f_i=0$ o n (niejednorodnych) zmiennych wyrugujemy $n-1$ zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, to wypadkowa form f będzie formą dwójkową pozostałej zmiennej x_n. Jej wyróżnik względem x_n jest podzielny przez wypadkową form f i ich wyznacznika funkcyjnego.

Wspomnijmy jeszcze o innej własności zasadniczej wyróżnika D formy F. Można oczekiwać, że i wszystkie zniekształcenia formy F dadzą się określić jedynie z wyróżnika. Dla form dwójkowych F rozwiązał odnośne zadanie najogólniej Hilbert [95] za pomocą rozwinięcia potęgowego. Jeżeli dla pewnego układu wartości spółczynników a_i formy F_n znika tożsamościowo nie tylko forma $D(a_i)$, lecz znikają też i wszystkie pierwsze biegunowe

w liczbie $n-k-1$, wtedy następna $(n-k)$-ta biegunowa rozpada się na $n-k$ czynników liniowych. Jeżeli pomiędzy temi czynnikami jest np. μ_i-1 $(i=1, 2, 3, \dots, k)$ równych, to i forma pierwotna F rozpada się w ten sposób, że jej czynniki liniowe jednoczą się po μ_i, i odwrotnie.

Dla specyalnego gatunku biegunowych, zwanych „ewektantami" rezultat ten już znacznie dawniej otrzymał był Sylvester [96].

Metoda Hilberta pozwala zawsze na wyznaczenie tak postaci jak i liczby wszystkich osobliwości utworu $D(a_i)=0$.

Kończymy ten rozdział przytoczeniem niektórych postępów w rozważanej dziedzinie, jakkolwiek poglądom tym brak dotąd wyrobienia w duchu teoryi niezmienników.

Aż do ostatnich czasów przez wypadkową n form F_i rozumiano stronę lewą równania (pozbawionego czynników zbytecznych), powstałego przez eliminacyę $n-1$ zmiennych. Wprawdzie już faktycznie Bézout utworzył wypadkową przez to, że przy pomocy odpowiednio dobranych „polyonômes multiplicateurs" kombinował formy F_i liniowo w ten sposób, że powstałe wyrażenie redukowało się do stałej, mianowicie do rugownika. Mertens [95] ma tę zasługę, że przez odwrócenie tego postępowania oddzielił pojęcie wypadkowej od procesu eliminacyi: w założeniu, że równania $F_i=0$ nie mają wspólnego układu rozwiązań, dowodzi on, że istnieje kombinacya liniowa form F przepisanego rzędu względem spółczynników i niezależna od zmiennych. Z drugiej strony, odpowiednio do najprostszych zniekształceń form zasadniczych F, wprowadzono pojęcie wypadkowej „zredukowanej" R'. Jeżeli równania $F_i=0$ posiadają już pewną liczbę układów wspólnych rozwiązań, to istnieje zawsze funkcya całkowita R' spółczynników, której znikanie daje kryteryum na to, aby te równania miały jeszcze wspólne rozwiązania dalsze. Cayley pierwszy podał [96] przykład tego rodzaju, Perrin [97] i Brill [98] przeprowadzili nad tem badania ogólniejsze.

Perrin wychodzi z zasady, według której wypadkowa pierwotna R ma być uważana jako funkcya wyrazów form F, które nie zawierają zmiennych, i dochodzi w ten sposób do wyrażenia formy R, jako funkcyi całkowitej formy F, o spółczynnikach niezależnych już od zmiennych. Przez skombinowanie tej zasady z metodą eluminacyjną Poissona [99], Brill [100] doprowadził to pytanie do zadawalającego algebraicznie zakończenia, tak że wypadkowa zredukowana występuje wyraźnie jako czynnik wspólny pewnych wyrazów rozwinięcia, dającego się obliczyć przy pomocy przejrzystego algorytmu.

Na końcu wspomnijmy jeszcze o tem, że teorya kombinantów i apolarności może być z powodzeniem stosowana do tworzenia wypadkowych w przypadkach bardziej złożonych

Do II. D. d.

Dalsze formy specyalne [101]).

II. D. d. α. *Formy ze znikającym wyznacznikiem Hessego* [101]).

Jednem z najważniejszych pytań w teoryi form jest pytanie, dotyczące kryterium, pozwalającego przekonać się, kiedy dana forma F o n zmiennych może być za pomocą podstawienia liniowego przekształcona na formę o mniejszej liczbie zmiennych i—w razie jeżeli to zachodzi—pozwalającego wyznaczyć istotnie odpowiednie podstawienia.

Ogólne wywiązanie tego zadania zawdzięczamy Gordanowi [103]) i Noetherowi. Oni to sprostowali zarazem twierdzenie Hessego [104]), według którego wzmiankowane kryteryum miało wyrażać się tożsamościowo znikaniem spółzmiennika H (Hessego), t. j. wyznacznika funkcyjnego pierwszych biegunowych formy F. Okazało się, że twierdzenie Hessego nie jest ogólnie prawdziwem: że stosuje się ono tylko do form dwójkowych, trójkowych i czwórkowych oraz do ogólnych kwadratowych, gdyż już w dziedzinie pięciu zmiennych jednorodnych istnieją całe klasy form, których hesyan znika tożsamościowo, pomiędzy zaś ich biegunowemi nie zachodzą wcale związki liniowe. Badanie Gordana i Noethera opiera się na równaniu różniczkowem cząstkowem liniowem, któremu czynią zadość forma F i jego biegunowe, i którego spółczynniki zależą znowu od pewnego układu równań różniczkowych cząstkowych. Z liczby rozwiązań tego układu należy wydzielić te, które są funkcyami całkowitemi zmiennych. Staje się to przez to, że te ostatnie przekształcają się „niewłaściwie" wymiernie, t. j. w ten sposób, że znika tożsamościowo wyznacznik podstawienia wraz z pewnym szeregiem jego minorów.

Do II D. d. β.

Formy specyalne, których natura określa się za pomocą równań różniczkowych algebraicznych.

Ponieważ nasunięcie dwóch form można zastąpić procesem różniczkowym, wszystkie zaś utwory niezmiennicze sprowadzają się do nasunięć, przeto jest teoretycznie jasnem, że gdy zniekształcenie niezmiennicze formy lub układu form jest dane przez znikanie niezmienników lub tożsamościowe znikanie spółzmienników, to i sama forma musi czynić zadość jednemu lub kilku równaniom różniczkowym algebraicznym. Otrzymanie tych równań na tej drodze jest wszakże połączone w praktyce z wielkiemi trudnościami. Jeszcze

trudniejszem byłoby zadanie odwrotne: z danych równań różniczkowych dla form specyalnych wyprowadzić równoważne kryterya niezmiennicze.

Dla omawianego zadania ma znaczenie twierdzenie, dowiedzione najprzód przez Faà di Bruno dla form dwójkowych, które, według Hilberta i Perrina, daje się łatwo rozciągnąć na formy wyższe; twierdzenie to daje nam możność wykonania wzajemnego przeprowadzenia, o którem mowa.

Jeżeli $f(x)=f_0$ jest formą dwójkową w spółrzędnych niejednorodnych x:

$$f_0 = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots\dots + a_n,$$

i jeżeli $f_1, f_2, \dots\dots$ są pochodnemi formy f względem x, podzielonemi przez proste czynniki liczbowe, t. j.

$$f_1 = \frac{1}{n} f'(x), \quad f_2 = \frac{1}{n\,(n-1)} f''(x), \dots\dots,$$

to każdy spółzmiennik formy f_0 można otrzymać bezpośrednio z jego wyrazu głównego (źródła), zastępując spółczynniki a_i formami f_i. Stąd wynika odrazu, że każda funkcya jednorodna i izobaryczna F form f_i jest spółzmiennikiem formy $f(x)$, czyniącym zadość równaniu źródła:

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \dots\dots = 0.$$

Za pomocą tego środka pomocniczego pokazał Hilbert [105]), jak ze stanowiska teoryi niezmienników badać można n.p. funkcye kuliste i ogólniej te funkcye hypergeometryczne $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, które są funkcyami całkowitemi wymiernemi względem x. Jeżeli F ma być formą dwójkową ilości x, to α (lub β) należy przyjąć za równe liczbie całkowitej ujemnej $-n$; wtedy n wyraża rząd formy f.

