przechodziły w dwie dane rodziny: $\varphi'(u', v') = \text{const.}$, $\psi'(u', v') = \text{const}$ na drugiej danej powierzchni, to dla rozwiązania tego zadania należałoby użyć pełny układ niezmienników różniczkowych. Ale widoczna, że w tym razie układ pełny stanowią funkcye: φ, ψ i L. Z równań

$$\varphi'(u', v') = \varphi(u, v), \qquad \psi'(u', v') = \psi(u, v)$$

otrzymujemy u' i v' jako funkcye ilości u i v, które jako warunek możebności takiego odkształcenia muszą spełniać równanie:

$$L'(u', v') = L(u, v).$$

Jest to warunek konieczny i dostateczny.

Wnioski, uzyskane tu dla teoryi odkształceń, nie zmieniających pól powierzchni, można prościej uzyskać przez dyskusyę znanego równania dla tych odkształceń:

$$\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{H(u, v)}{H'(u', v')}.$$

Podajemy je jako prosty przykład traktowania zagadnień w teoryi niezmienników różniczkowych.

O RÓWNANIACH STOPNIA TRZECIEGO I CZWARTEGO

NAPISAŁ

J. SOCHOCKI.

Praca niniejsza ma stanowić wstęp do teoryi funkcyj eliptycznych, którą mamy zamiar wyłożyć w następstwie.

§ 1. *Moduł i mnożnik równania stopnia 3-go.*

Niechaj będzie równanie rzeczywiste postaci

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 0; \tag{1}$$

oznaczmy pierwiastki jego przez e_1, e_2, e_3. Rozwiązującą, określoną wzorem

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2, \tag{2}$$

nazywać będziemy modułem równania (1) i dla skrócenia oznaczać przez k^2.

Wskutek wszelkich przestawień ilości e_1, e_2, e_3 we wzorze (2), moduł przybiera sześć wartości, z których dość jest mieć jednę, aby znaleść pozostałe, i to przy pomocy działań bardzo prostych, wcale niezależnych od spółczynników g_2, g_3.

Inną znów rozwiązującą, mianowicie:

$$\frac{1}{e_1 - e_3} = \lambda. \tag{3}$$

nazywać będziemy *mnożnikiem równania* (1) i zawsze oznaczać przez λ.

Wskutek różnych przemian ilości e_1, e_2, e_3, mnożnik przyjmuje także sześć wartości. Przez jedną którąkolwiek z nich inne wyrażają się sposobem wymiernym; ale w odpowiednich wzorach zachodzić będą g_2 i g_3, jak to potem zobaczymy.

Widzimy więc, że moduł jak i mnożnik mogą być przyjęte, każdy z osobna, za rozwiązującą *Galois*'a.

Odpowiadające sobie wartości modułu i mnożnika układają się w pewien sposób, który warto zaznaczyć, a mianowicie:

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = k^2, \qquad \frac{1}{e_1-e_3} = \lambda;$$

$$\frac{e_2-e_1}{e_3-e_1} = 1-k^2, \qquad \frac{1}{e_3-e_1} = -\lambda;$$

$$\frac{e_1-e_3}{e_2-e_3} = \frac{1}{k^2}, \qquad \frac{1}{e_2-e_3} = \frac{\lambda}{k^2};$$

$$\frac{e_1-e_2}{e_3-e_2} = 1-\frac{1}{k^2}, \qquad \frac{1}{e_3-e_2} = -\frac{\lambda}{k^2};$$

$$\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1} = \frac{1}{1-k^2}, \qquad \frac{1}{e_2-e_1} = -\frac{\lambda}{1-k^2};$$

$$\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} = \frac{k^2}{k^2-1}, \qquad \frac{1}{e_1-e_2} = \frac{\lambda}{1-k^2}.$$

§ 2. *Równanie rozwiązujące modułowe.*

Tak nazywać będziemy równanie stopnia szóstego, którego pierwiastkami są sześć wartości modułu k^2.

W celu otrzymania go rozpatrzmy następujący układ trzech równań:

$$3\lambda e_1 = 2-k^2; \quad 3\lambda e_2 = -1+2k^2; \quad 3\lambda e_3 = -1-k^2, \tag{1}$$

które wynikają z (2) i (3) poprzedniego § i z tego, że $e_1+e_2+e_3=0$.

Z równania (1) znajdujemy:

$$\lambda(e_1-e_3) = 1, \qquad \lambda(e_2-e_3) = k^2, \qquad \lambda(e_1-e_2) = 1-k^2,$$

a zatem:

$$\lambda^3 (e_1-e_2)(e_1-e_3)(e_2-e_3) = k^2(1-k^2).$$

Lecz z drugiej strony, kładąc dla skrócenia

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2,$$

mamy znany wzór na wyróżnik danego równania:

$$(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2 = \frac{\Delta}{16};$$

w skutek tego równanie powyższe można napisać tak:

$$\lambda^6 \Delta = 16 k^4 (1-k^2)^2. \tag{2}$$

Mnożąc przez siebie odpowiednie strony równań (1) i z uwagi, że $4e_1e_2e_3 = g_3$, otrzymujemy nowy związek pomiędzy λ i k^2:

$$27\lambda^3 g_3 = 4(2-k^2)(1-2k^2)(1+k^2), \tag{3}$$

Nareszcie podniósłszy do kwadratu obie strony w każdem z równań (1), i biorąc następnie sumę stron odpowiednich, znajdujemy:

$$9\lambda^2(e_1^2+e_2^2+e_3^2) = 6(k^4-k^2+1).$$

Wykonawszy skrócenie i z uwagi na to, że

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2 = (e_1+e_2+e_3)^2 - 2(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3) = \frac{g_2}{2},$$

znajdujemy:

$$3\lambda^2 g_2 = 4(k^4-k^2+1). \tag{4}$$

Ze wzorów (2), (3), (4) otrzymujemy następujący szereg czterech równych stosunków:

$$\frac{g_2^3}{4(k^4-k^2+1)^3} = \frac{27 g_3^2}{(2-k^2)^2(2k^2-1)^2(1+k^2)^2} = \frac{\Delta}{27k^4(1-k^2)^2} = \frac{16}{27\lambda^6}. \tag{5}$$

Trzy pierwsze z nich dają nam w dwóch różnych postaciach jedno i toż samo równanie stopnia szóstego, które nazwaliśmy rozwiązującem modułowem.

Dajmy teraz, że pierwiastki tego równania są znane, to jest, że znaną jest wartość modułu; wtedy odpowiednia wartość mnożnika otrzymuje się bezpośrednio z wzorów (3) i (4), mianowicie:

$$\lambda = \frac{(1+k^2)(1-2k^2)(2-k^2)\,g_2}{9\,(k^4-k^2+1)\,g_3}. \tag{6}$$

Jeśli zgodzimy się wprowadzić w rachunek, jako ilość pomocniczą, $k'^2 = 1 - k^2$, to wzór powyższy da się przedstawić tak:

$$\lambda = \frac{(1+k^2)(1+k'^2)(k'^2-k^2)\,g_2}{9\,(1-k^2k'^2)\,g_3}. \tag{6'}$$

Wniosłszy to wyrażenie zamiast λ w równaniu (1), otrzymujemy wzory na pierwiastki równania

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 0$$

w tym przypadku, kiedy moduł jest przyjęty za ilość znaną, mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{3\,(1-k^2k'^2)\,g_3}{(1+k^2)(k'^2-k^2)\,g_2}, \\ e_2 &= \frac{-3\,(1-k^2k'^2)\,g_3}{(1+k^2)(1+k'^2)\,g_2}, \\ e_3 &= \frac{-3\,(1-k^2k'^2)\,g_3}{(1+k'^2)(k'^2-k^2)\,g_2}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

W przypadku, jeśli $g_2 = 0$, równanie modułowe przyjmuje postać

$$(k^4 - k^2 + 1)^3 = 0;$$

wzory zaś (6) i (7) przyjmują postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, i żadna z ilości λ, e_1, e_2, e_3 nie może wyrazić się sposobem wymiernym przez k^2. W samej rzeczy, w przypadku tym k^2 przyjmuje tylko dwie różne wartości, λ posiada ich sześć, gdy tymczasem e_1 posiada trzy wartości.

Podobną anomalię przedstawia przypadek $g_3 = 0$.

§ 3. *Równanie rozwiązujące mnożnikowe.*

Przedstawmy wzory (2) i (4) poprzedzającego § tak:

$$\lambda^6\,\Delta = 16\,k^4k'^4,$$

$$3\,\lambda^2 g_2 = 4 - 4\,k^2k'^2,$$

i wyrugujmy stąd iloczyn $k^2k'^2$; otrzymamy;

$$\Delta\,\lambda^6 = (3\,\lambda^2 g_2 - 4)^2. \tag{1}$$

Jest to właśnie równanie rozwiązujące mnożnikowe, t. j. równanie szóstego stopnia, którego pierwiastkami są sześć wartości λ.

