Przyczynek do historyi zasad rachunku nieskończonostkowego.

(Krytycy „Teoryi funkcyj analitycznych“ Lagrange'a [1]).

PODAŁ

S. DICKSTEIN.

Podstawy analizy wyższej, przedstawione podług różnych sposobów pojmowania w pracach Leibniza, Newtona, Eulera i d'Alemberta wydawały się matematykom XVIII stulecia, dążącym przedewszystkiem do jasności zasad, bardzo dalekiemi od ścisłości starożytnych i zarazem uwikłanemi w ciemną metafizykę [2]). Szukano więc metody, wolnej od wszelkich rozważań nieskończonostkowych i granicznych, w którejby podstawy analizy wyższej rozwinąć się dały w ten sposób, w jaki analiza zwykła rozwija swe twierdzenia o wielkościach skończonych [3]).

Pierwszy pomysł takiego przekształcenia powziął Lagrange w rozprawie, ogłoszonej w r. 1772 w „Pamiętnikach Akademii berlińskiej“ p. t. „Sur une nouvelle espèce du calcul relatif à la différentiation et l'intégration

[1]) Artykuł ten ogłoszono równocześnie w „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“ t. XIII, Lipsk 1899.

[2]) Patrz: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, t. III, 1898, str. 714—718. M. Simon, Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung, w wydawnictwie: „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“, stanowiącem suplement do „Zeitschrift der Mathematik und Physik“, zesz. XII, 1898; Lagrange we wstępie do swej „Teoryi funkcyj analitycznych“, omawiając tę metodę oraz „Analizę rezydualną“. Landena powiada: „Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du calcul différentiel et même le dénomination de ce calcul montrent, ce me semble, qu'on n'avait pas saisi la véritable théorie quoiqu'on eût trouvé d'abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations“ (wydanie trzecie 1847, str. 4, 5). Porów. też Lagrange'a „Leçons sur le calcul des fonctions, Leçon première“ (wydanie z roku 1806, str. 1—3).

[3]) Patrz „Calcul des fonctions“ str. 5.

des quantités variables“ [4]). Daje tu Lagrange nowy dowód czysto-formalny szeregu Taylora. Dowód ten polega na przyjęciu, że gdy u jest funkcyą zmiennej x, wtedy

$$u(x+\xi) = u(x) + p\xi + p'\xi^2 + \ldots\ldots;$$

jeżeli, po pierwsze, zamiast x napiszemy $x+\omega$, i po drugie, weźmiemy $\omega+\xi$ zamiast ξ, otrzymamy dwa rozwinięcia na $u(x+\xi+\omega)$. Porównanie tych rozwinięć prowadzi do związków pomiędzy spółczynnikami szeregu na $u(x+\xi)$, z których to związków wynika forma szukana. Lagrange czyni nadto uwagę, że wzór Taylora może być wzięty za podstawę nowej metody rachunku nieskończonostkowego [5]).

Wykonanie tego pomysłu zdawało się wówczas tak ważnem, że wielu matematyków, pobudzonych tą uwagą Lagrange'a, albo też może niezależnie, starało się ten cel osiągnąć. Znanemi są w dziejach rachunku odnośne proby Condorceta [6]), Arbogasta [7]), Pasquicha [8]), Ser-

[4]) Oeuvres de Lagrange, t. VII, str. 324—328.

[5]) „Le calcul différentiel considéré dans toute sa généralité consiste à trouver directement et par des procédés simples et faciles les fonctions $p, p', p'', \ldots, q, q', q'' \ldots$, dérivées de la fonction u, et le calcul intégral consiste à retrouver la fonction u par le moyen de cette dernière fonction. Cette notion des calculs différentiel et intégral me paraît la plus claire et la plus simple qu'on n'avait encore donnée; elle est, comme on voit, indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes“ (Rozprawa z r. 1772).

[6]) O próbie Condorceta wspomina Lacroix w swoim „Traité du calcul différentiel“ (3 wyd. str. XXII).

[7]) Arbogast przedstawił w r. 1789 Akademii paryskiej rozprawę p. t. „Essai sur des nouveaux principes du calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infiniment petits et des limites“ (Patrz przedmowę do dzieła tegoż autora: „Calcul des dérivations“, Strassburg 1800). Lagrange wspomina o tej rozprawie we wstępie do swojej „Teoryi funkcyj analitycznych“. Rozprawa Arbogasta nie była drukowana. Porówn. Lacroix, „Traité du calcul différentiel et intégral“ Préface str. XXIX.

[8]) Pasquich, „Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung“ w zeszycie VIII czasopisma Hindenburga „Archiv der reinen und angewandten Mathematik“. Rozprawy tej nie mieliśmy w ręku, ale główne zasady rozwiniętej w niej metody czerpiemy z dziełka Johanna Schulza p. t. „Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien“ (Królewiec, 1803). Pasquich zakłada następującą formę rozwinięcia:

$$y = Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + \ldots\ldots;$$

jeżeli w tym szeregu każdy wyraz pomnożymy przez jego wykładnik przy z, otrzymamy tak zwany eksponencyał (Exponential) ilości y, który oznacza się przez ey. Będzie tedy:

$$ey = aAz^\alpha + bBz^\beta + cCz^\gamma + \ldots\ldots,$$

stąd zaś wynikają twierdzenia główne:

vois'a[9]) i innych. Wszakże dopiero „Teorya funkcyj analitycznych“ samego Lagrange'a stanowi najznakomitszą pracę, na tym pomyśle opartą; w niej bowiem nietylko wyłożona jest całość rachunku różniczkowego i całkowego według jednolitej metody, ale nadto z tegoż samego stanowiska traktowane są zastosowania analizy do problematów geometrycznych i mechanicznych [10]).

Następujące dwa założenia tkwią w zasadach metody Lagrange'a:

1) Każda funkcya daje się w ogóle rozwinąć na szereg nieskończony według potęg całkowitych dodatnich argumentu.

$$\varepsilon . xy = y . \varepsilon x + x . \varepsilon y,$$

$$\varepsilon . x^n = n x^{n+1} . \varepsilon x,$$

$$\varepsilon . \frac{x}{y} = \frac{y \ \varepsilon x - x . \varepsilon y}{y^2}.$$

. . . . . .