Jeżeli φ i ψ są funkcye sześcienne lub liniowe w postaci jednorodnej

$$\varphi = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2, \quad \psi = \frac{3\gamma + 2(n-1)}{3\,(n-1)} x_1 + \frac{3\beta + n - 1}{3(u-1)} x_2,$$

to równanie liniowe na F przerabia się wprost na równanie między nasunięciami

$$(\varphi, f)_2 + (\psi, f)_1 = 0$$

i odwrotnie. Znajomość form φ i ψ pozwala odrazu znaleść te przekształcenia liniowe, które sprowadzają formę f do postaci szeregu hypergeometycznego F. Są to właśnie te sześć przekształceń, przez które forma sześcienna φ przyjmuje powyższy typ kanoniczny. Bardziej szczegółowe badanie pozwala jeszcze na wyeliminowanie form φ i ψ. Wypada mianowicie, że dla scharakteryzowania formy specyalnej koniecznem i dostatecznem jest znikanie pewnego niezmiennika, który znów prostym sposobem wyrazić się daje za pomocą czterech znanych spółzmienników zasadniczych.

Do II D. e.

Pytania odnoszące się do rzeczywistości.

Istnieją liczne, co do istoty swej bardzo odmienne, zastosowania teoryi niezmienników, zwłaszcza dwójkowych, do pytań o rzetelności pierwiastków równań algebraicznych i układów takich równań.

Do okresu dawniejszego należą tu badania klasyczne [106]) Hermite'a i Sylvestera, w których wszystkie różnice, jakie co do rzeczywistości mogą przedstawiać pierwiastki równania rzędu 5-go, scharakteryzowane są za pomocą kryteryów niezmienniczych. Poprzednio już Cayley zbadał był przypadek równań rzędu 3-go i 4-go [107]). Wspomnieliśmy już także o „prawie bezwładności" Sylvestera-Jacobi'ego [108]). Na początku nowego okresu wystąpił Schramm [109]) z dwiema godnemi uwagi pracami. Stare, rozstrzygnięte zupełnie przez Sturma pytanie o liczbie pierwiastków rzeczywistych pomiędzy danemi granicami, weszło w nowe stadyum z punktu widzenia teoryi form. Funkcye Sturma, których zmiana znaku stanowi tu rzecz główną, zastąpić można szeregiem jużto spółzmienników, już to niezmienników. W szczególności zachodzi twierdzenie, że gdy wszystkie pierwiastki równania $f=0$ są rzeczywiste, to pierwiastek spółzmiennika Hessego, przyrównanego do zera, są urojone; i odwrotnie. Sylvester [110]). dowiódł w inny sposób tego twierdzenia i zarazem rozszerzył je na wszystkie spółzmienniki stopnia 2-go (co do spółczynników formy f). Z drugiej strony Laguerre [111]) znacznie uogólnił znane procesy oddzielania i przybliżonego obliczania pierwiastków przez wprowadzenie środków pomocniczych z teoryi form (spółzmiennika Hessego itp.). W ostatnim czasie Fr. Meyer [112]) podał pewne prawo bezwładności dla równań algebraicznych $f_{2n+1}=0$ stopnia nieparzystego. Istnieje szereg zamknięty spółzmienników $f_1, f_2, \ldots, f_n$ taki, że układ tych $n+1$ równań $f=0$ — jeżeli odwrócimy uwagę od przypadków przejściowych — posiada liczbę pierwiastków rzeczywistych, niezawisłą od wyboru spółczynników.

Wspomnimy jeszcze krótko o pewnych pytaniach, tego rodzaju dla szczególnych utworów algebraicznych; wzięły one początek z pytań geometrycznych. Te wypadki zachodzą zawsze z konieczności, jeżeli dziedzinę zmiennych danej formy przeniesiemy do dziedziny zespo-

lonej. Należy tu przedewszystkiem interpretacya zmiennej zespolonej $z=x+iy$ na powierzchni kuli, wprowadzona przez Kleina [113]) na podstawie faktu, że przekształcenie liniowe zmiennej z znajduje swe wyrażenie w rzutowej geometryi miarowej na kuli. Jeżeli utworzymy grupę przekształceń liniowych zmiennej z, które bryłę foremną przekształcają na samą siebie, i jeżeli poddamy temu przekształceniu dowolny punkt z kuli, to łatwo poznać, które z tych wartości z są rzeczywiste; np. w przypadku dwudziestościanu takich pierwiastków jest ich zawsze cztery [114]).

Wedekind badał w tym sensie dwustosunek czterech punktów na kuli: okazuje się znowu, że dwustosunek ten wtedy tylko może być rzeczywisty, gdy te cztery punkty leżą jednocześnie na płaszczyźnie [115]).

Szczególną ważność dla geometryi krzywych płaskich i przestrzennych mają równania (dwójkowe), od których zależą miejsca osobliwe krzywych. Brill [116]) rozłożył wyróżnik takich równań na czynniki nieprzywiedlne, i stosownie do tego, czy wielokrotność tych ostatnich jest parzysta lub nieparzysta, podał zmiany rzeczywistości pierwiastków przy przejściu wyróżnika przez zero; tym sposobem na drodze czysto algebraicznej sprawdził pewien związek algebraiczny pomiędzy liczbami osobliwości, znaleziony poprzednio przez Kleina [117]) za pomocą rozważań geometrycznych. Fr. Meyer uogólnił to twierdzenie do krzywych w przestrzeni [118]).

Do II D. f.

O zastosowaniu teoryi form do teoryi grup przekształceń skończonych ciągłych.

Teorya niezmienników pozostaje w licznych związkach z teoryą grup przekształceń ciągłych i skończonych, jak to wielokrotnie okazał Lie. Typowy przypadek tego rodzaju zbadał Engel [119]). Idzie w nim o wyznaczenie wszystkich „zestawień" grup r-parametrowych. Taka grupa określa się przy pomocy związku:

$$(X_i X_k) = X_i(X_k f) - X_k(X_i f) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f,$$

gdzie stałe c mają wyłącznie czynić zadość warunkom:

$$c_{jks} = - c_{kis}, \quad C_{ijks} \equiv \sum_1^r {}_\nu\, (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{jl\nu} c_{\nu ks}) = 0,$$

$$(i, k, j, s = 1, \ldots, r)$$

$X_s = X_s f$ są (liniowo-niezależnem i) nieskończenie małemi przekształceniami grupy, mogącemi się przekształcać dowolnie liniowo, bez zmiany zestawienia grupy.

Jeżeli napiszemy równania, określające zestawienie grupy dla dwóch dowolnych kombinacyj liniowych ilości X:

$$F(x, y; X) \equiv \left(\sum_1^r x_i X_i,\ \sum_1^k y_k X_k\right) = \sum_{iks}^{1,r} c_{iks}\, x_i\, y_k\, X_s,$$

to forma trójliniowa F lub równanie $F=0$ przedstawia zestawienie grupy w tem znaczeniu, że wszystkie formy, powstające z formy F przez przekształcenie liniowe ilości $x, y; X$ (gdzie ilości X są przeciwpodstawieniowe względem spółpodstawieniowych x, y) dają to samo zestawienie. Dość tedy zbadać formę F ze stanowiska teoryi form, aby otrzymać jej układ zupełny i t. d.