Jeśli przyjmiemy jeden jakikolwiek z pierwiastków równania (1) za znany, to pozostałe pierwiastki tegoż równania, także trzy pierwiastki równania danego $4x^3-g_2x-g_3=0$, a zatem i wartość k^2 wyrażą się przez ilości, znane za pomocą wzorów wymiernych.

W samej rzeczy mamy:

$$\frac{1}{\lambda^2} = (e_1-e_3)^2 = (e_1+e_3)^2 - 4\,e_1e_3 = e_2^2 - 4\,e_1e_3;$$

mnożąc obie strony przez $4\,e_2$, otrzymujemy

$$\frac{4\,e_2}{\lambda^2} = 4\,e_2^3 - 4\,g_3 = g_2e_2 - 3\,g_3;$$

stąd znajdujemy wartość

$$e_2 = \frac{3\,g_3\,\lambda^2}{g_2\,\lambda^2 - 4},$$

Wartości na e_1 i e_3 otrzymać można z równań:

$$2\,e_1 = \frac{1}{\lambda} - e_2. \qquad 2\,e_3 = \frac{-1}{\lambda} - e_2,$$

tak, że ostatecznie mamy następujące trzy wzory, wyrażające pierwiastki e_1, e_2, e_3 przez mnożnik:

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
2e_1 &= -\frac{3g_3\lambda^2}{g_2\lambda^3-4}+\frac{1}{\lambda},\\
e_2 &= \frac{3g_3\lambda^2}{g_2\lambda^2-4},\\
2e_3 &= -\frac{3g_3\lambda^2}{g_2\lambda^2-4}-\frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
\right.
$$

Co się tyczy modułu, to dość jest wziąć równanie $3\lambda e_2 = 2k^2-1$, skąd otrzymujemy:

$$
2k^2 = 1+3\lambda e_2 = 1+\frac{9g_3\lambda^3}{g_2\lambda^2-4},
$$

albo

$$
(3)\qquad 2k^2 = \frac{9g_3\lambda^2+g_2\lambda^2-4}{g_2\lambda^2-4}.
$$

Pozostałe pięć pierwiastków równania (1) wyrażają się przez λ za pośrednictwem wzorów, wypisanych w końcu § 1, mianowicie:

$$
(4)\qquad -\lambda,\qquad \pm\frac{2\lambda(g_2\lambda^2-4)}{9g_2\lambda^3\pm(g_2\lambda^2-4)},
$$

gdzie cztery kombinacye znaków $\pm$ dają cztery pierwiastki.

Uwaga. Z równania (1) otrzymuje się bezpośrednio równanie z kwadratami różnic pierwiastków równania $4x^3-g_2x-g_3=0$; należy wziąć $u=\frac{1}{\lambda^2}$ i podstawić w równaniu (1) $\frac{1}{u}$ zamiast λ^2; otrzymujemy:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
u(4u-3g_2)^2 &= \Delta,\\
16u^3-24g_2u^2+9g_2^2u-\Delta &= 0.
\end{aligned}
$$

§ 4. *Wartość liczebna modułu i mnożnika.*

Wszystkie równania trzeciego stopnia rozdzielamy na dwie kategorye stosownie do tego, czy $\Delta>0$ lub <0; przypadek $\Delta=0$ pozostawimy na uboczu.

1⁰ $\Delta>0$. Wszystkie trzy pierwiastki równania

$$
4x^3-g_2x-g_3=0,
$$

są rzeczywiste; zgodźmy się oznaczać je tak, aby było $e_1>e_2>e_3$; wtedy oczywiście mamy:

$$
(1)\qquad e_1>0,\qquad e_2g_3\leqq 0,\qquad e_3<0.
$$

Z pomiędzy sześciu wartości modułu dwie, mianowicie

$$
\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}\quad \text{i}\quad \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},
$$

są ułamkami właściwemi i dodatniemi; pozostałe wartości są albo >1, albo <0.

Pierwszą z tych wartości, t. j.

$$
k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}
$$

nazywać będziemy **wartością główną modułu.**

Za **wartość główną mnożnika** przyjmujemy tę, która odpowiada wartości głównej modułu, mianowicie:

$$
\lambda=\frac{1}{e_1-e_3};
$$

jest ona zawsze dodatnią i może się zmieniać od 0 do ∞.

Odtąd przez „moduł“ i „mnożnik“ rozumieć będziemy wyłącznie ich wartości główne.

2⁰ $\Delta<0$. Jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, dwa są urojone sprzężone. Zgodzimy się oznaczać je w sposób następujący:

$$
e_1=\alpha-\beta i,\qquad e_2=\alpha+\beta i,\qquad (\beta>0)\qquad e_3=-2\alpha;
$$

a zatem

$$
(2)\qquad e_3g_3\geqq 0.
$$

Z pomiędzy sześciu wartości k^2 dwie, i tylko dwie będą takie, że ich wartość bezwzględna będzie równa 1, t. j. $[k^2]=1$; wyjątek stanowi przypadek $k^2=e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$.

Za główną wartość modułu przyjmujemy następującą:

$$
k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{3\alpha+\beta i}{3\alpha-\beta i},
$$

przytem oczywiście mamy $|k^2| = 1$; uczyniwszy następnie

$$3\alpha + \beta i = \varrho e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad (\varrho > 0),$$

i dla zupełnego określenia ilości φ dołączywszy warunek $0 < \frac{\varphi}{2} < \pi$, mieć będziemy:

(3) $$k^2 = e^{i\varphi}.$$

Odpowiednia wartość mnożnika głównego jest:

(4) $$\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3} = \frac{1}{3\alpha - \beta i} = \frac{3\alpha + \beta i}{9\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\lambda = \frac{1}{\varrho} e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

A więc argument mnożnika głównego równa się połowie argumentu modułu głównego.

Wartość $|\lambda|$ może zmieniać się od 0 do ∞.

§ 5. *Moduł i mnożnik, jako zmienne niezależne.*

W teoryi funkcyj eliptycznych dzieje się często, że dane są naprzód wartości modułu i mnożnika, a za ich pomocą trzeba znaleźć parametry g_2, g_3, wyróżnik Δ, także pierwiastki e_1, e_2, e_3 i inne ilości od nich zależące. W tym celu służą wzory, podane w poprzednich paragrafach; postaramy się teraz bliżej je rozpatrzyć z nowego punktu widzenia i wyprowadzić wnioski, z których potem korzystać będziemy.

Z powyższego widać, że mamy dwa oddzielne przypadki.

Przypadek 1. $0 < k^2 < 1$, $0 < \lambda < \infty$.

Pierwiastki e_1, e_2, e_3 otrzymują się z równań:

(1) $$3\lambda e_1 = 2 - k^2, \quad 3\lambda e_2 = -1 + 2k^2, \quad 3\lambda e_3 = -1 - k^2,$$

przyczem bezpośrednio wnosimy, że ilości e_1, e_2, e_3 są rzeczywiste i że ich suma równa się zeru; dalej

$$e_1 > e_2 > e_3, \quad e_1 > 0, \quad (k^2 - \tfrac{1}{2}) e_2 > 0, \quad e_3 < 0.$$

Ze wzoru

$$\Delta = \frac{16 k^4 (1 - k^2)^2}{\lambda^6}$$

widzimy, że $\Delta > 0$.

Przypadek 2-gi. $k^2 = e^{i\pi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, $\lambda = r e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

Ze wzorów (1) bezpośrednio wnosimy, że e_1 i e_2 są ilościami urojonemi, że spółczynnik przy i w wyrażeniu e_1 jest ujemny, że e_3 jest ilością rzeczywistą; nareszcie mamy oczywiście $\Delta < 0$.

§ 6. *Znaki dwóch niezmienników w zależności od modułu.*

W zastosowaniach do funkcyj eliptycznych spółczynniki g_2, g_3 noszą nazwę niezmienników: g_2—pierwszego, g_3—drugiego.

Przejdźmy do wzorów:

(1) $$\begin{cases} 3\lambda^2 g_2 = 4(k^4 - k^2 + 1), \\ 27\lambda^3 g_3 = 4(2 - k^2)(1 - 2k^2)(1 + k^2), \end{cases}$$

dających wartości g_2 i g_3.

Przypadek 1. $\Delta > 0$. Wartości λ i k^2 są rzeczywiste, a zatem z równań (1) wnosimy bezpośrednio:

$$g_2 > 0, \qquad (\tfrac{1}{2} - k^2) g_3 \geqq 0.$$

Niezmiennik pierwszy jest zawsze dodatni; drugi zaś jest dodatni lub ujemny, stosownie do tego, czy $k^2 < \frac{1}{2}$ lub $> \frac{1}{2}$.