Działania zasadnicze tego rachunku wykładniczego są zatem zupełnie podobne do działań rachunku różniczkowego. Pasquich wszakże, jak czytamy dalej, jest od zamiaru usunięcia przez swój rachunek rachunku Leibnizowskiego tak dalekim, że nawet w „Intelligenzblatt der Allg. Lit. Zeitung“ 1798 nr. 99, wyraźnie oświadcza, iż uważa wprost za zbędny wszelki nowy rachunek, przez który usiłuje się zastąpić to, czego braknie źle wykładanemu rachunkowi różniczkowemu“. Z tego samego źródła dowiadujemy się, że nowy rachunek „Expositionsrechnung“ Grüsona (Mémoire sur le Calcul d'exposition, inventé par Jean Philippe Grnson, professeur royal des mathématiques, Berlin, 1802) zgadza się co do istoty rzeczy z rachunkiem wykładniczym Pasquicha.

[9]) Servois przedstawił Akademii paryskiej w latach 1805 i 1809 dwie rozprawy o zasadach analizy wyższej. Obie nie były ogłoszone drukiem. Artykuł, drukowany w Annales de Mathèmatiques V, str. 91—103 (1814—1815) p. t. „Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel“ jest wyjątkiem z tamtych rozpraw. Rozważa w nim Servois różnice i różniczki funkcyj ze stanowiska teoryi działań („La différence et la différentielle possédent deux propriétés en commun: d'être distributives et commutatives entre elles“). Stanowisko Servois'a względem metody nieskończenie małych charakteryzuje ustęp, który wyjmujemy z innej rozprawy, ogłoszonej w tymże tomie Annalów (str. 141—170) i skierowanej głównie przeciwko „Filozofii nieskończoności“ Wrońskiego (patrz niżej). Rozprawa ta nosi tytuł: Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel et particulièrement sur la doctrine des infiniment petits“. Oto co czytamy w tej pracy: „Je suis convaincu que la methode infinitésimale n'a ni peut avoir de théorie qu'en pratique; c'est un instrument dangereux entre les mains des commençants qui imprime nécessairement et pour longtemps un caractère de gaucherie, de pussilanimité à leurs recherches dans la carrière des applications. Enfin anticipant à mon tour sur le jugement de la postérité j'ose prendre que cette méthode sera un jour accusée et avec raison d'avoir rétardé le progrès des sciences mathématiques“.

[10]) Dzieło to wyszło w r. 1797 p. t: „Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'evanouissantes, de limites, et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. Wydanie drugie ogłoszono za życia autora w r. 1813; trzecie, przygotowane przez Serreta, wyszło w r. 1847, także w „Oeuvres IX“.

2) Rozważania nieskończonostkowe i graniczne nie są wcale potrzebne do uzasadnienia analizy wyższej; ta cała dziedzina nauki może być rozwinięta sposobem bardzo prostym na drodze algebraicznej z twierdzenia, wyrażonego w założeniu poprzedniem.

Lagrange stara się usprawiedliwić pierwsze z powyższych dwu założeń sposobem następującym. Jeżeli $f(x)$ jest funkcyą zmiennej x i jeżeli zamiast x weźmiemy $x+i$, gdzie i jest wielkością dowolną, wtedy $f(x+i)$ daje się przedstawić w postaci szeregu $f(x)+pi+qi^2+ri^3+\ldots$, w którym $p, q, r \ldots$ mają być funkcyami zmiennej x, niezależnemi od i. Przypuszczanie to, powiada Lagrange, stwierdzają rozwinięcia funkcyj znanych, nikt wszakże dotąd nie szukał uzasadnienia a priori tego przypuszczenia. Uzasadnienie to polegać ma na tem, że szereg powyższy dla ogólnych (nieoznaczonych) wartości zmiennych x i i nie powinien zawierać potęg ułamkowych i ujemnych ilości i. Gdyby bowiem zawierał potęgi ułamkowe, to liczba różnych wartości szeregu $f(x+i)$—Lagrange ma tu na oku funkcye z pierwiastnikami—byłaby większa od liczby różnych wartości funkcyi $f(x)$, co jest niedorzecznem [11]). Gdyby zaś rozwinięcie funkcyi $f(x+i)$ zawierało potęgi ujemne ilości i, wtedy $f(x+i)$ dla $i=0$, a więc i sama funkcya $f(x)$ byłaby nieskończoną, co może mieć miejsce tylko dla pojedyńczych wartości zmiennej x.

Po takiem uzasadnieniu rozwinięcia funkcyi $f(x+i)$ na szereg:

$$f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots\ldots$$

daje się już uzasadnić i założenie drugie. Spółczynniki $p, q, r, \ldots$ tego szeregu są funkcyami zmiennej x; jeżeli pierwszy spółczynnik p nazwiemy funkcyą pochodną funkcyi pierwotnej $f(x)$ i oznaczymy przez $f'(x)$, wtedy—jak łatwo dowieść—$2q$ jest pochodną funkcyi p, $3r$—pochodną funkcyi q i t. d. W ten sposób otrzymujemy kolejne pochodne funkcyi danej: pierwszą $f'(x)=p$, drugą $f''(x)=2q$, trzecią $f'''(x)=2.3.r$ i t. d. Te pochodne (dérivées) funkcyi danej są identycznemi z odpowiedniemi ilorazami różniczkowemi (quotients différentiels), otrzymywanemi za pomocą metody nieskończonostkowej lub granicznej, a więc wyprowadzonemi jakoby bez rozważań granicznych. Tym sposobem dalsze rozwinięcie całej nauki nie wymaga już, podług Lagrange'a, żadnych rozważań nieskończonostkowych.

---

[11]) Cette démonstration—powiada Lagrange—est générale et rigouseuse tant que x et i demeurent indéterminées; mais elle cesserait de l'être, si l'on donnait à x des valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruissent quelques radicaux dans $f(x)$ qui pourraient néanmoins subsister dans $f(x)$“ (Théorie des f. a. 3 ed. p. 9). Niektóre przypadki, w których „la règle générale est en défant“ bada Lagrange w rozdziale V swego dzieła.

Dzięki powadze imienia Lagrange'a „Teorya funkcyj analitycznych“ szybko się rozeszła i pozyskała wpływ wielki. Podziwiano w niej bogactwo treści i wysokie zalety świetnego wykładu, a mniej zastanawiano się z początku nad sposobami uzasadnienia podstaw metody Lagrange'a [12]).