Na podstawie związków pomiędzy ilościami c, forma F charakteryzuje się jako najogólniejsza trójliniowa, dla której znikają tożsamościowo oba spółzmienniki:

$$\sum_{iks}^{1\ldots r} (c_{iks} + c_{kis})\, x_i y_k\, X_s, \quad \sum_{ikys}^{1\ldots r} C_{ijks}\, x_i y_k z_j\, X_s.$$

Pierwszy warunek orzeka wprost, że F względem ilości x i y jest funkcyą naprzemienną dwuliniową. Aby zrozumieć znaczenie warunku drugiego, uważajmy na chwilę $F=0$ jako „symbol" nieskończenie małej kolineacyi:

$$\sum_1^r (x_i X_i) + \delta t\, F = 0.$$

Wtedy te ostatnie tworzą tak nazwaną grupę „dołączoną", t. j. grupę rzutową, izomorficzną z daną. Znikanie drugiego spółzmiennika pozyskuje obecnie treść taką, że przy każdem nieskończenie małem przekształceniu grupy dołączonej forma F pozostaje niezmienną. Najważniejsze zastosowanie tej interpretacyi jest to, że każda rozmaitość liniowa ilości x, będąca spółzmiennikiem formy F, przedstawia podgrupę „niezmienną" grupy pierwotnej.

Dalsze wnioski ze stanowiska teoryi grup znajdzie czytelnik w cytowanej nocie Engela.

PRZYPISY.

[1]) W dziele Liego-Scheffersa „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen" t. III, wyznaczone wszystkie podgrupy skończone ciągłe grupy rzutowej o 2, 3, 4 zmiennych. Do każdej z tych podgrup należy osobna teorya niezmienników, wymagająca oddzielnego opracowania. Phr. Knothe, Dissert, Lipsk 1892.

W tekście — oprócz kilku wzmianek o wyznacznikach ortogonalnych — mowa jest o półniezmiennikach.

[2]) Niektóre własności półniezmienników rozpatrzyliśmy już wyżej.

[3]) Niechaj dla prostoty będzie pojedyńcza forma pierwotna f_n ze spółczynnikami $a_0, a_1, \ldots, a_n$, i niechaj $a_0^{\alpha_0}, a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_n^{\alpha_n}$ będzie jednym z wyrazów należących do C_0, to, w istocie, przy wykonaniu podstawienia (A) wynika bezpośrednio, że tak suma $0 \cdot \alpha_0 + 1 \cdot \alpha_1 + 2_1\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n$ jak i suma $n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + (n-2)\alpha_2 + \ldots$, musi posiadać wartość stałą. Dodając obie sumy, widzimy, że także $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ jest stałe, że więc C_0 jest jednorodne. Toż samo stosuje się do form trójkowych i t. d.

[4]) Am. J. V s. 79—96 (1882) s. 97—137 (1883). W drugiej części pracy autor zajmuje się wyznaczeniem półniezmienników (perpetuantów) „nieprzywiedlnych", t. j. takich które dają się przedstawić jako funkcye wymierne całkowite półniezmienników niższych. Tu także otrzymuje dla pojedyńczych przypadków funkcyę tworzącą, która daje nam liczbę perpetuantów liniowo-niezależnych danego stopnia i wagi; rząd należącej tu formy pierwotnej nie ma znaczenia. Odnośny wzór ogólny podał Mac-Mahon. Por. też tablice Cayley'a, Quart. J. XIX, s. 131—138 (1883).

[5]) S. M. F. Bull XI, s. 88—107 (1883).

[6]) Dalsze rozwinięcie obu zasad zawdzięczamy Petersenowi. Zeuthen Tidsskr. (4), IV, s. 177—190 (1880), V s. 33 40 (1881), (5) VI s. 152—156 (1888). W ostatniej pracy są zastosowania do tworzenia układów zupełnych.

[7]) C. R. CII s. 916—917, Brux. S. sc. X s. 75—78, XI s. 314—319 (1887). Byłoby pożądanem zbadać związek ścisły pomiędzy metodą d'Ocagne'a a metodą Bruna i Mac-Mahona.

[8]) S. M. F. Bull. XVI s. 183—187 (1888), Brux. S. sc. XII s. 185—189.

[9]) Nouv. Ann. (3), VII s. 464—467 (1888).

[10]) C. R. CIV s. 961—964, 1364—1365 (1887). Por. Cayley, Quart. J. XXI, s. 212—213 (1885). Mac Mahon tamże s. 362—365. Tenże podał także generatory dla klasy „specyalnej" półniezmienników „asyzygetycznych", Am J. VIII s. 1—18 (1885).

[11]) C. R. CIV s. 1097—1099, 1258—1260 (1887).

[12]) Belg. Bull. (3) XIII s. 226—236 (1887).

[13]) Lond. M. S. Proc. XXI s. 219—233 (1889).

[14]) Belg. Bull. (3) XIV s. 53—79 (1887), tamże XV, s. 951—980 (1888), XVI s. 207—215, 576—589 (1889). Liège Mém (2) XV, dwie noty (1888), Belg. Mém. S, E. LI, trzy rozprawy, LII. Le Paige rozciągnął pojęcie półniezniemiennika na formy dwójkowe o większej liczbie szeregów ilości zmiennych, które mogą być też poddane różnym przekształceniom. Belg. Bull (3), II s. 40—53 (1881).

[15]) Essai d'une théorie générale etc. Dalszy ciąg badań w Belg. Bull. od 1892 r

[16]) l. c. Chap. II.

[17]) Różnica zasadnicza pomiędzy obu przedstawieniami jest ta. Kronecker zestawia ogólne podstawienia liniowe z pewnej liczby specyalnych, które razem wzięte zastąpić mogą pierwsze, a odpowiednio do każdej z nich otrzymuje równanie różniczkowe dla utworów niezmienniczych. Deruyts korzysta tylko z części specyalnych przedstawicielek, aby utworzyć równania różniczkowe dla funkcyj półniezmienniczych: zamiast reszty występuje szereg równości arytmetycznych (mianowicie wag $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$) prowadzący do utworu niezmienniczego.

[18]) Aby wyjaśnić to pojęcie, pomyślmy formę trójkową C_n z szeregiem zmiennych x_0, x_1, x_2; spółczynnik wyrazu $x_0^i x_1^k x_2^l$ $(i+k+l=n)$ niechaj będzie a_{ikl}. Niechaj będzie dana funkcya całkowita F ilości a jako aregat wyrazów $\Pi a_{ikl}^{\alpha_{ikl}}$, gdzie znak iloczynu rozciąga się na wszystkie ilości a, a wykładniki są $\geqslant 0$. Wtedy funkcya F nazywa się względem

skaźnika 0 izobaryczną, jeżeli suma $\sum_i i a_{ikl}$, rozciągnięta na wszystkie spółczynniki a posiada wartość stałą (t. j. wagę $\pi_{\overline{2}}$); podobnież nazywa się izobaryczną względem skaźnika 1, 2, . . . , gdy to samo stosuje się do $\sum_k k a_{ikl}$, $\sum_l l a_{ikl}$. . . . . Różnica pomiędzy tem znakowaniem, używanem w geometryi analitycznej, okazuje się wyraźnie na przykładzie. Krzywą C_4 według pierwszej reguły przedstawiamy w ten sposób:

$$x_0^4 a_{0000} + x_1^4 a_{1111} + x_2^4 a_{2222} + 4 x_0^3 x_1 a_{0001} + \dots ;$$

według drugiej zaś prościej:

$$x_0^4 a_{400} + x_1^4 a_{040} + x_2^4 a_{004} + 4 x_0^3 x_1 a_{310} + \dots ,$$

gdzie suma skaźników każdego spółczynnika jest ta sama, co suma wykładników.