W przypadku $k^2 = \frac{1}{2}$ mamy $g_3 = 0$.

Przypadek 2-gi. $\Delta < 0$. Na okręgu koła o promieniu jedność, mającego środek w początku spółrzędnych osi, odłóżmy od punktu przecięcia okręgu z osią odciętych dodatnich dwa łuki AB i AD, każdy po 60^0, i uważajmy na kole cztery odcinki: AB, BC, gdzie C jest punktem przecięcia okręgu z osią odciętych ujemnych, CD, DA. Oznaczmy te cztery odcinki przez I, II, III, IV.

Gdy punkt zmienny M, przedstawiający nam wartość k^2, wyszedłszy z punktu A, opisze w kierunku dodatnim całkowity okrąg i powróci do A, wtedy k^2 przejdzie przez wszystkie możliwe wartości. Jedynie punkt A powinien być wykluczony, bo daje nam $\Delta = 0$.

Jeżeli wartość łuku AM oznaczymy przez φ, będzie:

$$k^2 = e^{i\varphi}, \qquad \lambda = r e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

gdzie r oznacza pewną ilość dodatnią. Podstawiwszy te wartości w (1) i podzieliwszy obie strony pierwszego równania przez $e^{i\varphi}$, obie strony drugiego przez $e^{i\frac{3}{2}\varphi}$, otrzymamy:

$$3\,r^2 g_2 = (4\,e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 1) = 4\,(2\cos\varphi - 1),$$

$$27\,r^3 g_3 = -4\,\left(2\,e^{-\frac{i\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)\left(2\,e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}} + e^{i\frac{\varphi}{2}}\right),$$

$$= -8\,(5 - 4\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}$$

co można napisać prościej tak:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 3\,r^2 g_2 &= 4\left(1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right), \\ 27\,r^3 g_3 &= -\,8\cos\frac{\varphi}{2}\left(1 + 8\sin^2\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Na mocy tych wzorów możemy odrazu powiedzieć, jakiego znaku będą g_2 i g_3, jeżeli tylko zauważymy, na którym odcinku znajduje się punkt k^2; w ten sposób otrzymujemy tablicę:

k^2	A	I	B	II	C	III	D	IV	A
g_2	+	+	0	—	—	—	0	+	+
g_3	—	—	—	—	0	+	+	+	+

§ 7. *Przebieg dwóch niezmienników, uważanych za funkcye ilości* k^2.

Przypadek 1. $\Delta > 0$. Przyjąwszy λ za ilość stałą, chcemy dowiedzieć się, jak zmieniają się ilości g_2 i g_3, gdy k^2 przechodzi przez wszelkie wartości od 0 do 1. Wzory (1) w poprzedzającym paragrafie pokazują, że dość jest zbadać przebieg funkcyj

$$\varphi\,(k^2) = k^4 - k^2 + 1,$$

$$\psi\,(k^2) = (2 - k^2)\,(1 - 2k^2)\,(1 + k^2)$$

Jeśli pierwszą z tych funkcyj napiszemy tak:

$$\varphi\,(k^2) = 1 - k^2\,(1 - k^2),$$

to stanie się widocznem, że gdy k^2 wzrastając, przechodzi przez wszystkie wartości od zera do $\frac{1}{2}$, to jednocześnie $\varphi\,(k^2)$, ciągle malejąc, przechodzi przez wszystkie wartości od 1 do $\frac{3}{4}$; gdy następnie k^2, dalej wzrastając, przechodzić będzie przez wszystkie wartości od $\frac{1}{2}$ do 1, wówczas funkcya

$\varphi\,(k^2)$ będzie wzrastała i przechodziła przez wszystkie wartości od $\frac{3}{4}$ do 1. Zresztą, na mocy tożsamości

$$\varphi\,(k^2) = \varphi\,(1 - k^2),$$

albo, co na jedno wychodzi, tożsamości

$$\varphi\,(\tfrac{1}{2} + k^2) = \varphi\,(\tfrac{1}{2} - k^2),$$

stanie się oczywistem, że przebieg funkcyi $\varphi(k^2)$ w przypuszczeniu, iż k^2 zmienia się od $\frac{1}{2}$ do 1, jest ten sam co i w przypuszczeniu, iż k^2 zmienia się od $\frac{1}{2}$ do 0.

Co się tyczy funkcyi $\psi(k^2)$, to naprzód należy zwrócić uwagę na tożsamość

$$\psi\,(1 - k^2) = -\,\psi\,(k^2),$$

albo, co na jedno wynosi, na tożsamość

$$\psi\left(\frac{1}{2} + k^2\right) = -\,\psi\left(\frac{1}{2} + k^2\right),$$

na mocy czego wolno nam ograniczyć się na zbadaniu przedziału dla k^2 od $\frac{1}{2}$ do 1. W tym celu wprowadzamy zamiast k^2 nową zmienną x, kładąc

$$k^2 = \frac{1}{2} + x\,;$$

będzie

$$\psi\,(k^2) = \varphi\left(\frac{1}{2} + x\right) = 2\,x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right),$$

$$0 < x < \tfrac{1}{2}.$$

Lecz łatwo się przekonać wprost drogą elementarną, że, gdy x wzrasta od 0 do $\frac{1}{2}$, iloczyn

$$x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$$

ciągle maleje od 0 do -1; zatem gdy k^2 przechodzi od $\frac{1}{2}$ do 1, $\psi(k^2)$, ciągle malejąc, przechodzi od 0 do -2. Nareszcie, gdy k^2 przechodzi od 0 do $\frac{1}{2}$, wartość $\psi(k^2)$, ciągle malejąc, przechodzi od 2 do 0. Wynik naszego badania wyrazimy w tablicy następującej:

k^2	0	$\frac{1}{2}$	1	
$\frac{3}{4}g_2\lambda^2$	1	$\frac{3}{4}$	1	(jedno minimum)
$\frac{27}{4}g_3\lambda^2$	2	0	-2	(nieustanne ubywanie).

Dla dwóch szczególnych wartości modułu, dopełniających się wzajemnie do 1, odpowiednie wartości g_2 są równe i jednakowych znaków, a wartości g_3 są także równe lecz znaków przeciwnych.

Przypadek 2. $\Delta < 0$. W tym przypadku mamy:

$$k^2 = e^{i\varphi}, \qquad \lambda = r e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

$$\frac{3}{4} r^2 g_2 = 1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{27}{64} r^3 g_3 = -\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{9}{8} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Przyjmiemy tu r za ilość stałą, φ za zmienną niezależną, zawartą w granicach $0 < \varphi < 2\pi$.

Z powyższych wzorów jest widocznem, że dla dwóch szczególnych wartości φ i φ i $2\pi - \varphi$, dopełniających się wzajemnie do 2π, odpowiednie wartości g_2 są równe i jednakowych znaków, a wartości g_3 są równe, lecz znaków przeciwnych. I dla tego dość jest znać przebieg ilości g_2 i g_3 dla połowy okręgu koła, t. j. od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$.

Najprzód, we wzorze na g_2 mamy funkcyę $1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}$, która widocznie ciągle maleje, gdy φ przechodzi od 0 do π.

Dalej, we wzorze na g_3 mamy funkcyę $f = -\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{9}{8} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$, której przebieg łatwo daje się zbadać nawet przy pomocy środków elementarnych. Jeśli oznaczymy przez φ_0 kąt rozwarty, czyniący zadość warunkowi

$$\sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \text{albo} \quad \cos\varphi_0 = -\frac{1}{4},$$

a którego wartość przybliżona jest

$$\varphi_0 = 103^\circ\, 23'\, 39'',$$

następnie oznaczywszy przez φ_1 kąt $\varphi_1 = 2\pi - \varphi$, mamy następujące prawo:

1) w przedziale od $\varphi = 0$ do $\varphi = \varphi_0$ funkcya f ciągle maleje; 2) w przedziale od $\varphi = \varphi_0$ do $\varphi = \varphi_1$ taż funkcya ciągle wzrasta; 3) w przedziale od $\varphi = \varphi_1$ do $\varphi = 2\pi$ ciągle maleje.

Odpowiednio przebieg ilości g_2 i g_3 otrzymuje się wprost z wyżej podanych wzorów; wyrażamy go tu w następującej tablicy:

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	φ_0	π	φ_1	$\frac{5}{3}\pi$	2π,	
$\frac{3}{4}r_2 g^2$	1	0		-3		0	1,	(1 minim.)
$\frac{27}{4}r_3 g^3$	-2		$-3\sqrt{6}$	0	$3\sqrt{6}$		2,	(1 minim. i 1 max.)

gdzie wykazaliśmy wszystkie szczególne wartości φ, przy których jeden z dwóch niezmienników osiąga maximum lub minimum, lub też zamienia się na zero.