Carnot w znanem piśmie „Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal“ uważa metodę Lagrange'a za rodzaj „metody ilości nieoznaczonych“. Podstawa jej wydaje mu się zupełnie pewną [13]); główną zaś

[12]) W sprawozdaniu, ogłoszonem p. t.: „Rapport historique sur le progrès des sciences depuis 1789 et sur leur état actuel“ i przedstawionem cesarzowi Napoleonowi (Paryż 1810) czytamy: „M. Lagrange dans son mémoire célèbre avait déposé une de ces idées fécondes qui n'appartiennent qu'aux génies de premier ordre; il avait indiqué les moyens de ramener au calcul purement algébrique les procédés du calcul infinitésimal en écartant soigneusement toute l'idée de l'infini. Frappés de ce trait de lumière plusieurs géomètres cherchaient des développements que nul ne pouvait donner aussi bien que l'inventeur. M. Lagrange ayant accepté les fonctions d'instituteur de l'Ecole polytechnique y créa sous les yeux de ses auditeurs toutes les parties dont il a depuis composé son Traité des fonctions analytiques, ouvrage classique dont il serait bien superflu de faire aujourd'hui l'éloge et qu'il suffit d'avoir cité etc.“ Crelle („Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Grössen t. I, str. 39 i następne) pisze, że w całym zakresie zasad i nawet rozwinięcia Rachunku z ilościami zmiennemi nie ma wewnątrz samego Rachunku najmniejszego śladu konieczności idei tak zwanej nieskończoności, która, zdaje się, sprowadziła ciemność w tej części Rachunku. Wprawdzie istnieje jedno miejsce, w którem idea nieskończoności była, albo też może i dziś jest jeszcze mniej lub więcej konieczna (mianowicie zastosowanie Rachunku do wielkości geometrycznych), lecz miejsce to, jak mówi Crelle, nie leży wewnątrz Rachunku. Co się tyczy słabej strony na miejscu zastosowań Rachunku, to jak wiadomo, i ta została faktycznie usunięta, gdyż ten sam wielki mąż, któremu w ogóle zawdzięczamy poprawę pomysłów w rachunku ilości zmiennych dowiódł i tu, że bez idei nieskończoności przynajmniej obyć się można i że przejście od Rachunku do zastosowań da się przeprowadzić przy pomocy rozważań, nie ustępujących w niczem pod względem ścisłości i właściwości wyobrażeniom starożytnych.

O metodzie Lagrange'a pisali już poprzednio: Johann Schultz (l. c.) i E. G. Fischer (Ueber den eigentlichen Sinn der höheren Analysis, Berlin 1808) w sposób bardzo korzystny.

Aby nie pominąć i filozofów, powiemy, że Comte w swoim „Kursie filozofii pozytywnej“ (t. I, 1829) nazywa metodę Lagrange'a: „la plus rationelle et la plus philosophique de toutes“; dla zastosowań zaś wydaje mu się ona zbyt skomplikowaną. W „Logice“ Hegla (według C. Frantza („Die Philosophie der Mathematik, 1842) metoda Lagrange'a jest uważana za najbardziej naukową.

W rozmaity sposób starano się uzasadnić twierdzenie Taylora, stanowiące podstawę metody Lagrange'a. Odnośna literatura dawniejsza zebrana jest u Klügela „Mathematisches Wörterbuch“, część piąta t. I, 831, artykuł: „Taylor's Lehrsatz“.

[13]) „Afin de conserver dans tout le cours de ses opérations, l'exactitude rigoureuse dont il s'est fait de ne jamais s'écarter, Lagrange qui fait aussi usage des différentielles, sous une autre dénomination et sous une autre notation, les considère comme des quantités finies indéterminées. En conséquence, il ne néglige aucun terme et prend ses différentielles comme on l'était dans le calcul aux différences finies. C'est à quoi il parvient par le théorème de Taylor, dont il fait la base de sa doctrine, et qu'il démontre directement par l'analyse ordinaire tandis qu'avant lui on ne l'avait encore démontré que par le secours même du calcul différentiel“ (wyd. 5-e, str. 156).

trudność w przyjęciu tej „pełnej jasności metody“ widzi Carnot przedewszystkiem w nowości algorytmu Lagrange'owego, którego przyjęcie musiałoby spowodować przerobienie całej prawie odnośnej literatury matematycznej [14]). Właściwej krytyki zasad metody Lagrange'a nie znajdujemy u Carnota.

Lacroix w swoim wielkim trzytomowym „Traktacie rachunku różniczkowego i całkowego“ stara się uzasadnić twierdzenie Taylora na drodze indukcyjnej, t. jest dla poszczególnych klas funkcyj. Znane mu dotychczasowe dowody tego twierdzenia nie zadawalają go dla tego, że są zbyt akstrakcyjne i nie zwalniają od obowiązku rozstrząsania osobnego przypadków wyjątkowych [15]). W tomie trzecim tego dzieła, może pod wpływem pewnych krytyk, które pojawiły się w czasie pomiędzy ogłoszeniem tomu I-go i III-go, a o których niżej mowa będzie, wypowiada Lacroix pewne wątpliwości co do sposobu uzasadnienia założeń Lagrange'a, ale nie daje sam żadnej określonej i pewniejszej zasady [16]).

Jest godnem uwagi, że wątpliwości co do prawdziwości zasad metody Lagrange'a pierwsi wypowiedzieli matematycy niefrancuscy: Burja, Wroński, Śniadecki, Bolzano.

Burja w rozprawie p. t. „Sur le développement des fonctions en séries“ (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1801, str. 21) powiada, że wprawdzie dla funkcyj najprostszych sprawdzają się założenia Lagrange'a, lecz nie wynika stąd bynajmniej, by założenie to miało być prawdziwem i dla funkcyj bardziej złożonych. Część drugą dowodu Lagrange'a (odnoszącą

[14]) „Ainsi, par exemple, il faudrait refondre toutes les collections académiques, tous les écrits d'Euler et ceux de Lagrange lui même“ (l. c. str. 158).