19) Dowodzi się, że gdy spełnia się $n-1$ równań $[i, i+1] = 0$ $(i=1, 2, \dots, n-1)$ dla funkcyi izobarycznej, wtedy z a r a z e m spełniają się równania $[h, l] = 0$, w których skaźnik h jest mniejszy od skaźnika l.

20) Są to te same „zmienne pośrednie“ $p_{ik}, p_{ikl}, \dots$, które występują w ogólnych badaniach C l e b s c h a.

21) Postęp u D e r u y t s a polega właśnie na tem, że operuje się na daleko ogólniejszych funkcyach półniezmienniczych, zamiast na specyalnych wielkościach p. l. c. Cap. III.

22) l. c. s. 13—14.

23) l. c. s. 55.

24) l. c. s. 57.

25) l. c. s. 64.

26) l. c. s. 65.

27) Jeżeli x_{ik} $(i, k=1, 2, \dots, n)$ oznacza n szeregów po n zmiennych; $m_1, m_2, \dots, m_n$ odpowiednie rzędy form, to przez wyraz główny należy rozumieć spółczynnik przy $x_{11}^{m_1}\ x_{22}^{m_2}, \dots x_{nn}^{m_n}$.

28) l. c. s. 71.

29) Patrz wyżej II C. b. α.

30) l. c. Chap. IV. Wyżej już omawiano zastosowanie do wyznaczenia liczby utworów niezmienniczych liniowo-niezależnych danych rzędów i stopni.

31) l. c. s. 116 i nast. Uogólnienie przy funkcyach niezmienniczych znajduje się już na str. 23 i nast.

32) l. c. Chap. VI.

33) l. c. Chap. VIII; Bull. Belg. (3) XVIII, s. 152—167 (1892). Porówn. wyżej badania M a u e r a. S t u d y (Methoden etc. § 10) stosuje też takie ogólne „układy równań“ w celu rozwiązania zagadnienia o równoważności; znajdujemy już tu twierdzenie, że niezmienniczy układ równań można zastąpić szeregiem znikających niezmienników oraz tożsamościowo znikających spółzmienników.

34) Szczególnie ważnemi (także dla teoryi funkcyj eliptycznych) są funkcye dwójkowe kwadratowo-kwadratowe. Oba jej wyróżniki posiadają równe niezmienniki (C a y l e y, Quart. J. XI, s. 83—91, 1870; C a p e l l i, Batt G. XVII, s. 69—148, 1879; Z e u t h e n, Proc. L. M. S. X, s. 196—204, 1879. F r o b e n i u s (Journ. f. M. CVI, s. 125—138, 1890) bada szczegółowo równość takich form. Le P a i g e zbadał, że własność powyższa występuje także w odpowiedni sposób w formach wielokrotnie liniowych o trzech i czterech szeregach zmiennych dwójkowych.

35) Kombinantami w znaczeniu najogólniejszem są takie utwory niezmiennicze pomiędzy wymienionemi formami, w których jeden ze szeregów ilości zmiennych występuje tylko liniowo. Literaturę tego przedmiotu aż do r. 1833 znaleść można w dziele Fr. M e y e r a „Apolarität etc.“ Dodać tu należy: C l i f f o r d, Proc. L. M. S. II, s. 116—117 (1869);

D a r b o u x, Bull. I (1870). Jednym z najważniejszych kombinantów jest wyznacznik funkcyjny n funkcyj o n zmiennych, zbadany już szczegółowo przez J a c o b i'ego (patrz G o r d a n, Vorlesungen I). Wyznaczniki funkcyjne wyznaczników funkcyjnych są proporcyonalne do form pierwotnych (C l e b s c h, Journ. f. Math. LXIX, s. 355—358 (1868); LXX, s. 175—181 (1869), R o s a n e s, tamże LXXV, s. 166—172 (1872); P a s c h, tamże LXXX, Przedstawienie wyznacznika funkcyjnego dwójkowego, a także iloczynu dwóch takich wyznaczników przez formy pierwotne, (które zawdzięczamy C l e b s c h o w i) uogólnili: d'O v i d i o, Att. Tor. XIY, s. 963—972 (1889): Le P a i g e. Bull. Belg. (2) XLIX, s. 113—135 (1880), (3) I, s. 480—499 (1881); C. R. XCII, s. 688—690 (1881): T o r e l l i, Nap. Rend. XXV, s. 125—144 (1886).

36) Math. Ann. V, s. 95—122 (1872), zwłaszcza str. 116. Por. też V o s s. Münch. Ber. 1888, s. 15—19. W § 11 kombinanty R dla form dwójkowych redukują się do utworów prostszych.

37) Math. Ann. XXII, s. 393—405 (1883). W przypadku form dwójkowych autor otrzymuje bardzo przejrzyste wyrażenie symboliczne na wszystkie kombinanty stopnia pierwszego, należące do p form n-tego stopnia (l. c. str. 403). Dalsze badanie w Progr. Münches 1864. Por. W h i t e, Ann. I. XVII, s. 235—265 (1895).

38) Patrz II B. a, II C. b. δ.

39) Math. Ann. IV, zwł. s. 530 (1871). Porówn. G r a s s m a n n Ausdehnungslehre, 1862 Nr. 112. Toż samo twierdzenie stanowi też podstawę badań C l e b s c h a nad niezmiennikami form o n zmiennych (Gött. Abh. XVII, s. 1—62, 1872) i badań G o r d a n a nad największym wspólnym czynnikiem (Math. Ann. VII, s. 433—448, 1874), oraz cytowanych wyżej prac W. S t a h l a.

40) S t é p h a n o s, Sav. étr. 1883 (przedstawione w grudniu 1881, patrz referat G o r d a n a z grudnia 1881). B r i l l prowadzi dowód tego twierdzenia w ten sposób, że można je wprost rozszerzyć na układ form o dowolnej liczbie zmiennych (Math. Ann, XX, zwł. s 335. 1882, z datą kwiecień 1882). Por. co do form dwójkowych przedstawienie w dziele referenta „Apolarität etc.“ § 11.

41) Porówn. S t é p h a n o s (l. c.), B r i l l l. c.; Fr. M e y e r (l. c. Rozdz. II) rozprawy F r i e d r i c h a (Giessen 1886), G r o s s a (Tybinga 1887, także Math. Ann. XXXI, s 136—150, 1885), E M e y e r a (Królewiec 1888); B e r z o l a r i, Ann. di mat. 1892; Rend. di Pal. (1893).

42) l. c.

43) Ten „wyznacznik funkcyjny“ form f, albo „kombinant główny“, badał I g e l co do zależności jego od form f (w pismach Akad. Wiedeńskiej) i podał metody tworzenia kombinantów.

44) Co do związków pomiędzy pierwiastkami równań rzędu szóstego i piątego porów. S t é p h a n o s (l. c.), Fr. M e y e r l. c.

45) Journ f. M. LXXV, s. 172—176. Dalsze zastosowania Fr. M e y e r „Apolarität etc.“ W. S t a h l jeszcze głębiej wniknął w związki pomiędzy układami dwójkowemi apolarnemi i poczynił interesujące zastosowania do teoryi powierzchni rozwijalnych: Journ. f. Math. CI s. 73—98 (1886), s. 300—315 (1887); CIV s. 38—61 (1888), s. 302—320 (1889). Por. S t u d y, Leipz. Ber. 1886, t. 3—9. Czysto-geometryczną teoryę apolarności dwójkowej zawdzięczamy H. W i e n e r o w i (Rozprawa habilatacyjna, Darmstadt 1885). Porów. T h i e m e, Schlöm. Zeitsch XXIV, s. 221—229, 276—284 (1879); Math. Ann. XXIII, str. 596—598 (1884).