§ 8. *Niezmiennik bezwzględny*

Tak nazywamy funkcyę wymierną ilości g_2, g_3, jeśli w jej wyrażeniu przez zmienne niezależne λ i k^2 zmienna λ odpada. Najprostszą z takich funkcyj jest:

$$\frac{g_2^{\,3}}{g_3^{\,2}},$$

lecz dla pewnych względów dogodniej rozważać inny niezmiennik bezwzględny, niewiele zresztą różniący się od poprzedniego, mianowicie:

$$J = \frac{g_2^{\,3}}{\Delta} = \frac{g_2^{\,3}}{g_2^{\,3} - 27 g_3^{\,2}}; \tag{1}$$

postarajmy się zbadać jego przebieg, gdy k^2 przechodzi przez wszystkie możebne wartości.

Przypadek 1-y. $\Delta > 0$. Mamy wzór, (§ 2, (5)),

$$J = \frac{4(1 - k^2 + k^4)^3}{27 k^4 (1 - k^2)^2},$$

gdzie k^2 przechodzi przez wszelkie wartości od 0 do 1. Dla łatwiejszego zbadania, w jaki sposób ilość J zmienia swe wartości, wprowadzamy nową zmienną $t = k^2(1 - k^2)$, która widocznie wzrasta od 0 do $\frac{1}{4}$ w przedziale od $k^2 = 0$ do $k^2 = \frac{1}{2}$, a następnie, przy dalszem wzrastaniu ilości k^2, maleje od $\frac{1}{4}$ do 0.

Z drugiej strony niezmiennik J można napisać tak:

$$J = \frac{4}{27} \frac{(1-t)^3}{t^2},$$

stąd wnioskujemy bezpośrednio, że gdy t wzrasta od 0 do $\frac{1}{4}$, odpowiednia wartość J ciągle maleje. Łącząc ze sobą zauważone sposoby zmiany ilości t i J, przychodzimy ostatecznie do wniosku, który wyrażamy za pomocą następującej tablicy:

k^2	0 . . . . . . $\frac{1}{2}$ 1	
J	$+\infty$ . . . . . . 1 . . . . . . $+\infty$,	(jedno minimum).

Przypadek 2-gi. $\Delta < 0$. Kładąc, jak poprzednio, $k^2(1-k^2) = t$, mamy znowu:

$$J = \frac{4}{27} \frac{(1-t)^3}{t^3}.$$

Lecz teraz należy wziąć $k^2 = e^{i\varphi}$, przyczem φ przyjmuje wszelkie wartości od 0 do 2π; a więc

$$t = e^{i\varphi}(1 - e^{i\varphi}),$$

$$J = -\frac{1}{27} \frac{(2\cos\varphi - 1)^3}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

albo lepiej

$$J = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{1}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^3}{\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

skąd bezpośrednio wnosimy, że

$$J(2\pi - \varphi) = J(\varphi).$$

Zatem dość jest zbadać przebieg niezmiennika J w przypuszczeniu, że φ przebiega wartości w granicach od 0 do π.

Uczyniwszy następnie $\sin^2\frac{\varphi}{2} = x$, otrzymujemy:

$$J = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{1}{4} - x\right)^3}{x},$$

przyczem x przechodzi przez wartości od 0 do 1. Z ostatniego wzoru jest widocznem, że dopóki x pozostaje w przedziale od 0 do $\frac{1}{4}$, wartość J ciągle wzrasta, przechodząc od $-\infty$ do 0. Pozostaje więc do zbadania tylko przedział od $x = \frac{1}{4}$ do $x = 1$.

Dla tego napiszemy wzór na J tak:

$$J^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left[\frac{1}{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{4\left(x - \frac{1}{4}\right)^3}\right];$$

stąd wnosimy wprost, że gdy x wzrasta od $\frac{1}{4}$ do 1, wartość J^{-1} maleje od ∞ do 1; a zatem wartość J wzrasta od 0 do 1.

Na mocy powyższych uwag przychodzimy do następującej tablicy, która objaśnia charakter przebiegu ilości J, gdy argument φ przechodzi po kolei przez wszystkie wartości od 0 do 2π.

φ	0 . . . $\frac{\pi}{3}$ . . . π . . . $\frac{5}{3}\pi$ . . . 2π	
J	$-\infty$ . . . 0 . . . 1 . . . 0 . . . $-\infty$.	(jedno maximum).

§ 9. *Równanie rozwiązująca modułowe.*

Równanie modułowe jest szóstego stopnia, lecz łatwo sprowadza się do trzeciego przez wprowadzenie pewnej rozwiązującej pomocniczej, którą nazwiemy półmodułową.

Na pierwszy rzut oka przedstawiają się dwie formy dla podobnej rozwiązującej. Pierwszą jest:

$$z = k^2(1 - k^2). \tag{1}$$

Napisawszy równanie modułowe tak:

$$\frac{4[1 - k^2(1-k^2)]^3}{g_2{}^3} = \frac{27[k^2(1-k^2)]^2}{\Delta},$$

i podstawiwszy z zamiast $k^2(1-k^2)$, otrzymujemy:

$$z - 1)^3 + \frac{27}{4} J z^2 = 0. \tag{2}$$

Tak przedstawia się równanie, którego pierwiastkami są ilości

$$k^2(1-k^2), \qquad \frac{k^2-1}{k^4}, \qquad \frac{-k^2}{(1-k^2)^2}.$$

Inną znów rozwiązującą półmodułową jest:

$$z' = k^2 + \frac{1}{k^2}.$$

Napiszemy równanie modułowe tak:

$$\frac{4\,[1-k^2+k^4]^3}{g_2{}^2} = \frac{27\,[k^4-2k^6+k^8]}{\Delta};$$

stąd, dzieląc z obu stron przez k^6 i biorąc pod uwagę (3), otrzymujemy:

(4) $$(z'-1)^3 = \frac{27}{4}\,J\,(z'-2).$$

Tak przedstawia się równanie z pierwiastkami

$$k^2 + \frac{1}{k^2}, \qquad 1 - k^2 + \frac{1}{1-k^2}, \qquad 2 + \frac{1}{k^2(k^2-1)}.$$

A zatem równanie (4) powinno się otrzymać z równania (2) przy pomocy podstawienia

(5) $$z' = 2 - \frac{1}{z}.$$

Równanie uprości się, jeśli zamiast z' wprowadzimy nową rozwiązującą, określoną tak:

(6) $$z'' = z' - 1 = 1 - \frac{1}{z};$$

otrzymujemy wtedy:

(7) $$4\,z''^3 = 27\,J\,(z''-1).$$

Tak przedstawia się równanie, którego pierwiastki są:

$$k^2 - 1 + \frac{1}{k^2}, \qquad -1^2 + \frac{1}{1-k^2}, \qquad 1 + \frac{1}{k^2(k^2-1)}.$$

Oznaczywszy odpowiednio przez Δ' i J' wyróżnik i niezmiennik bezwzględny dla równania (7), znajdujemy:

(8) $$\Delta' = 27^2\,J^2\,(J-1) = \frac{27^4\,g_2{}^6\,g_3{}^2}{\Delta^3},$$

$$J' = 1 + \frac{1}{J-1},$$

albo

(9) $$(J-1)\,(J'-1) = 1.$$

Więc jeżeli J zawierać się będzie na zewnątrz przedziału $0, x$, to J' zawierać się będzie wewnątrz, i naodwrót.

§ 10. *Związek pomiędzy pierwiastkiem równania 3go stopnia i odpowiednim pierwiastkiem równania rozwiązującego półmodułowego.*

Pokażemy teraz, że każdy pierwiastek równania

(1) $$4\,x^3 - g_2\,x - g_3 = 0$$

jest funkcyą wymierną odpowiedniego pierwiastka równania rozwiązującego półmodułowego

(2) $$4\,z''^3 - 27\,J\,z'' + 27\,J = 0,$$

tak, iż (2) otrzymuje się z (1) za pomocą przekształcenia T s c h i r n h a u s a.

W samej rzeczy, mamy:

$$z'' = k^2 + \frac{1}{k^2} - 1 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} + \frac{e_1-e_3}{e_2-e_3} - 1,$$

$$z'' = \frac{(e_1-e_3)^2 + (e_2-e_3)^2}{(e_1-e_3)\,(e_2-e_2)} - 1 = \frac{(e_1-e_3+e_2-e_3)^2 - 3\,(e_3-e_1)\,(e_3-e_3)}{(e_3-e_1)\,(e_3-e_2)},$$

$$z'' = \frac{9\,e_3{}^2 - \frac{3}{4}\,X'(e_3)}{\frac{1}{4}\,X'(e_3)},$$

gdzie

$$X(x) = 4x^3 - g_2\,x - g_3;$$

a zatem:

$$z'' = \frac{3g_2}{12e_3{}^3 - g_2},$$

$$\frac{1}{z''} = \frac{4\,e_3{}^2}{g_2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{g_3}{g_2\,e_3},$$

(3) $$\frac{2\,g_2}{3\,g_3}\,e_3 = -1 - \frac{3}{2z''-3}.$$

Tak się wyraża w najprostszy sposób związek między odpowiedniemi pierwiastkami równań (1) i (2).