[15]) Wydanie drugie, 1810, t. I, str. XXI: „Ces propositions, si générales en apparence, ont plus d'éclat que d'utilité, puisqu'elles ne dispensent pas l'examen des cas ou elles sont en défaut; il vaut mieux ne montrer ces cas que succesivement, à mesure qu'ils se présentent d'eux-mêmes, que les faire prévoir d'avance et comme des accessoires, au moment ou le lecteur n'embrasse qu'avec peine le petit nombre d'idées principales que vous lui présentez“.

[16]) „En rapportant cei Chap III, vol I, p. 339) te raisonnement sur lequel s'appuie Lagrange pour prononcer que le développement général de l'accroissement d'une fonction ordonné suivant les puissances de celui de la variable indépendante ne doit point contenir de puissances fractionaires de ce dernier, c'est à dessin que je me suis servi du mot "parait" (ligne VI en rêmontant) parce qu'en effet ce n'est la qu'un aperçu qui aurait besoin d'être justifié par des preuves que l'auteur de la „Théorie des fonctions“ n'a point données. Le principe qu'il emploie est très admissible comme explication de la circonstance qui rend la série de Taylor inapplicable mais non pas comme un principe évident par lui même dans l'état géneral des choses“ (Lacroix Traité etc.“ t. III, 1819, str. 629—630).

się do związków pomiędzy spółczynnikami) uważa Burja za zupełnie uzasadnioną, ale pozostaje według niego jedna trudność, a jest nią uzasadnienie możliwości rozwinięcia. Mniema on, że trudność ta dałaby się usunąć w sposób następujący: „Nie mówmy—powiada—że każda funkcya musi dać się rozwinąć na szereg według całkowitych dodatnich potęg argumentu, lecz tylko, że każdą funkcyę można tak traktować, jak gdyby była na taki szereg rozwijalną. Dopiero dalszy przebieg rachunku, a mianowicie wyznaczenie spółczynników, pouczy nas o tem, kiedy takie przyjęcie jest uzasadnione, kiedy zaś należy uważać je za niewłaściwe“ [17]).

Głębiej w tę rzecz wniknął Wroński. Jako gorący zwolennik metody różniczkowej Leibniza i filozofii Kanta, protestuje on energicznie przeciw wykluczeniu nieskończoności z analizy. W dziele swojem: „Introduction à la philosophie des mathématiques“ (Paryż 1811) [18]) uważa on podstawę metody Lagrange'a za fałszywą naukowo dla tego, że metoda ta usiłuje dziedzinę ogólną teoretyczną, t. j. rachunek różniczkowy, oprzeć na funkcyi specyalnej technicznej, jaką, według Wrońskiego, jest szereg Taylora. Na końcu dzieła tego miał Wroński podać dowód matematyczny „bezsporny“ tego wywrócenia zasad algorytmii przez Lagrange'a i wykazać, „że dowód a priori tej formy szczególnej szeregów, na której opiera się cały jego Rachunek funkcyj, nie jest bynajmniej ścisły i właściwie żadnym nie jest dowodem“. Wychodząc z ogólniejszej formy szeregów, np. z formy

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^2 + A_3\varphi(x)^3 + \ldots,$$

w której uczyniono np. $\varphi(x) = ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2r} + \ldots$ możnaby—powiada Wroński—utworzyć rachunki lub teorye pochodnych jeszcze ogólniejsze. „Aby położyć kres wszystkim tym spekulacjom (spéculations de dérivations), które stały się jakby prawdziwą modą pomiędzy geometrami naszych czasów podamy—powiada dalej—mniemane prawa takiego Rachunku pochodnych najogólniejszego, opartego na powyższej formie ogólnej szeregów technicznych i pokażemy z ogólnością bezwzględną całą niekonsekwencyę, z jaką z tych rachunków, opartych na zasadach technicznych, chciano wyprowadzić rachunek różniczkowy, który jest wybitnie teoretycznym.“

Przyrzeczenie to stara się spełnić Wroński w osobnej rozprawie p. t. „Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange“ [19]), w roku następnym wydanej, którą przedstawił Akademii paryskiej, a po odrzuceniu jej przez sprawozdawców Legendre'a i Arago ogłosił drukiem, powiększywszy ją trzema dodatkami oraz notami. Podaje tu Wroński szczegółowej analizie zasady metody Lagrange'a. Punkt wyjścia metody tej stanowią dwa wzory:

$$1)\quad f(x+i) = A + Bi + Ci^2 + \ldots\ldots$$

$$2)\quad f(x+i) = f(x) + iP$$

„Skąd, pyta Wroński, mamy znajomość formy 1), w jaki sposób można uzasadnić jej możliwość; czy każda funkcya $f(x+i)$, jako taka, jest identyczna z szeregiem 1), czy też jest tylko równowartościowa“. Lagrange utrzymuje, że rozwinięcie na szereg musi zawierać jedynie potęgi całkowite dodatnie ilości i, oraz że potęgi ułamkowe i ujemne mogą zachodzić tylko dla specyalnych wartości zmiennej x. Według Wrońskiego zaś każda funkcya $\varphi(i)$ daje się w ogólności rozwinąć na szereg według potęg np. ilości $a+\sqrt[m]{i}$, a wzajemna kompensata wyrazów z ułamkowemi potęgami ilości i, o której mowa u Lagrange'a, może być jedynie wynikiem obliczania wartości szeregu dla specyalnych wartości zmiennej x. Zasady Lagrange'a mogłyby mieć tedy, co najwyżej, wartość hypotetyczną, a stąd sama metoda jego pewność problematyczną, gdy tymczasem rachunek różniczkowy ma być apodyktyczny. Zresztą, gdyby nawet uzasadnienie Lagrange'a było bez zarzutu, to i, mimo to, zasady jego nie wystarczałyby bynajmniej do ugruntowania rachunku nieskończonostkowego: Nigdy bowiem, powiada Wroński, twierdzenia 1) i 2) nie mogą prowadzić do wyjaśnienia niezależnego i bezwzględnego spółczynników A, B, C..... natura tychże w żaden sposób nie może być określona przez wykazanie miejsca, które zajmują w szeregu nieskończonym. Gdybyśmy wyszli z ogólniejszego szeregu na rozwinięcie funkcyj, np. z szeregu, postępującego według funkcyj działowych (fakultetów), t. j. z szeregu

$$F(x+i) = F(x+j) + F'(x)\varphi(x)^{1/\xi} + F''(x)\varphi(x)^{2/\xi} + \ldots$$

wtedy doszlibyśmy do zupełnie innych pochodnych. Funkcye te miałyby w tym przypadku postać

$$F(x) = \frac{\Delta F(x+i)}{\Delta\varphi(i)}, \quad F''(x) = \frac{W[\Delta\varphi)\,\Delta^2 F(x+i)]}{\Delta\varphi(i)\,\Delta^2\varphi(i)^{2/\xi}} \quad \ldots\ldots \text{[20])},$$

[17]) Podobną myśl miał, zdaje się, Ohm w piśmie: „Geist der Differential - und Integralrechnung“ 1846, jak o tem przekonywamy się ze słów Hankela w artykule Grenze (Allgemeine Encykl. der Wiss. und der Künste von Erach und Gruber. XC, 1891).