46) Journ f. Math. LXXV, s. 312—330 (1873).

47) P. S e r r e t w r. 1869 zbadał już szczegółowo znaczenie geometryczne związków liniowych pomiędzy jednakowemi potęgami form liniowych (Géométrie de direction, Paryż).

48) Journ. f. Math. LXXII, 293—326 (1870).

49) Porówn. G r a s s m a n n, Gött. Nachr., grud. 1872, s. 567—577.

[50] Przypadek rzędu 3-go badał niedawno O. Schlesinger dla dziedziny trójkowej. Rezultat główny tego badania brzmi geometrycznie w ten sposób: jeżeli krzywa trzeciego rzędu jest sprzężona z krzywą klasy trzeciej, wtedy pierwsza zawiera nieskończenie wiele pięciokątów biegunowych drugiej. (Por. też de Paolis, Acc. L, 1886). Dla tych pięciokątów biegunowych istnieje prosta konstrukcya (Math. Ann. XXX, s. 453-477, 1881). Ogólniejsze pojęcie apolarności rozwija tenże autor (Math. Ann. XXXI, s. 183—219, 1888), na tej zasadzie, że na krzywych eliptycznych można rachować z agregatami liniowemi pewnych iloczynów funkcyj ϑ, podobnie jak na krzywych wymiernych z funkcyami algebraicznemi. W szczególności wynika stąd, że wyżej podany warunek sprzężoności nie tylko jest konieczny ale jest i dostateczny. London (Math. Ann. XXXVI, s. 525—584) na tej postawie przedstawił jednę lub więcej form trójkowych sześciennych pod postacią sześcianów form liniowych F. Co się tyczy redukcyi, wspomnianej w tekscie, to krzywa klasy 2-ej k_2 jest apolarną do krzywej rzędu trzeciego C_3, t. j. do wszystkich stożkowych biegunowych krzywej C_3, lub jeżeli powierzchnia klasy 2-ej Φ_2 jest apolarną do krzywej przestrzennej rzędu 3-go φ_3, t. j. do wszystkich powierzchni rzędu 2-go, przechodzących przez φ_3.

[51] Jour. f. Math. XLV, s. 82—00 (1853).

[52] Rosanes badał w dalszym ciągu zastosowania do układów punktowych liniowo-zależnych. Journ. f. M. LXXXVIII, s. 241—273 (1880), XC s. 303—321 (1881), XCV s. 248—255 (1883), C. s. 311—316 (1887). Niedawno Reye wzbogacił geometryę nową gałęzią, mającą wiele punktów styczności z apolarnością, mianowicie teoryą rozmaitości liniowych pęków rzutowych płaszczyzn oraz kolinearnych wiązek i przestrzeni, oraz stosujących się tu zasad dualistycznych. Berl. Ber. 1889, s. 833—839; Journ. f Math. CIV s. 211—340 (1889), CVI s 30—47, 315—329, CVII s. 262—178 (1890), CVIII, str. 89—124 (1891). Por. W. Stahl, Journ. f. Math. CVII, s. 179—188 (1890).

[53] Fr. Meyer, „Apalarität i t. d.", Tybinga 1883. Te zasady przeniesienia (także dla utworów nieapolarnych) podał dalej Study, Leips. Ber. 1890, s 172 i nast.

[54] l. c. § 18.

[55] Stosowanie tej postaci normalnej ma znaczenie zasadnicze dla przejrzystości całego postępowania. Oczywiście, pewne pojedyncze czynniki można też wyprowadzić i dalej rozwijać przy przyjęciu za podstawę ogólnych form pierwotnych, jak to za pomocą rachunku symbolicznego okazali: Schlesinger dla dziedziny trójkowej, Lindemann dla czwórkowej. Por. O. Schlesinger, rozprawa ogłoszona we Wrocławiu 1882 lub Math. Ann. XXII s. 520—568; Lindemann, Math. Ann. XXIII, s. 111—142 (1884); tenże wychodził dawniej z „typowego" przedstawienia form dwójkowych.

[56] Rozprawa z r. 1882 lub Math. Ann. XXII, s. 520—568 (1883). Niezależnie doszedł do tej samej zasady Fr. Meyer (Math. Ann XXI, s. 528—564, 1883), rozwiązał ją ogólnie za pomocą środków niesymbolicznych w dziele „Apolarität".

[57] W przypadku, gdy rząd formy pierwotnej jest liczbą pierwszą, wprowadzamy jej biegunowe rzędu rozkładalnego. Zresztą czyni się tu obszerny użytek z „zasady rzutu", co do której patrz podstawową pracę Veronesego, Math. Ann XIX, str. 161—214 (1882).

[58] Fr Meyer, „Apolarität i t. d." § 32.

[60] Gross, Rozprawa z r. 1887, Tybinga 1887, lub wyciąg w Math. Ann XXXII, s. 136—130, Wstęp. Berzolari, Ann di mat. XX (1892), XXI (1893).

[61] Math. Ann. XXX, s. 30—74 (1887). Co do przypadków szczególnych patrz Math. Ann. XXIX, s. 548—467 (1887); XXXI, s. 96—133 (1888).

[62] Gött. Nachr. 1889, zwł str. 30; Math. Ann. XXXVI, s. 516 (1890). Postulat ten wymaga uprzednio przyjęcia możliwości żądanego „tworzenia". Powinno być zatem możliwem wyznaczenie dla danego układu $d+1$ form $f(\lambda)$ rzędu n-tego takich d układów $d+1$ form $\varphi(\mu)$ rzędów $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d$, aby każda suma $\sum f(\lambda)\varphi(\mu)$ była podzielna

przez $\lambda-\mu$, oraz aby suma ilości ν była równa n. Dla przypadku $p=3$ postulat ten udowodnił Fr. Meyer, l. c.

[63] Zasadę tę znajdujemy w najprostszej jej postaci w pracy Brilla, Math. Ann. XXXVI, s. 240—238 (1890), przedruk z dodatkami z Münch. Ber. 1885. Przedstawienie utworów końcowych jako kombinantów podał Fr. Meyer.

[65] Math. Ann. XXXVIII, s. 561—585 (1891), XL s. 1—54 (1892). Wywód polega tu przeważnie na wymienionych wyżej twierdzeniach o wyznacznikach. Porówn. też Schuhmacher, Math. Ann. XXXVIII, s. 298—306 (1892); Jolles, rozprawa habilitacyjna, Aachen, 1886.

[64] Nie podajemy tedy pięknych zastosowań wyróżników w teoryi równań różniczkowych i w teoryi arytmetycznej wielkości algebraicznych.

[66] Patrz np. Salmon-Fiedler, Nr 309, 310.

[67] Journ f. Math. LVIII, s. 273—291 (1861). Porówn. Gordan, Journ f. Math. LXXI, s. 164—194 (1870). Clebsch podał kryteryum podzielności formy f_n przez formę f_2 za pomocą znikającego tożsamościowo spółzmiennika (Binäre Formen, s. 81). Patrz uogólnienie u Igela, Wien. Ber. 1890, w którym zamiast f_2 jest funkcyą rzędu wyższego.

[68] Math. Ann. III, s. 355—414 (1871). W pracy, ogłoszonej w Gött. Nach. 1870, s. 426 i nast., Gordan podał układ równań różniczkowych cząstkowych dla wypadkowej form f_n i f_m ($n \geqq m$). Jeżeli φ_μ ($\mu \leqq n$) oznacza spółzmiennik jednoczesny form f_n i f_m, zawierający zarazem wspólne czynniki form danych, to nasunięcie μ-te formy φ na ewektant wypadkowej R jest podzielne przez R. Stąd wypływają równania żądane. Kryterya niezmiennicze istnienia pewnej liczby wspólnych pierwiastków dwóch form równego rzędu podał dla różnych przypadków Pascal według metody Gordana, Napoli Rend. (2) II, s. 402—409, Annali di Mat. (2) XVI, s. 85—99. Por. też Perrin, C. R. CVII, s. 22—24 (1888).