Z powyższego wynika wniosek, że wszelkie równanie trzeciego stopnia daje się sprowadzić przy pomocy przekształcenia liniowego do postaci

$$4x^3 - 27Jx + 27J = 0,$$

w której zawiera się jeden tylko parametr J, przyczem założyć można, że $0 < J < 2$. W samej rzeczy, jeśli wartość niezmiennika bezwzględnego J zawiera się między 0 i 2, wtedy równanie (2) czyni zadość wymaganiu; w przeciwnym razie równanie pierwotne (1) należy przekształcić za pomocą podstawienia

$$\frac{g_2}{g_3}x = -y;$$

otrzymujemy:

$$4y^3 - \frac{g_2{}^3}{g_3{}^2}y + \frac{g_2{}^3}{g^2_2} = 0,$$

albo:

(4) $$4y^3 - 27J'y + 27J' = 0,$$

gdzie J' określa się według wzoru

$$(J' - 1)(J - 1) = 1,$$

a zatem J' zawiera się między 0 i 1 i równanie (4) zadość czyni wymaganiu.

Należałoby się z tem liczyć, gdybyśmy chcieli układać tablicę dla znajdowania pierwiastków jakiegobądź rów nania stopnia trzeciego. Na tem kończymy nasze studyum o równaniach stopnia trzeciego i przechodzimy do teoryi równań stopnia czwartego.

§ 11. *Równanie stopnia 4-go. Rozwiązująca Lagrange'a. Wyróżnik.*

Ogólne równanie stopnia czwartego oznaczać będziemy tak:

(1) $$p_0t^4 + 4p_1t^3 + 6p_2t^3 + 4p_3t + p_4 = 0,$$

a pierwiastki przez t_0, t_1, t_2, t_3.

Lagrange rozważał rozwiązującą

(2) $$z = t_0t_3 + t_1t_2,$$

posiadającą trzy wartości, i znalazłszy równanie stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są trzy wartości z, a mianowicie:

(3) $$p_0{}^3z^3 - 6p_0{}^2p_2z^2 + 4p_0(4p_1p_3 - p_0p_4)z$$
$$- 8(2p_1{}^2p_4 - 3p_0p_2p_4 + 2p_0p_3{}^2) = 0;$$

wyłożył następnie metodę, przy pomocy której pierwiastki równania (1) dają się wyrazić przez pierwiastki równania (3). Można było oczekiwać, że ostateczne wzory będą skomplikowane, dla tego ani Lagrange ani późniejsi autorowie rachunku do końca nie doprowadzali.

Aby jednak łatwiej powiązać rezultaty, otrzymane przez późniejszych autorów, uważam za najważniejsze wziąć za punkt wyjścia rozwiązującą (2) i iść dalej drogą, wskazaną przez Lagrange'a; tylko trzeba będzie wprowadzić niektóre zmiany i rachunki doprowadzać do końca.

Naprzód, rozwiązująca Lagrange'a ma tę niedogodność, że suma jej trzech wartości nie jest zerem; więc równanie (3) nie jest takiem, do którego można bezpośrednio zastosować wzór Cardana. Rozwiązującą z należy zastąpić przez nową x, różniącą się od z o pewną ilość stałą a, przytem wolno nam jeszcze wprowadzić mnożnik dowolny; korzystając z tego, zakładamy

$$\frac{4}{p_0}x = a - (t_0t_3 + t_1t_2),$$

gdzie a musi być dobrane tak, aby suma trzech wartości x była zerem, t. j.

$$3a - \frac{6p_2}{p_0} = 0,$$

skąd znajdujemy:

$$a = \frac{2p_2}{p_0}.$$

Więc nowa rozwiązująca x jest taka:

$$\frac{4}{p_0}x = \frac{2p_2}{p_0} - (t_0t_3 + t_1t_2),$$

albo

$$\frac{4}{p_0}x = \frac{1}{3}\Sigma\, t_0t_1 - (t_0t_3 + t_1t_2),$$

$$\frac{12}{p_0}x = (t_0 - t_1)(t_2 - t_3) - (t_0 - t_2)(t_3 - t_1).$$

Dla skrócenia zgodzimy się oznaczać przez D_0, D_1, D_2, następujące trzy wartości jednej i tej samej rozwiązującej:

(4) $$D_0 = (t_0 - t_1)(t_2 - t_3), \qquad D_1 = (t_0 - t_2(t_3 - t_1),$$
$$D_2 = (t_0 - t_3)(t_1 - t_2);$$

rozwiązująca x może być napisana w postaci:

$$(5) \qquad \frac{12}{p_0}\, x = D_0 - D_1 .$$

Pozostałe dwie wartości x przedstawiają się tak:

$$\frac{12}{p_0}\, x_1 = D_1 - D_2, \qquad \frac{12}{p_0}\, x_2 = D_2 - D_0 ;$$

stąd znowu staje się oczywistem, że

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Równanie rozwiązującej x otrzymuje się z równania (3) przy pomocy wzoru

$$z = 2\,\frac{p_2}{p_0} - 4\,\frac{x}{p_0},$$

i przedstawia się w sposób następujący:

$$(6) \qquad 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0,$$

gdzie g_2 i g_3 oznaczają wielomiany:

$$(7) \quad \begin{cases} g_2 = p_0 p_4 - 4 p_1 p_3 + 3 p_2^2, \\ g_3 = p_0 p_2 p_4 + 2 p_1 p_2 p_3 - p_0 p_3^2 - p_1^2 p_4 - p_2^3. \end{cases}$$

Zresztą wielomian g_3 można przedstawić dogodnie pod postacią wyznacznika trzeciego rzędu:

$$g_3 = \begin{vmatrix} p_0, & p_1, & p_2 \\ p_1, & p_2, & p_3 \\ p_2, & p_3, & p_4 \end{vmatrix} .$$

Oba te wielomiany odgrywają w teoryi równań czwartego stopnia szczególnie ważną rolę; znane są także z ogólnej teoryi niezmienników jako dwa niezmienniki zasadnicze formy dwójkowej czwartego stopnia; w dalszym ciągu nazywać będziemy g_2 niezmiennikiem pierwszym równania (1), a g_3—drugim. Pierwiastki równania (6) oznaczać będziemy przez e_1, e_2, e_3 z tem samem zastrzeżeniem, jakie było uczynione w § 4.

Zwróćmy tu uwagę na nader prosty dowód znanego twierdzenia Cayley'a, wynikający z rozpatrywania rozwiązującej (5).

Twierdzenie. Wyróżnik równania (1) równa się wyróżnikowi rozwiązującej (6), pomnożonemu przez $\left(\frac{4}{p_0}\right)^6$.

Istotnie, oznaczywszy odpowiednio przez D i D' wyróżniki równań (1) (6), będziemy mieli:

$$D' = \frac{p_0^6}{12^6}\,[D_0 - D_1 - D_1 + D_2]^2\,[D_1 - D_2 - D_2 + D_3]^2\,[D_2 - D_3 - D_1 + D_1]^2$$

$$= \frac{p_0^6}{12^6}\,[D_0 + D_2 - 2D_1]^2\,[D_1 + D_0 - 2D_2]^2\,[D_2 + D_1 - 2D_0]^2.$$

Lecz na mocy równania (4) oczywiście mamy

$$D_0 + D_1 + D_2 = 0,$$

a zatem:

$$D' = \frac{p_0^6}{12^6}\, 3^6 D_0^2 D_1^2 D_2^2,$$

$$D' = \frac{p_0^6}{4^6}\,(t_0 - t_1)^2 (t_0 - t_2)^2 \ldots (t_2 - t_3)^2,$$

$$D' = \frac{p_0^6}{4^6}\, D,$$

co było do okazania.

Jeśli teraz przypomnimy sobie, że

$$D' = \frac{1}{16}\,(g_2^3 - 27 g_3^2),$$

i dla skrócenia oznaczymy $g_2^3 - 27 g_3^2$ przez Δ, otrzymamy wzór Cayley'a

$$(8) \qquad D = \frac{4^4}{p_0^6}\,\Delta .$$

§ 12. *Moduł i mnożnik równania stopnia czwartego.*

Oznaczając, jak wyżej, przez t_0, t_1, t_2, t_3 pierwiastki danego równania

$$(1) \qquad p_0 t^4 + 4 p_1 t^3 + 6 p_2 t^2 + 4 p_3 t + p_4 = 0.$$

a przez e_1, e_2, e_3 pierwiastki odpowiedniej rozwiązującej Lagrange'a

(2) $$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0,$$

łatwo przekonać się można, że przemiany pierwiastków t_0, t_1, ... wywołują w szeregu e_1, e_2, e_3 wszystkie sześć przemian, powtórzonych po cztery razy każda; stąd wynika, że różne wartości jakiejkolwiek funkcyi ilości e_1, e_1, e_3 są jedne i też same, bez względu na to, czy ta funkcya będzie uważana jako rozwiązująca równania (2), czy jako rozwiązująca równania (1).