[18]) Treść i główne myśli Wrońskiego, w tem dziele zawarte, przedstawiliśmy w książce naszej: „Hoene Wroński, „Jego życie i prace“ (Kraków 1896, str. 36—43).

[19]) Porówn. w tejże książce str. 53—55.

[20]) Wyrażenia W w licznikach są to wyznaczniki różnicowe i różniczkowe, wprowadzone jako funkcye „schin“ przez Wrońskiego i nazywane obecnie wrońskianami. Patrz Prace mat.-fiz. t. I. str. 5 i dalsze. Jako wartość ilości i należy wziąć jedną z wartości, czyniących zadość równaniu $\varphi(i) = 0$.

a dla nieskończenie małych wartości ξ i dla $\varphi(x)=i$ przeszłyby na następujące:

$$F'(x) = \frac{d\,F(x+i)}{d\,i}\,,\quad F''(x) = \frac{d^2F(x+i)}{1\,.\,2\,di^2}\,,\ \ldots\ldots\quad (i=0),$$

gdzie d oznaczają różnice nieskończenie małe. Dopiero rozważanie tych wielkości, określonych przez przyrosty nieskończenie małe, wyjaśnia istotę pochodnych $F'(x)$, $F''(x)$ . . . . .

Rozprawa druga, w tem dziele zawarta, p. t.: „Insuffisance de la démonstration du théorème de Taylor, tentée par M. Poisson", jakkolwiek skierowana jest głównie przeciw dowodzeniu, podanemu przez Poissona w N. 3 zbioru: „Correspondance sur l'École impériale polytechnique" jest wszakże w znacznej części tylko rozwinięciem powyższych zarzutów, postawionych teoryi Lagrange'a. Rozprawa trzecia: „Quelques observations concernant le Rapport fait à la Classe des sciences de l'Institut de France sur le premier de ces mémoires", jest, jak widać już z tytułu, głównie natury polemicznej. Z wypowiedzianych w niej poglądów interesującą jest uwaga, będąca w związku z wystosowaniem — o czem mowa była wyżej — potęg ułamkowych przyrostu, w rozwinięciu funkcyi. „Należy ściśle odróżniać— powiada Wroński—samą funkcyę, która stanowi wielkość, jest jej zasadą i daje tejże wielkości niejako istnienie, od szeregu, t. j. od rozwinięcia tej funkcyi, które jest tylko prawem tworzenia tej wielkości za pomocą algorytmu pierwotnego i powszechnego sumowania (t. j. dodawania i odejmowania). Są to dwie rzeczy zasadniczo różne. W istocie jest prawdą, że prócz pierwiastków, znajdujących się w funkcyi $f(x)$ nie mogą występować inne w funkcyi $f(x+i)$, o ile x i i są uważane zupełnie ogólnie, a stąd wartość rozwinięcia funkcyi $f(x+i)$ nie może zawierać potęg ułamkowych szczególnych ilości i, lecz nie ma żadnej przeszkody, aby prawo tworzenia tej wielkości zawierało te pierwiastki. To, co stosuje się do pierwiastków, stosuje się i do wielkości dowolnych, które można wprowadzić do rozwinięcia, jakkolwiek nie zachodzą one wcale w wartości funkcyi. Toż samo stosuje się np. do szeregu, wyrażającego funkcyę $\log(x+i)$ w postaci:

$$\log(x+i) = \log(x+a^m) + A_1(i^m - a) + A_2(i^m - a)^2 + \ldots\ldots,$$

z którego po rozwinięciu otrzymuje się szereg

$$\log(x+i) = \log x + B_1\,i + B_2\,i^2 + \ldots\ldots,$$

przedstawiający atoli inne prawo tworzenia logarytmu."

W dwa lata, po wydaniu poprzednich rozpraw, ogłasza Wroński nową pracę p. t.: „Philosophie de l'infini, contenant des contreréflexions et

réfllexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal" [21]). W swej części krytycznej praca ta skierowana jest głównie przeciw wspomnianemu dziełku Carnota „Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal", oraz przeciwko drugiemu wydaniu „Teoryi funkcyj analitycznych" Lagrange'a. Wroński powtarza tu znowu poprzednie swe zarzuty przeciwko zasadom metody Lagrange'a. W części historycznej poddaje — ze stanowiska swej filozofii—rozbiorowi porównawczemu znane dotąd metody uzasadnienia analizy wyższej i znowu jako wynik tego rozważania występuje sąd, potępiający zasady metody Lagrange'a [22]).

Jan Śniadecki miał wypowiedzieć zarzuty swe przeciwko zasadom „Teoryi funkcyj analitycznych" samemu jej autorowi osobiście, podczas pobytu swego w Paryżu w r. 1804, a powtórzył je w druku w rozprawie: „O Józefie Ludwiku de Lagrange, pierwszym geometrze naszego wieku" (Wilno, 1815) [23]). Wszystkie prawie gatunki rachunku analitycznego w matematyce chciał Lagrange—mówi Śniadecki—jednym wzrokiem rozumu ogarnąć i ich zasady z jednego źródła wyciągnąć i ze sobą powiązać; ta

---

[21]) Porówn. „Hoene Wroński, Jego życie i prace", ttr. 65—66.