[69] Batt. G. XXV, s. 257—280 (1887), Napoli Rend (2) II, s. 67—72 (1888). Por. Berzolari Rend. Pal. 1897.

[70] Jak dotad, nie mają dla teoryi niezmienników znaczenia kombinatoryjno-symboliczne przedstawienie wypadkowej przez Schendela, Schlöm, Z. XXXII, s. 46—65, 83—90 (1887), XXXIII s. 1—13, 65—77 (1888), oraz przedstawienie Mac-Mahona za pomocą funkcyj symbolicznych, Quart. J. XXIII, s. 139—143 (1888).

[71] Cbelini Coll. Medyolan 1881, s. 221—223.

[72] Atti Tor. XV, s. 385—389, 1880 ($m=4$, $n=4$); Nap. Mem. XI, 1883 ($m=5$, $n=2,3$); Mem. Soc. It. d sc. IV (1888) lub Rom. Acc. L. Mem (4), IV s. 607—622, 1888 ($m=5$, $n=2,3,4,5$). Atti Tor. XXVIII 1882 ($m=6$, $n=5$).

[73] Vorlesungen, II Nr. 99. Za pomocą niezmienników zasadniczych wyrażono już poprzednio:

wyróżnik formy f_4, Boole 1845 (u Cayley'a, Papers, I, s. 94).

wyróżnik formy f_5, Salmon 1854, Cambr. a. Dubl. M. J. IX. s. 32.

wyróżnik formy f_6, Brioschi 1867, Annali di Mat. (2), I, s. 159.

Ostatni wynik otrzymał Maisano, Math. Ann. XXX, s. 442—452 (1885) za pomocą metody Gordana.

Strukturę wyróżników dwójkowych badali Joachimsthal, Journ. f. M. XXXIII, s. 371—376 (1846); Cayley, tamże XXXIV, s. 30—45 (1847); Pasch, tamże LXXIV, s. 1—6 (1872); Bauer, Münch. Ber. 1886, s. 183—191. Odpowiednie badania wypadkowej dwójkowej i trójkowej znajdujemy u Nöthera, Math. Ann. XXIII, s. 311—358 (1884), zwł, s. 315 i nast. Stahl (Math. Ann. XXXV, s. 395—400, 1889) przedstawił wypadkową dwóch form dwójkowych rzędu n-tego, jako wyznacznik $(n-1)^2$ elementów, związany z teoryą kombinantów.

[74] Math. Ann. XXXI, s. 566—600 (1888).

75) Pal. Rend. III, s. 53—59 (1889), IV s. 1—8 (1890).

76) Math. Ann. XXXI, s 493—506 (1888).

77) Torino Atti XXIV, s. 164—176 (1888).

78) Journ. f. Math. LXXX, s. 73—85 (1875).

79) Wien. Ber XCIII, s. 62—67 (1886).

80) Münch. Ber. XVII (1887). Co do przypadku $n=4$ patrz Klein, Math. Ann. XXXVI, zwł. s. 56.

81) Journ. f. Math. LIII, s. 372—376. Wypadkowa odnosi się do dwu form dwójkowego równego rzędu. Dla form rzędu nierównego podał później Gordan odpowiednie równania różniczkowe, Gött. Nachr. 1870, s. 427 i nast.

82) Bruno-Walter, „Binäre Formen etc." § 25.

83) Math. Ann. XXXIII, zwł. s. 279 (1888).

84) Math. Ann. III, s. 169—161 (1871).

85) Wien Ber. lipiec 1891, paźdz. 1891

86) Gött. Nachr 1891, s. 279—286.

87) Math. Ann. XVI, s 345—408, zwł. s. 388. Por. Math. Ann. XII, s. 90—122 (1877).

88) Dla płaszczyzny w Gött Nr. 1888, s. 7—77, Math. Ann. XXXVIII, s. 369—404 (1891); dla przestrzeni w Gött. N. 1890 lipiec, grudzień s. 493-501, 1891 styczeń s. 1—12.

W dziedzinie funkcyj algebraicznych jednej zmiennej istnieje zjawisko podobne „Wyróżnik" formy $C(1, s, z)$, t. j. wypadkowa form C i $\frac{\partial C}{\partial s}$ rozpada się na dwa czynniki wymierne, z których jeden daje rozgałęzienia krzywej $C=0$, druga zaś jej osobliwości (Kronecker, Journ. f. Math. XCI, s. 331—334, 1981). Por. uogólnienie rzutowe u Noethera, Math. Ann. XXIII, s. 341—358 (1884).

89) Math. Ann, XX, zwł. s. 336 i nast. (1882).

90) Patrz Russell, Quart. J XXI, s. 373—375 (1886); Hilbert, Math. Ann. XXXI, s. 489—492 (1888).

91) Gött. N. 1892. s. 89—92.

92) Math. Ann. XXX, s. 437—441 (1881). Zastosowaniem oddzielnem jest uogólnienie twierdzenia o tożsamościach pomiędzy jednakowemi potęgami form dwójkowych, podane przez Fr. Meyera w „Apolarität" s. 350 i nast.

93) Phil. Mag. (4), III 1852.

94) Metodę Bézouta rozciągnął End na funkcye o trzech zmiennych, które, prócz dla skończonej liczby układów wartości zmiennych, znikają jeszcze dla pojedyńczo-nieskończonego układu wartości (Rozprawa, Tybinga 1888 lub w wyciągu w Math. Ann. XXXV, s. 82—90, 1889).

95) Wiener Ber. XCVII, s. 618—622 (1888). Dla form dwójkowych odpowiednie traktowanie wypadkowej znajdujemy już u Kroneckera, Berl. Ber. 1881, s. 535—600.

96) Quart. J. XI, s. 211—213 (1871); porówn. też Journ. J. Math. XXXIV, str. 30—45 (1847).

97) C. R. CVI, s. 1789—1791; CVII s. 22—24, 219—221 (1888).

98) Math. Ann IV, s. 510—526, 527—549 (1871); Münch. Abh. XVII, s. 91—101.

99) l. c. Brill podał jeszcze uogólnienie inne, polegające na rozciągnięciu pojęcia wypadkowej na dwa szeregi potęgowe (Math. Ann. XXXIX, s. 129—141, zwł. 138, 1891); O. Schlesinger zaś rozpatrywał wcześniej wypadkowe i wyróżniki funkcyj ϑ (Math. Ann XXVII, s. 411—445, 1887).

100) Stéphanos, Thèse. 1883, Fr. Meyer Gött. N. 890 Nr. 10, Math. Ann. XXXVIII, s. 369—404, zwł. § VIII, 1891; Verhandl. der Bremer Naturforscherversammlung 1891, s. 9—11. Mówiąc geometrycznie, postępowanie to jest równoważne z pewnemi rzutami.

101) Z rozległego szeregu dalszych form specyalnych wydzielono w dalszym ciągu jeszcze dwie klasy, mające szersze znaczenie; patrz co do tego szereg not na końcu tego rozdziału.