Rozważmy dwie rozwiązujące równania (2), o których była mowa w § 1, mianowicie moduł i mnożnik, i uważając je teraz, jako funkcye pierwiastków t_0, t_1, ..., będziemy je nazywali modułem i mnożnikiem równania (1). Zobaczmy, jak się one wyrażają przez t_0, t_1, ...,

1. Wyrażenie modułu jest takie:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{D_1 - D_2 - D_2 + D_0}{D_0 - D_1 - D_2 + D_0} = -\frac{3D_2}{3D_0},$$

$$k^2 = -\frac{D_2}{D_0}.$$

Rezultat ten pokazuje nam, ze moduł równania stopnia czwartego jest stosunkiem anharmonicznym jego pierwiastków.

2. Wyrażenie mnożnika jest następujące:

$$\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3} = \frac{\frac{12}{p_0}}{D_0 - D_1 - D_2 + D_0} = \frac{12}{3p_0 D_0},$$

$$\lambda = \frac{4}{p_0 D_0};$$

a więc iloczyn z mnożnika równania stopnia czwartego przez spółczynnik $\frac{1}{4}p_0$ równa się rozwiązującej:

$$\frac{1}{D_0} = \frac{1}{(t_0 - t_1)(t_2 - t_3)}.$$

Wróćmy jeszcze do modułu; możemy go napisać tak:

$$k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1} : \frac{\infty - e_2}{\infty - e_1}:$$

co pokazuje, że moduł jest stosunkiem anharmonicznym czterech pierwiastków równania $0x^4 + 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$, a zatem stosunek anharmoniczny czterech pierwiastków funkcyi

$$T = p_0 t^4 + 4p_1 t^3 + 6p_2 t^2 + 4p_3 t + p_4,$$

równa się stosunkowi anharmonicznemu czterech pierwiastków funkcyi

$$X = 0x^4 + 4x^3 - g_2 x - g_2$$

czyli, innemi słowy, funkcye $T(t)$ i $X(x)$ są kolinearnemi; jedna z nich otrzymuje się z drugiej przy pomocy podstawienia liniowego:

$$t = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Pozostaje teraz znaleść w samej rzeczy takie podstawienie; zadanie to rozwiązuje się za pomocą metody spółczynników nieoznaczonych, lecz dla ułatwienia rachunku wyprowadzimy naprzód wzory pomocnicze.

§ 13, ***Związki między funkcyami pochodnemi pierwiastka t_0.***

Oznaczywszy, jak wyżej, przez T funkcyę

$$T = p_0 t^4 + 4p_1 t^3 + \dots + p_4,$$

położmy następnie dla skrócenia

$$T_1 = \frac{1}{4}\frac{dT}{dt}, \quad T_2 = \frac{1}{12}\frac{d^2T}{dt^2}, \quad T_3 = \frac{1}{24}\frac{d^3T}{dt^3},$$

i dajmy, że t ma wartość równą jakiemukolwiek z pierwiastków równania $T = 0$. W takim razie między różnemi związkami, zachodzącemi między ilościami T_1, T_2, T_3, wyróżniają się dwa, na które koniecznie należy nam zwrócić uwagę, a mianowicie:

(1) $$4T_1T_3 = 3T_2^2 - g_2,$$

(2) $$2p_0 T_1^2 = T_2^3 - g_2 T_2 - 2g_3.$$

Sprawdzenie podobnych wzorów nie przedstawia trudności, więc ograniczymy się na wypisaniu równości pośrednich. Najprzód, po wykonaniu wskazanych działań, otrzymujemy:

$$4\,T_1 T_3 - 3\,T_2^2 = p_0\,(p_0 t^4 + 4\,p_1 t^3 + 6\,p_2 t^2 + 4\,p_3 t) + 4 p_1 p_3 - 3 p_2^2$$
$$= p_0\,(T - p_4) + 4\,p_1 p_3 - 3\,p_2^2;$$

lecz $T=0$, przeto:

$$4\,T_1 T_2 - 3\,T_2^2 = -\,p_0 p_4 + 4 p_1 p_3 - 3 p_2^2 = -\,g_2\,.$$

Dalej, szukając reszty z dzielenia funkcyi $T_3^2 - 2 p_0 T_1^2$ przez T, otrzymujemy równość:

$$T_2^3 - 2\,p_0 T_1^2 = QT + p_0 g_2 t^2 + 2 p_1 g_2 t + p_2 g_2 + 2\,g_2\,,$$

gdzie Q oznacza pewną funkcyę całkowitą ilości t. Dla wartości t, równej pierwiastkowi równania $T=0$, otrzymujemy:

$$T_2^3 - 2 p_0 T_1^2 = g_2\,(p_0 t^2 + 2\,p_1 t + p_2) + 2\,g_3$$
$$= g_2\,T_2 + 2\,g_2\,.$$

Tym sposobem oba wzory są sprawdzone. W dalszym ciągu przytoczymy inne dowody tychże warunków.

§ 14. *Przekształcenie funkcyi T na funkcyę X.*

Oznaczywszy, jak zwykle, przez t_0 jeden z pierwiastków równania $T=0$, rozważmy podstawienie liniowe

$$(1) \qquad t = t_0 + \frac{b}{x-a}\,,$$

w którém a i b są spółczynniki tymczasem dowolne; wprowadziwszy to podstawienie do wyrażenia funkcyi $T(t)$, postarajmy się sprowadzić rezultat do postaci najprostszej. Według wzoru Taylora mamy:

$$T(t) = T(t_0) + \frac{b}{x-a}\,T'(t_0) + \frac{b^2}{2\,(x-a)^2}\,T''(t_0) + \frac{b^3}{6\,(x-a)^3}\,T'''(t_0)$$
$$+ \frac{b^4}{(x-a)^4}\,p_0;$$

lecz $T(t_0)=0$, zatem:

$$(x-a)^4 T(t) = b\,T'(t_0)\,(x-a)^3 + \frac{b^2}{2}\,T''(t_0)\,(x-a)^2$$
$$+ \frac{b^3}{6}\,T'''(t_0)\,(x-a) + b^4 p_0\,,$$

albo

$$(x-a)^4\,T(t) = b\,T'(t_0) x^3 + \tfrac{1}{2}\,[b\,T''(t_0) - 6\,a\,T'(t_0)]\,b x^2$$
$$+ \frac{1}{6}\,[18 T'(t_0)\,a^2 - 6ab\,T''(t_0) + b^2 T'''(t_0)]\,bx$$
$$-\,[T'(t_0)\,a^3 - \frac{1}{2}\,a^2 b\,T''(t_0) + \frac{1}{6}\,b^2 a T'''(t_0) - b^3 p_0]\,b.$$

Możemy dobrać spółczynniki a i b w ten sposób, aby wyraz, zawierający x^2 z prawej strony był zerem; dla tego należy uczynić

$$a = \frac{\lambda}{6}\,T''(t_0), \qquad b = \lambda\,T'(t_0),$$

gdzie λ oznacza ilość dowolną; przytem rozumie się samo przez się, że wartość $T(t_0)$ nie powinna być zerem, gdyż wtedy mielibyśmy $b=0$, co być nie powinno; więc przypuszczamy, że t_0 jest pierwiastkiem pojedyńczym równania $T=0$.