[22]) Aby czytelnikowi dać możność wejrzenia w rozważania Wrońskiego, dajemy tu krótki wyciąg z tego pisma, odnoszący się do metafizyki rachunku nieskończonostkowego. „Avant tout il faut reconnaitre que l'idée de l'infini est un produit intellectuel tout à fait différent de celui qui constitue la conception d'une quantité finie. Ce sont deux fonctions de notre savoir tout a fait hétérogènes .... La conception d'une quantité finie est un produit de l'entendement qui, sous les conditions du temps qui lui sont propres, introduit une unité intellectuelle ou une signification dans l'être opposé au savoir.. L'idée de l'infini est un produit de la raison qui en lui même se trouve hors des conditions du temps et par conséquent inapplicable ou transcendental dans l'usage constitutif que nous faisons du savoir pour la connaissance de l'être. Employé au moins d'une manière regulative en le soumettant par l'influence du jugement aux conditions du temps qui lui sont étrangères, ce produit de la raison, l'idée de l'infini, transformée ainsi en l'idée de l'indéfini, sert à lier les conceptions que nous avons de la quantité..... C'est cette importante distinction transcendentale qui est le noeud de la métaphysique du calcul infinitésimal. Le premier résultat que nous obtenons de cette distinction transcendentale est le précepte négatif de ne pas confondre dans l'Algorithmie les lois objectives des quantités finies avec les lois purement subjectives des quantités infinitésimales.. Or ce principe des lois subjectives faisant l'objet du calcul infinitésimal n'est autre rien que le grand principe même du calcul l'infinitésimal..... Deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité indéfiniment plus petite sont rigoureusement égales". Następuje potem „dedukcya metafizyczna" tej zasady. Gergonne i Servois krytykowali bardzo surowo tę filozofię matematyki Wrońskiego. Porówn. uwagi nasze w cytowanej książce „Hoene Wroński itd." str. 24. Pogląd Servois'a na metodę nieskończenie małych charakteryzuje ustęp z jego rozprawy w „Annales de „Mathématiques", przedstawiony wyżej. O krytyce Servois'a wiedzieliśmy dawniej jedynie ze wzmianki w książce Ponceleta „Applications d'analyse et de géométrie."

[23]) Patrz dzieła Jana Śniadeckiego. Wydanie warszawskie, 1837. t. IV. str. 156—206.

śmiała i wielka myśl podała mu plan „Teoryi funkcyj analitycznych“, w której założył sobie zwłaszcza rachunek różniczkowy i całkowy z działań prostej algebry wydobyć. Chciał Lagrange odmienić „fundament tłómaczenia i sygnaturę rachunku“. „Teorya funkcyj“ jest pasmem ważnych wielkich i wielu nowych prawd, ale te wszystkie dają się zrozumiale wyrazić dawnym językiem. Wprowadzenie kresek ma, zdaniem Śniadeckiego, te same „nieprzyzwoitości“, co wprowadzenie kropek w sygnaturze angielskiej, a „czy kto to samo działanie nazwie płynieniem, czy funkcyą pochodną, czy różniczkowaniem [24]), nic na tem nauka nie zyskuje“. Powyższe uwagi Śniadeckiego odnoszą się, że tak powiemy, do strony zewnętrznej“: ale oto, co mówi on o samych zasadach teoryi. Fundamenta i początki tego rachunku, wskazane przez Lagrange'a, są li ściślejsze, dokładniejsze i prostsze? Wyznaje Śniadecki, że czytając tylokrotnie to ważne dzieło, nie mógł się o tem przekonać. Dziwi się, dlaczego Lagrange pojęcie wypadków rachunkowych, powstających ze znikania ilości, uważa za niejasne, kiedy i cała teorya jego na tem się właśnie opiera. Wszakże treść tej teoryi polega na tem, że rachunek różniczkowy niema być czem innem, jak tylko sposobem wyznaczenia spółczynników rozwinięcia. Lecz w jaki sposób Lagrange spółczynniki te wynajduje? Dzieli całe równanie dla różnicy, rozwiniętej $f(x+i)-f(x)$ przez wzrost lub ubytek ilości zmiennej [25]) i uważa ten wzrost lub ubytek w stanie niknącym, przez co jedna strona równania staje się $\frac{0}{0}$, co nazywa „funkcyą pochodną“; druga jej strona daje wyraz, nie zawierający tego wzrostu lub ubytku, i ten wyraz jest wartością funkcyi pochodnej. Czy jest w tem, powiada Śniadecki, jakakolwiek różnica od tego, co się robi w teoryi granic?; chyba w tem, że Lagrange nie daje żadnej przyczyny, albo, jak on mówi, żadnej metafizyki tego wypadku, kiedy inni tłómaczą to przez początek granic. A jeżeli stan ilości niknących, według Lagrange'a, nie da się jasno pojmować, to czyż to pojęcie ułatwia się, gdy nie tłomaczymy wypadków i nię opieramy ich na żadnym początku geometrycznym? Też same uwagi stosuje Śniadecki i do sposobu otrzymywania pochodnych wyższych, gdyż sposób ten jest tylko powtórzeniem działania, przy pomocy którego otrzymujemy pochodną pierwszą. „Trudność wynikająca z tego, że może znaleść się wyraz z mianownikiem niknącym, który to wyraz stawszy się nieskończonym, psuje całe rozwinięcie funkcyi, trudność ta zachodzi także w teoryi granic. Lagrange bardzo zręcznie i dowcipnie zniósłszy tę trudność, objaśnił i utwierdził teoryę dawną.“ Lagrange, unikając zasad teoryi granic, stawia na ich miejscu twierdzenie: „w szeregu malejącym i postępującym wedle potęg tej samej ilości, można tej ilości nadać taką wartość, iż każdy

[24]) U Śniadeckiego: „pochodnią“, „różnicowanie“.
[25]) U Śniadeckiego: „odmiennej“.

wyraz będzie większy od sumy wszystkich po nim następujących“. „Twierdzenie to — powiada Śniadecki — jest w nauce szeregów niewątpliwe i pewne, ale nie może być fundamentem rachunku różniczkowego. Bo gdyby niem było, tedyby szło koniecznie za tem, że w funkcyi rozwiniętej opuszczają się wyrazy, nie jako niknące, lecz jako razem mniejsze od wyrazu, który ocalał, a za tem, że rachunek różniczkowy jest tylko sztuką przybliżenia, t. j. że wypadki z niego otrzymane nie są ściśle pewne, ale tylko do prawdy zbliżone.“ „Przypuścić ten wniosek—kończy Śniadecki—jest to podkopać ścisłość geometryczną wszystkich wynalazków, przez ten rachunek odkrytych, na co się żaden geometra, a nawet sam Lagrange nie zgodzi. Wypadki rachunku różniczkowego są bowiem ściśle prawdziwe i takiemi się okazują i dowodzą przez metodę granic.“