102) Wspomnijmy o dwu innych jeszcze własnościach hesyanu H. Voss dowiódł ogólnie, że dla form sześciennych F o n zmiennych forma Hessego wysnacznika H jest kombinacyą liniową formy pierwotnej F i hesyanu H (Math. Ann. XXVII, s. 515—546, 1886). Dla $n=4$ twierdzenia tego dowiódł był wcześniej Bauer (Münch. Abh. 1883, s. 1—14) i zastosował je do geometryi powierzchni rzędu trzeciego. Z drugiej strony Brill, w celu zbadania krzywej Hessego $H=0$ w punktach osobliwych krzywej $C=0$, zbudował formę H z pewnych spółzmienników dwójkowych (Math. Ann. XIII, s. 175—182, 1878), według zasady, którą później rozwinął Forsyth. Toż samo zadanie geometryczne pobudziło Wölffinga do utworzenia formy H funkcyi całkowitej form trójkowych z najprostszych spółzmiennikkw jednoczesnych tych ostatnich form. (Rozprawa Tybinga 1890, albo Math. Ann. XXXVI, s. 97—120). Porówn. Gerbaldi, Pal. Rend, III, s. 60—66 (1889).

103) Gordan, Erl. Ber. 1876, s. 89—95; Noether, Erl. Ber. 1876, s. 51—56; Gordan i Noether, Math. Ann. X, str 547—568 (1876). Moment główny dowodu znajduje się w ostatniej pracy na str. 561. Pasch przy pomocy związków wyznacznikowych wykazał, że twierdzenie to jest prawdziwe dla form trójkowych sześciennych i czwórkowych sześciennych. Gordan w pierwszej z wymienionych tu prac rozwiązał całkowicie zadanie dla form trójkowych przez rozważanie hesyanu formy przywiedlnej ze względu na jej czynniki oraz związków, zachodzących pomiędzy biegunowemi. Można, według Gordana i Noethera, podać całe klasy form f o r (>4) zmiennych, do których nie stosuje się twierdzenie Hessego. Utwórzmy $r-s$ $\left(s<\frac{r}{2}\right)$ form

$$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{r-s}$$

o s zmiennych $x_1, x_2, \ldots\ldots x_s$ i złóżmy z nich nową formę:

$$Q = x_{s+1}\, P_1 + x_{s+2}\, P_2 + \ldots + x_r\, P_{r-s};$$

wtedy szukane formy f dają się przedstawić w postaci:

$$f = \varphi\,(Q, x_1, x_2, \ldots, x_s),$$

gdzie φ jest funkcyą jednorodną względem $x_1, x_2, \ldots, x_s$ (l. c. s. 564). W szczególności otrzymujemy wszystkie formy piątkowe, nie spełniające twierdzenia Hessego, w postaci:

$$f = \varphi\,(x_3 P_1 + x_4 P_2 + x_5 P_5, x_1, x_2),$$

gdzie P są formy dwójkowe jednakowego rzędu względem x_1, x_2.

104) Journ. f. Math. XLII, str. 117—124, (1851); LVI, s. 263—269 (1859).

105) Rozprawa, Królewiec 1885; Math. Ann. XXX, s. 15—29 (1887). Co do innych specyalnych form i grup podstawień. nie uwzględnionych w tekscie, wspomnijmy jeszcze co następuje:

Najprostsze formy dziedziny dwójkowej, trójkowej i czwórkowej ze szczególnem uwzględnieniem interpretacyi geometrycznej na układach pierwszego i drugiego rzędu badał systematycznie Battaglini: formy dwójkowe pierwszych czterech rzędów Rend. Acc. Napoli 1864, 1865, 1866; piątego rzędu Batt. G. XIV, s. 54—66 (1876), dowolnego rzędu Batt. G. IX, s. 1—18, 78—86 (1871). Zastosowanie form kwadratowych dwójkowych do przekształcenia różniczki eliptycznej znajduje się w Rend. Acc. Linc. (4) I, s. 653 — 657 (1885); Batt. G. XXIV, s. 128—140 (1885). Formy dwuliniowe dwójkowe: Rom Acc. L. (4) I. s. 691—699 (1885); Batt. G. XXV, s. 2-1—297 (1887). Też formy oraz ich zastosowania do obrotu przestrzeni około punktu stałego badał szczegółowo Stéphanos, Math. Ann. XXV, s. 299—368, 1883. Formy trójkowe rzędu drugiego: Atti di Napoli III 1867 dwie rozprawy; Batt. G. VIII s 38—59, s 129—156 (1870); trzeciego rzędu, Chelini Coll Mat. s 27—51 (1881) (kombinanty formy i jej hesyanu w traktowaniu dwójkowem) rzędu dowolnego: Batt. G. X, s 152—169, 193—205 (1872);—dwuliniowe: Rom. Acc. L. Mem IX (1880); Acc L. (3) V, 24—26 (1881), Batt. G. XXI, s 40—68 (1883); koneksy trójkowe pierwszego rzędu i pierwszej klasy: Atti di Napoli IX, (1880); Nap. Rend XIX, s. 110—112 (1881); drugiego rzędu i drugiej klasy: Atti di Napoli VIII (1879), Nap. Rend XIX s. 316—328 (1881). Formy czwórkowe dwuliniowe: Rom. Acc L. Mem. XII (1882); Acc. L (3) VI, s 40—42 (1882): Batt G. XXI, s. 293—323 (1883).

Wspomnimy jeszcze krótko o formach sześciennych trójkowych C_3. Poincaré całkowicie zbadał równoważność algebraiczną (i zarazem arytmetyczną) tych form (a także form sześciennych czwórkowych) Éc. Pol. s. 199—253, LI s 45—91, 1883. Stosownie do zachowania się dwu niezmienników S i T, formy C_3 dzielą się na siedem klas; dla każdej z tych klas ustanawia się podstawienia, które przekształcają formę na samą siebie. Na tem opiera się równoważność dwu form C_3 i C'_3, którą rozpatruje się jeszcze osobno dla przypadku rzeczywistych spółczynników i podstawień. W późniejszej pracy (Éc Pol. LVI, s 79—142, 1886) poddał Poincaré podobnemu badaniu rozpadające się formy C_3. Gundelfinger już poprzednio pokazał był, w jaki sposób ze stanowiska teoryi niezmienników można scharakteryzować wszystkie zniekształcenia formy C_3 (Math. Ann. IV, s. 561—571, 1871; Annali di Mat. (2), V s. 223—236, 1872 porówn Gordan, Math Ann. III, s. 631—632, 1871); wyniki te dla przypadku, w którym forma C_3 rozpada się na trzy czynniki liniowe, uprościli: Brioschi (Annali di Mat. (2) VII, s. 189—192, 1879) i Thaer (Math Ann. XIV, s. 545—556, 1871). Brioschi (Annali di Mat. (2), VII s. 52—60, 1875) badał paralelizm pomiędzy formami C_3 i f_4: por. Hilbert, Journ. ke Math. (4), IV s 246—256 (1888), gdzie zasada istotna jaśniej występuje. Brioschi zastosował to badanie do przekształcenia trzeciego rzędu funkcyj eliptycznych, należących do f_4 lub C_3, rozważanego już poprzednio przez Cayleya (Quarl. J. XIII s. 211—216, 1874).

Dingeldey podał proste przekształcenie formy C_3 ze znikającym wyróżnikiem na postać kanoniczną (Math. Ann XXX, s. 177—182, 1888); Gross badał tworzenie się takich form C_3. Harnack badał równanie różniczkowe, związane z pewnemi formami pośredniemi Clebscha dla form C_3 (Math. Ann. IX, s. 218—240, 1875).