Powyższy wzór na $T(t)$ przedstawia się teraz tak:

$$(x-a)^4\,T(t) = \lambda T'(t_0)^2 x^3 + \frac{\lambda^3}{12}\,T'(t_0)^2\,[T''(t_0)^2 - 2\,T'(t_0)\,T'''(t_0)]\,x$$
$$+ \lambda^4 T'(t_0)^2 \left[\frac{1}{3\,.\,6^2}\,T''(t_0)^3 - \frac{1}{6^2}\,T'(t_0) T''(t_0) T'''(t_0) + T'(t_0)^2 p_0\right],$$

wprowadziwszy z prawej strony zamiast T', T'', T''' odpowiednio T_1, T_2, T_3 otrzymujemy:

$$(x-a)^4\,T(t) = 4\,\lambda\,T_1^2\,[4\,x^3 - 4^2\lambda^2\,(3\,T_2^2 - 4\,T_1 T_3)\,x$$
$$+ 4^3\lambda^3\,(T_2^3 - 2\,T_1 T_2 T_3 + p_0\,T_1^2)].$$

Przy pomocy wzorów (1) i (2) § 13 znajdujemy:

$$3\,T_2^2 - 4\,T_1 T_3 = g_2,$$

$$T_2^3 - 2 T_1 T_2 T_3 + p_0 T_1^2 = T_2^3 - 2 T_1 T_2 T_3 + \frac{1}{2}\,T_2^3 - \frac{1}{2}\,g_2\,T_2 - g_3$$
$$= \frac{1}{2}\,T_2\,(3\,T_2^2 - 4\,T_1 T_3 - g_2) - g_3\,,$$
$$= -\,g_3\,,$$

a zatem

$$(x-a)^4\,T(t) = 4\,\lambda\,T_1^2\,[4x^3 - (4\lambda)^2 g_2 x - (4\lambda)^3 g_3].$$

Uczyńmy nakoniec $\lambda = \frac{1}{4}$, otrzymujemy wtedy:

$$(x-a)^4\, T(t) = T_1^{\,2}\,[4x^3 - g_2 x - g_3].$$

Przekonaliśmy się tedy w samej rzeczy, że funkcya $T(t)$ za pomocą podstawienia liniowego przechodzi na odpowiadającą jej funkcyę $X(x)$, co nadto przywodzi nas do twierdzenia następującego:

Twierdzenie. Niech $T(t)$ przedstawia dowolną funkcyę całkowitą stopnia czwartego, a $X(x)$ odpowiednią funkcyę dla rozwiązującej Lagrange'a to jest:

$$X(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Jeśli t_0 oznacza jakikolwiek z pierwiastków pojedyńczych równania $T=0$, to za pomocą podstawienia liniowego

(1) $$t = t_0 + \frac{6\,T'(t_0)}{24x - T''(t_0)}$$

funkcya T przechodzi na X, mianowicie mamy:

(2) $$(x-a)^4\, T(t) = \frac{1}{4^2}\, T'(t_0)^2 X(x),$$

gdzie dla skrócenia nazwano

$$a = \frac{1}{24}\, T''(t_0).$$

Ze wzoru (2) wynika, jako wniosek, że dla wartości zmiennej x, równych pierwiastkom e_1, e_2, e_3, odpowiednie wartości t są równe pierwiastkom równaniu $T=0$, różnym od t_0; mamy zatem taki wzór:

(3) $$t_i = t_0 + \frac{6\,T'(t)_0}{24\,e_i - T''(t_0)}, \qquad (i=1, 2, 3)$$

Jeżeli więc pierwiastki rozwiązującej Lagrange'a będą przyjęte za ilości znane, to równanie $T(t)=0$ będzie w takim razie normalnem, to jest przez każdy z jego pierwiastków pozostałe wyrażać się będą sposobem wymiernym.

§ 16. *Zastosowanie do redukcyi całki.*

Skorzystamy z ostatniego twierdzenia w celu rozwiązania zadania o przekształceniu całki

$$\int f(t, \sqrt{T(t)})\, \frac{dt}{\sqrt{T}},$$

gdzie f oznacza daną funkcyę wymierną, na podobną całkę, w którejby tylko zamiast funkcyi stopnia czwartego T występowała funkcya stopnia trzeciego nowej zmiennej x, i aby przytem spółczynnik przy x^2 w wyrażeniu tej drugiej był zerem. Rozumie się, że zakładamy, iż $T(t)$ nie dzieli się przez żaden kwadrat.

W tym celu wprowadzimy nową zmienną niezależną x za pomocą podstawienia:

(1) $$t = t_0 + \frac{b}{x-a},$$

przyczem t_0 oznacza jakikolwiek z pierwiastków równania $T(t)=0$, prócz tego

$$a = \frac{1}{24}\, T''(t_0), \qquad b = \frac{1}{4}\, T'(t_0).$$

Według powyższego twierdzenia mamy:

(2) $$T(t) = \frac{b^2}{(x-a)^4}\, X(x),$$

gdzie

$$X(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3;$$

stąd widać, że, gdy t_0 jest pierwiastkiem rzeczywistym, odpowiadające sobie wartości T i X są jednakowego znaku; w takim razie możemy napisać:

(3) $$\sqrt{T} = \frac{(b)}{(x-a)^2}\, \sqrt{X},$$

przyczem oba pierwiastki kwadratowe są wzięte ze znakiem $+$, a (b) oznacza wartość bezwzględną spółczynnika b. Z równania (1) otrzymujemy:

$$dt = -\frac{b\,dx}{(x-a)^2},$$

a zatem

$$\frac{dt}{\sqrt{T}} = \varepsilon\,\frac{dx}{\sqrt{X}}\,, \tag{4}$$

gdzie ε oznacza jedność, wziętą ze znakiem przeciwnym znakowi spółczynnika h.

Z wzorów (3), (4) wnosimy, że rozważana całka za pomocą podstawienia (1) przechodzi na następującą:

$$\int F(x, \sqrt{X})\,\frac{dx}{\sqrt{X}}\,,$$

gdzie F oznacza funkcyę wymierną. Tylko w przypadku, gdy wszystkie pierwiastki równania $T=0$ są urojone, powyższa metoda redukcyi całki nie ma praktycznego znaczenia, bo podstawienie (1) jest urojone przy każdym pierwiastku t_0.

W przypadku szczególnym, gdy $f=1$, mamy:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{T}} = \varepsilon\int\frac{dx}{\sqrt{X}}\,, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

§ 16. *Parametry zasadnicze równania stopnia czwartego.*

Dla uproszczenia wzorów będziemy w dalszym ciągu przypuszczali, że w równaniu danem stopnia czwartego spółczynnik $p_0 = 1$.

W pewnych badaniach, dotyczących pierwiastków równania

$$t^4 + 4p_1 t^3 + 6p_2 t^2 + 4p_3 t + p_4 = 0, \tag{1}$$

okazuje się dogodnem wprowadzenie, zamiast spółczynników $p_1, p_2, \ldots,$ nowych parametrów, pozwalających na lepsze wyświetlenie różnych stron przedmiotu. Dwa takie parametry wprowadziliśmy już poprzednio: są niemi niezmienniki g_2 i g_3, lecz te nie wystarczają do dostatecznego scharakteryzowania równania. Wprowadzimy tedy dwa nowe parametry, które dla skrócenia oznaczać będziemy przez x_0 i y_0, mianowicie:

$$x_0 = p_1^2 - p_2\,, \qquad y_0 = 2p_1^3 - 3p_1 p_2 + p_3\,. \tag{2}$$

Mamy więc cztery parametry, wyrażone przez spółczynniki równania (1). Z łatwością możemy wyrazić je przez pierwiastki tegoż równania:

$$48x_0 = \Sigma(t_0-t_1)^2, \qquad 32y_0 = -\Sigma(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3),$$
$$24g_2 = D_0^2 + D_1^2 + D_2^2, \qquad 432g_3 = (D_0-D_1)(D_1-D_2)(D_2-D_0),$$

skąd widać, że parametry nasze zależą tylko od różnic $t_0-t_1, t_1-t_2, \ldots t_2-t_3$; a więc przy dowolnych wartościach na h każdy z parametrów równania

$$T(t+h) = t^4 + \frac{1}{6}\,T'''(h)\,t^3 + \ldots + T(h) = 0,$$

nie zależy od h i posiada tęż samą wartość, co odpowiedni parametr równania $T(t) = 0$.

Wszystkie równania, otrzymane ze wzoru $T(t+h)=0$, przy różnych szczególnych wartościach na h, uważać będziemy jako stanowiące jeden układ równań równoważnych. Cały układ określa się jednem równaniem, dowolnie wybranem, które przyjmiemy za przedstawiciela układu. W dalszym ciągu za przedstawiciela wybierać będziemy to równanie, w którem brakuje drugiego wyrazu.

I tak, wszystkie równania, należące do jednego i tego samego układu, mają odpowiednie parametry jednakowe. Łatwo sprawdzić i odwrotne twierdzenie, że dwa równania

$$T(t) = 0, \qquad T_1(t) = 0,$$

mające odpowiednio też same cztery parametry, należą do jednego i tego samego układu. W samej rzeczy, niech

$$U(t) = t^4 + 6q_2 t^2 + 4q_3 t + q_4 = 0$$

przedstawia równanie bez drugiego wyrazu, równoważne z równaniem $T(t) = 0$; a

$$U_1(t) = t^4 + 6q'_2 t^2 + 4q'_3 t + q'_4 = 0\,,$$

równanie podobne, równoważne z równaniem $T_1(t) = 0$. Według założenia mamy:

$$x_0 = -q_2 = -q'_2\,,$$
$$y_0 = q_3 = q'_3\,,$$
$$g_2 = q_4 + 3q_2^2 = q'_4 + 3q'^2_2\,,$$
$$g_3 = q_2 q_4 - q_3^2 - q_2^3 = q'_2 q'_4 - q'^2_3 - q'^3_2\,,$$

skąd bezpośrednio otrzymujemy:

$$q_2 = q'_2\,, \qquad q_3 = q'_3\,, \qquad q_4 = q'_4\,;$$

a zatem funkcye $U(t)$ i $U_1(t)$ są identyczne, a to dowodzi nam, że równania

$$T(t) = 0 \quad \text{i} \quad T_1(t) = 0.$$

są równoważne.