Jakkolwiek zarzuty powyższych krytyków były, po większej części, usprawiedliwione, nie mogły one wszakże jeszcze same doprowadzić do ostatecznego wyjaśnienia i rozstrzygnięcia kwestyi. Rozstrzygnięcie to mogło oprzeć się jedynie na głębszem uchwyceniu pojęcia funkcyi i na ściślejszem, niż dotąd, traktowaniu pytań, odnoszących się do ciągłości, oraz zbieżności,—pytań, zupełnie pominiętych przez krytyków poprzednich. Filozof i matematyk czeski Bolzano jest, być może, pierwszym z pomiędzy matematyków XIX stulecia, obdarzonych subtelniejszem poczuciem w traktowanin podobnych zasadniczych zagadnień. W kilku swych pismach, które współcześni mało czytali lub których niedoceniali, usiłował Bolzano wprowadzić do matematyki ściślejsze sposoby uzasadnienia wielu twierdzeń podstawowych analizy wyższej. Ustanowił on pierwszy raz dokładne pojęcie ciągłości funkcyi [26]), wypowiedział ważne twierdzenie o granicy ilości zmiennej [27]) teoryę szeregów oparł na ogólnem twierdzeniu o ich zbieżności [28]). Już

[26]) „Według prawidłowego wyrażenia, mówiąc, że funkcya $f(x)$ dla wszystkich wartości w, leżących wewnątrz lub zewnątrz pewnych granic, zmienia się według prawa ciągłości, należy rozumieć tylko tyle, że gdy x jest jedną z takich wartości, wtedy różnica $f(x+\omega)-f(x)$ może być uczyniona mniejsza od każdej wielkości danej, gdy ω uczynimy tak małem, jak się podoba.“ („Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegensetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege“. Praga, 1817, str. 11).

[27]) „Gdy pewna własność A ma miejsce nie dla wszystkich wprawdzie wartości zmiennej x, ale dla wszystkich mniejszych od pewnej wartości u, to istnieje zawsze wielkość U, największa z pomiędzy tych, o których można powiedzieć, że mniejsze od niej własność tę A posiadają“ (tamże str. 41), Twierdzenie to stosował Weierstrass w swych lekcyach.

[28]) „Gdy szereg wielkości $\overset{1}{F}(x)$, $\overset{2}{F}(x)$ . . . $\overset{n}{F}(x)$ . . . $\overset{n+r}{F}(x)$ ma tę własność, że różnica pomiędzy jego wyrazem n-tym $\overset{n}{F}(x)$ i każdym następnym, jakkolwiek odległym $\overset{n+r}{F}(x)$, pozostaje mniejsza od każdej ilości dowolnie danej, to istnieje zawsze wielkość stała i jedyna, do której zbliżają się coraz bardziej wyrazy tego szeregu i różnią się od niej tak mało jak chcemy, jeżeli tylko szereg dostatecznie przedłużymy.

z tych twierdzeń wysnuć by było można gruntowniejszą, niż dotąd, krytykę metody Lagrange'a. Co się zaś tyczy twierdzenia Taylora, stanowiącego podstawę tej metody, to Bolzano wypowiada wyraźnie, że nie nadaje on temu twierdzeniu tego znaczenia i tej ogólności, jakie przypisywano mu dotąd. Postanowił on sobie za zasadę, aby twierdzenie to stosować tylko pod takiemi ograniczeniami i w taki sposób, jak to z własnego jego pojmowania wynika. Obiecuje w swoim czasie poglądy swoje na ten przedmiot przedstawić [29]). Czy to uczynił i czy rozważania swoje nad twierdzeniem Taylora na papier przeniósł, nie wiemy, gdyż pewna część prac jego dotąd jeszcze nie została ogłoszoną [30]). Powiedzieć tylko można tyle, że pomysły Bolzana nie pozyskały niestety w swoim czasie uznania matematyków i dla tego pozostały, zdaje się, bez wpływu na rozwój analizy [31]).

Zaszczyt rozpoczęcia epoki reformy w tej dziedzinie przypada Cauchy'emu, który o mało znanych pracach poprzednika swego nie wiedział. Nie mamy tu potrzeby rozwodzić się nad zasadami metody nieskończenie małych oraz nad podstawami teoryi funkcyj i szeregów nieskończonych, które wyłożył Cauchy w swych dziełach głównych: „Cours d'analyse de l'École royale polytechnique" 1821, „Résumé des leçons données à l'Ecole polytechnique" 1823. i w „Leçons sur le calcul différentiel" 1829, gdyż wyniki badań Cauchy'ego dziś jeszcze panują w dziedzinie analizy [32]). Powiemy

[29]) „Die drei Probleme der Rektifikation, der Complanation und der Cubirung i t. d., Lipsk, 1817, str. 11.

[30]) Może być, że pewne, odnoszące się do tego przedmiotu prace Bolzana znajdują się pomiędzy niewydanemi dotąd jego rękopisami. Porówn. F. J. Studnićka, „Bericht über die mathematischen und naturwissenschaftlichen Publikationen der kg. böhmischen Ges. der Wiss. während ihres hundertjährigen Bestandes". Praga, 1889.

[31]) Ocenę doniosłości pomysłów Bolzana podali Hankel (w cytowanym wyżej artykule Encyklopedyi Erscha i Grubera) oraz O. Stolz (Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, Math., Ann. XIX)

[32]) Cytujemy tylko następujące słowa z przedmów Cauchy'ego do „Cours d'analyse" i „Leçons sur le calcul":

„En partant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les proprietés qui servent de base au calcul infinitésimal... Quant aux méthodes j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on éxige en géometrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communement admises ... ne peuvent être considerées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algebriques une étendue indéfinie, tandis que dans la réalité la plupart sont vraies uniquement sous certaines conditions et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment."