Do poznania pojedyńczych utworów niezmienniczych przyczynili się nadto: Bonsdorff (Helsingfors, 1876), Gerbaldi (Atti Tor. XV, s. 707—714, 1880); Maisano (Pal. Rend. IV s. 153—158, 1880) i inni

Wyjaśnienie znaczenia geometrycznego najważniejszych utworów, należących do formy C_3, znaleść można w dziele Clebscha-Lindemanna, t I, cz. 2-ga, dział 1; gdzie zarazem wskazana jest dalsza literatura. Najprostsze utwory niezmiennicze formy sześciennej czwórkowej wraz z interpretacyą geometryczną podane są w geometryi przestrzeni Salmona-Fiedlera Rozdz. V, s 318—324

Co do specyalnych grup podstawień (patrz I A i II Da) można do poprzednich uwag o grupach ortogonalnych dodać jeszcze wiadomości następujące:

Prym (Gött. Abh. 1892) rozciągnął na podstawienia inwolucyjne, podane przez Cayley'a, przedstawienie wymierne spółczynników ogólnego podstawienia ortogonalnego n-tego rzędu przez $\frac{1}{2} n(n-1)$ parametrów niezależnych. Równanie „charakterystyczne" ma wtedy pierwiastki $+1$ i -1; jeżeli m jest liczbą pierwiastków równania, to liczba parametrów wynosi $2mn$. Prym wyprowadza wzór wyraźny na całkowitą liczbę inwolucyj, a w szczególności inwolucyjno-ortogonalnych układów spółczynników, należących do danej liczby m (Porówn cytowane w rozdziale o równoważności form różniczkowych, Część I, prace Lipschitza i Kroneckera). Inną metodę wyprowadzania i formułowania tych wyników podał Cornely (Rozprawa, Würzburg, wydana w Getyndze 1892), który pokazał nadto, w jaki sposób przejść można od jego wzorów do wzorów Pryma.

Hofmann (Hoppe Arch. (2), VIII. s. 225—268, 1889) stara się podać ogólne wyrażenie parametrowe dla podstawień charakteru inwolucyjnego, przekształcających na samą siebie funkcyę całkowitą stopnia drugiego i trzeciego.

H. Wiener badał ogólnie przy pomocy środków geometrycznych grupy pokrewieństw inwolucyjnych („odzwierciadlań"). Leipz. Ber 1890, s 13—21, 71—87, 245—267 1891, s. 424—447

Nie możemy tu bliżej omawiać teoryi pojedyńczych inwolucyj, badanych geometrycznie przez Bertiniego, Weyra i innych, a także intepretacyi geometrycznej form dwójkowych na układach wymiernych, mającej już rozległą literaturę.

106) Porówn. zwł. Hermite, C. R. 1853 I; Jacobi J. für. Math. LIII, s. 275—280; Sylvester, Phil Trans. Lond. 1864, s. 579—666: Cayley, VIII Mem tamże, 1867 s. 513—554.

107) Pozostawioną tu lukę wypełnił Nöther, który okazał, w jaki sposób przy pomocy kryteryów niezmienniczych można dokładnie rozdzielić oba przypadki czterech pierwiastków zespolonych i czterech pierwiastków rzeczywistych.

Modele Rohna (patrz niżej) przedstawiają poglądowo wszystkie kryterya rzetelności pierwiastków równania rzędu czwartego

108) Dodajmy tu, ze Weierstrass, Lipschitz, Stickelberger i Voss zajmowali się także przekształceniem rzeczywistem form rzeczywistych dwuliniowych i kwadratowych

109) Annali di Mat. (2), I, s 256—279 (1867): II. s. 41—55 (1869)

110) Journ. f. Math LXXXVII, s. 217—219 (1879) Co do spółzmiennika Hessego patrz Gerbaldi, Pal. Rend III, s 22—26; Schoute, tamże s. 170—164 (1889).

111) Badania Laguerre'a z C. R. 1879, 1880, 1881, 1882, zebrane są w rozprawie w Journ de Math. (3), IX s. 99—147 (1883).

112) Gött. Nachr. 1891, s. 272—286.

113) Patrz Program erlangeński Kleina 1872 (Prace mat. fiz. V). Segre i Juel badali systematycznie własności rzutów najprostszych utworów na płaszczyźnie i w przestrzeni w założeniu, że tak spółrzędne punktów, jak i spółczynniki podstawień są ilościami zespolonemi. Segre (Atti di Torino XXV, 1890, styczeń, marzec, kwiecień, listopad; Math. Ann. XL, s. 413—467, 1892); Juel, Acta Mat. XIV, s. 1—30 (1890).

114) Math. Ann. IX, s. 183—20 (1875).

115) Math. Ann. IX, s. 209—217 (1871)

116) Math. Ann. XVI, s. 345—408, zwł § 7.

117) Math. Ann. X, s. 189—209 (1876). Poprzednio już Zeuthen zbadał był szczegółowo stosunki rzetelności 28 stycznych podwójnych krzywej płaskiej rzędu 4-go oraz jej 24 stycznych zwrotnych (Math Ann. VII, s. 410—432, 1874); liczba maksymalna zwrotów rzeczywistych wynosi ośm. Inne rozważanie rzetelności odnosi się do liczby gałęzi rzeczywistych krzywej algebraicznej rzędu n-tego. Harnack (Math. Ann. X, str 189—198, 1876) wykazał, że dla płaszczyzny liczba ta wynosi najwyżej $p+1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ i że to maximum daje się i osiągnąć. Hilbert wykazał, że dla krzywych przestrzennych liczbę powyższą należy zastąpić przez $\frac{1}{2}(n-2)^2+1$ lub $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ stosownie do tego, czy n jest parzyste lub nieparzyste, oraz że krzywe o takiej liczbie gałęzi rzeczywistych istnieją.

Klein w odczytach swych (semestr letni 1864) o powierzchniach Riemanna, badał rzeczywistość tak zwanych „linij symetryi". Porówn. F. Klein „Odczyty o matematyce", przekład polski, Warszawa, 1899. Dalsze twierdzenia o liczbie i uporządkowaniu gałęzi rzeczywistych krzywych płaskich algebraicznych z punktami podwójnemi podał Hulburt (Ann. J. XIV, s. 246—260, 1892). Za pomocą przejścia ciągłego od krzywej n-tego rzędu do krzywej rzędu $(n+1)$-go można wykać, że istnieje krzywa algebraiczna rzędu n-tego z $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punktami podwójnemi rzeczywistemi (i nie odosobnionemi). Zresztą stosunki rzetelności pierwiastków równań, dających osobliwości, są jeszcze mało znane.

[118]) Gött. N. 1897, s. 1—13. Fr. Meyer badał przykładowo krzywą wymierną przestrzenną 4-go rzędu pod względem stosunków rzetelności jej osobliwości. Rohn zbudował modele nitkowe, ilustrujące te stosunki, zwłaszcza dla odpowiedniej powierzchni rozwijalnej. Porówn. dwie noty w Leipz. Ber. 1891, 1892.

[119]) Leipz. Ber. 1886, s 83—96. Byłoby bardzo pożądanem dalsze rozwinięcie badań, poruszonych przez Engela.

SPIS RZECZY

Dopełnienia do części II.

Dodatek do artykułu:

„UWAGI O RÓWNANIU GAUSSA W TEORYI FUNKCYI GAMMA“.

PODAŁ

M. LERCH.

W wymienionym artykule na str 5 tomu niniejszego mowa jest o funkcyi skończonej i ciągłej $\varphi(w)$, mającej własność:

$$\sum_{\alpha=0}^{m-0} \varphi\left(\frac{w+\alpha}{m}\right) = m\,\varphi(w).$$

Że funkcya ta redukuje się koniecznie do ilości stałej, dowodzi się najprościej tak. Z równania poprzedzającego mamy:

$$\varphi\,(w) = \sum_{\alpha=0}^{m=0} \varphi\left(\frac{w+\alpha}{m}\right)\frac{1}{m},$$

a przechodząc do granicy dla $m=\infty$, otrzymujemy:

$$\varphi\,(w) = \int_0^1 \varphi\,(x)\,dx,$$

t. j.

$$\varphi\,(w) = A.$$