„Le formule de Taylor ne peut plus être admise comme générale, qu'autant qu'elle est réduite à un nombre fini de termes et completée par un reste. Je n'ignore pas qu'un faisant d'abord abstraction de ce reste l'illustre auteur de la „Mécanique analytiques" a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions dérivées Mais malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaitre l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi des séries divergentes. Il y'a plus, le théorème de Taylor semble dans certains cas fournir les développements d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée".

Przykład klasyczny takiej funkcyi, dany przez Cauchy'ego, jest dobrze znany. Patrz Stolz, „Grundzüge der Differential-und Integrelrechnung", t. 1, 1893, str. 105.

tylko, że te prace Cauchy'ego uwolniły dopiero metody nieskończonostkowe i metodę granic od owej obawianej powszechnie metafizyki i ostatecznie rozstrzygnęły pytanie o stosowalności zasad metody Lagrange'a.

Późniejsi krytycy i historycy, jak Cournot [33]), Hankel [34]) Freycinet [35]), Mansion [36]), Vivanti [37]) i inni, mówiąc o metodzie Lagrange'a, mogli już zarzuty, czynione przez poprzednich krytyków, oprzeć na przekonywających matematycznie rozważaniach.

Cel bezpośredni, jaki pragnął osiągnąć Lagrange za pomocą swej metody, nie został wprawdzie dopięty [38]), ale szereg potęgowy, stanowiący punkt wyjścia jego rozważań, stał się, jak wiadomo, w pojmowaniu ściślejszem, które przygotowały prace Cauchy'ego, fundamentem nowoczesnej teoryi funkcyj analitycznych, jaką mamy w pracach Weierstrassa [39]) i Méray'a [40]).

Nie można nie wspomnieć i o tem, że dążenie, którem kierował się Lagrange w tworzeniu „Teoryi funkcyj analitycznych", t. j. zalgebraizowanie analizy wyższej nie pozostało bez wpływu w nauce. Ten

[33]) Cournot, „Traité élementaire des fonctions et du calcul infinitésimal" 1841

[34]) Hankel. Artykuł „Grenze" l. c.

[35]) Freycinet, „De l'analyse infinitésimale." Paryż 1881. wyd. 2-gie, str. 228.

[36]) P. Mansion, Résumé d'un cours d'analyse infinitésimale", 1887.

[37]) Vivanti, „Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione nella matematica. Mantova, 1894, str. 97, 124.

[38]) Wpływ pomysłów i metod zawartych w „Teoryi funkcyj analitycznych" Lagrange'a, daje się jeszcze spostrzedz i w czasie obecnym. Ocenę znaczenia historycznego tego dzieła znajdujemy w referacie Brilla i Nöthera: „Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit" w trzecim tomie Sprawozdań Niemieckiego Stowarzyszenia matematyków, Berlin 1894. str. 150—155.

[39]) Nous sommes débarassés (par le conception de Weierstrass) powiada Poincaré w najnowszej pracy: „L'oeuvre mathématique de Weierstrass" (Acta mathematica XXII. p. 7) des doutes qui au siècle dernier et dans le première moitié de ce siècle assaillaient souvent les penseurs à propos des principes du calcul infinitésimal et aussi de ceux que pouvait provoquer par ses lacunes la théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Tout cela n'est plus au jourd'hui que de l'historie ancienne." Fragment tej właśnie „dawnej historyi" staraliśmy się dać w artykule niniejszym.

[40]) Méray, „Leçons nouvelles sier l'Anaiyse infinitésimale et ses applications géométriques", 4 tomy 1894—1898. Stanowisko swe wyjaśnia Méray w przedmowie do tomu 1-go, a zwłaszcza na str. XIV—XVIII.

pomysł miał w naszej epoce dwu wielkich przedstawicieli Weierstrassa i Kroneckera. Czy ten kierunek ku zalgebraizowaniu, — powiemy więcej — ku zarytmetyzowaniu analizy może osiągnąć rezultaty naukowe w zupełnej niezależności od kierunku drugiego — nazwijmy go intuicyjnym — jest to pytanie, którem nie możemy zająć się obecnie [41]). Zdaje się wszakże, że współdziałanie obu kierunków jest potężnym czynnikiem postępu umiejętności. „Teorya funkcyj analitycznych" Lagrange'a działała tak w jednym jak drugim kierunku, pobudzając umysły twórcze, stosownie do ich indywidualności, do rozszerzenia i doskonalenia złożonych w tem dziele pomysłów.

---

[41]) Porówn. Klein „Ueber Arihmetitierung der Mathematik" (Nachrichten der kg. l. Ges. der Wiss. in Göttingen 1895, s. 82—91). Por. też cytowaną pracę Poincaré'go oraz artykuł Pringsheima „Irrationalzahlen und Convergenz unendlicher Prozesse" w Encyklopedyi nauk matematycznych. Tom I, zesz. I, str. 64.

O STANIE OBECNYM TEORYI NIEZMIENNIKÓW.

NAPISAŁ

Fr. MEYER,

Przełożył za upoważnieniem autora

S. DICKSTEIN.

CZĘŚĆ II.

(*Ciąg dalszy*). *)

POKREWIEŃSTWO FORM.

C. Metodyka. Symbolika i procesy niezmiennicze.

b) *Procesy niezmiennicze niesymboliczne.*

Rozpatrzymy najważniejsze procesy różniczkowe, stosowane do utworów niezmienniczych w celu otrzymania z nich utworów nowych. Przypadek szczególnie ważny, w którym przy stosowaniu takiego działania wynika wartość zero, omówimy niżej w rozdziale o równaniach różniczkowych; w odpowiednich też rozdziałach rozpatrzymy działania różniczkowe na „recyprokantach" i „półniezmiennikach." Procesy te same przez się, a przynajmniej w pewnej modyfikacyi [1]), mają własność niezmienniczą, t. j. otrzymujemy ten sam rezultat, gdy wykonamy najprzód proces, a następnie przekształcenie liniowe, lub też odwrotnie.

Zgodnie z rozwojem historycznym należy procesy te podzielić na odnoszące się: do zmiennych, do spółczynników form pierwotnych, wreszcie do spółczynników podstawień. Zresztą te trzy rodzaje wielkości można rozważać wspólnie jako spółczynniki form liniowych.

---

*) Patrz „Prace matematyczno-fizyczne" tom VII, str. 17—68; tom VIII, str. 139—177; tom IX, str. 222—142.