§ 17. *Rozwiązująca geometryczna równania stopnia czwartego.*

Każdemu równaniu stopnia czwartego

$$T(t) = t^4 + 4p_1t^3 + 4p_3t + 6p_2t^2 + p_4 = 0,$$

odpowiada równanie z dwiema zmiennemi x i y:

(1) $$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

określające pewną krzywą stopnia trzeciego, którą nazwiemy r o z w i ą z u j ą c ą g e o m e t r y c z n ą danego równania $T(t) = 0$.

Wszystkie równania równoważne między sobą posiadają oczywiście tę samą krzywą sześcienną C_3. Postać krzywej zależy od tego, czy $\Delta > 0$, czy też $\Delta < 0$. W pierwszym przypadku krzywa składa się z owalu i oddzielnej nieskończonej gałęzi (fig. 1); w drugim, stanowi jednę nieskończoną gałęź (fig. 2). Odcięte punktów przecięcia rozwiązującej geometrycznej z osią X są pierwiastkami rozwiązującej L a g r a n g e'a $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$, t. j. pierwiastkami, które wyżej oznaczyliśmy przez e_1, e_2, e_3.

Zwróćmy się teraz do dwóch pierwszych parametrów równania $T(t) = 0$, oznaczonych wyżej przez x_0 i y_0, i zgodźmy się uważać je jako spółrzędne pewnego punktu (x_0, y_0) na płaszczyźnie rozwiązującej geometrycznej. Punkt ten nazwiemy b i e g u n e m równania $T(t) = 0$.

Twierdzenie. Biegun równania leży zawsze na rozwiązującej geometrycznej tegoż równania. Dość jest dowieść tego twierdzenia dla przypadku szczególnego, w którym $p_1 = 0$, bo dla wszystkich równań równoważnych tak biegun jak i rozwiązująca geometryczna są wspólne. Lecz uczyniwszy $p_1 = 0$, mamy:

$$x_0 = -p_2, \quad y_0 = p_3, \quad g_2 = p_4 + 3p_2^2, \quad g_3 = p_2p_4 - p_3^2 - p_2^3.$$

Rugując p_4 z dwóch ostatnich wzorów, otrzymujemy:

$$g_3 = p_2(g_2 - 4p_2^2) - p_3^2 - p_2^3 = p_2g_2 - 4p_2^3 - p_3^2,$$

albo

$$g_3 = -x_0g_2 + 4x_0^3 - y_0^2, \quad y_0^2 = 4x_0^3 - g_2x_0 - g_3,$$

co było do okazania.

W przypadku $\Delta > 0$ biegun równania może znajdować się na owalu, albo też na gałęzi nieskończonej. Aby dowiedzieć się, który z tych przypadków w danym razie ma miejsce, należy przedewszystkiem zauważyć, że pierwiastki równania pochodnego

$$\frac{d(4x^3 - g_2x - g_3)}{dx} = 12x^2 - g_2 = 0,$$

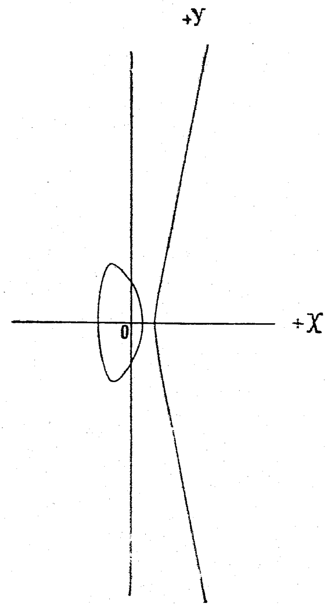

Fig. 1.
$(y^2 = 4x^3 - 7x + 3)$

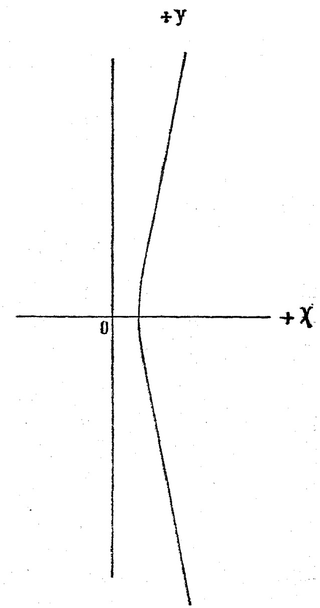

Fig. 2.
$(y^2 = 4x^3 - 4)$

są zawarte między pierwiastkami e_1, e_2, e_3, jak uczy twierdzenie R o l l e g o, a więc mamy taką podwójną nierówność:

$$e_2 < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}} < e_1;$$

stąd zaś wypływa, jako wniosek, twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli dla równania stopnia czwartego z wyróżnikiem dodatnim zachodzi nierówność

$$x_0 < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}},$$

to biegun równania leży na owalu; w przeciwnym razie, jeżeli

$$x_0 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}},$$

biegun leży na gałęzi nieskończonej.

§ 18. *Dane są krzywa sześcienna i biegun, znaleść odpowiednie równanie.*

Niech dane będą szczególne wartości niezmienników g_2 i g_3; a tem samem dana odpowiednia krzywa sześcienna

(1) $$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3;$$

niech, dalej, dany będzie na krzywej (1) punkt (x_0, y_0), który przyjmujemy za biegun. Za pomocą tych danych postarajmy się znaleść odpowiadające im równanie. Przez punkt (t_0, y_0) poprowadźmy sieczną

(2) $$y - y_0 = 2t(x - x_0),$$

której spółczynnik kątowy pozostaje dowolnym. Oprócz punktu (x_0, y_0) sieczna przecina krzywą C_3 jeszcze w dwóch punktach (x_1, y_1), (x_2, y_2), przyczem x_1 i x_2 są pierwiastkami równania stopnia drugiego

(3) $$x^2 + (x_0 - t^2)x - ty_0 + t^2 x_0 + x_0^2 - \frac{1}{4}g_2 = 0,$$

którego wyróżnik wyraża się wzorem:

(4) $$(x_1 - x_2)^2 = t^4 - 6x_0 t^2 + 4y_0 t + g_2 - 3x_0^2.$$

W przypadku, gdy sieczna (2) jest styczną do C_3 w punkcie (x_1, y_1), mamy $x_1 = x_2$, a zatem:

(5) $$t^4 - 6x_0 t^2 + 4y_0 t + g_2 - 3x_0^2 = 0.$$

Pierwiastki tego równania określają cztery styczne, które można przeprowadzić do C_3 z punktu (x_0, y_0); dla tego nazywać je będziemy **równaniem czterech stycznych**.

Oznaczmy teraz cztery parametry równania (5) przez x'_0, y'_0, g'_2, g'_3, i szukajmy ich wartości przy pomocy znanych nam wzorów ogólnych; znajdujemy:

$$x'_0 = x_0, \quad y'_0 = y_0, \quad g'_2 = g_2, \quad g'_3 = g_3.$$

A zatem równanie (5) czyni zadość postawionym przez nas warunkom i przyszliśmy do następującego twierdzenia.

Twierdzenie. Daną jest rozwiązująca geometryczna

(1) $$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

i na niej punkt (x_0, y_0). Równanie czterech stycznych dla punktu (x_0, y_0), mianowicie:

$$t^4 - 6x_0 t^2 + 4y_0 t + g_2 - 3x_0^2 = 0,$$

jest właśnie takie, że rozwiązującą jego geometryczną jest krzywa (1), a biegunem punkt (x_0, y_0).

Równanie czterech stycznych jest najprostszym przedstawicielem układu równań równoważnych, bo brakuje w nim drugiego wyrazu.

Wniosek 1. Wszelkie równanie stopnia czwartego bez drugiego wyrazu może być uważane jako równanie czterech stycznych, wyprowadzonych z odpowiedniego bieguna do odpowiedniej rozwiązującej geometrycznej.

Wniosek 2. Jeśli wyróżnik Δ danego równania stopnia czwartego posiada wartość dodatnią, to równanie będzie miało wszystkie pierwiastki rzeczywiste, albo wszystkie urojone, stosownie do tego, czy biegun leży na gałęzi nieskończonej krzywej C_3, czy też na owalu. Jeśli zaś $\Delta < 0$, to równanie ma dwa tylko pierwiastki rzeczywiste.

Toż samo można przedstawić inaczej tak:

$$\Delta > 0 \quad \begin{cases} x_0 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}, & \text{cztery pierwiastki rzeczywiste,} \\ x_0 < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}, & \text{cztery pierwiastki urojone.} \end{cases}$$

$\Delta < 0$, dwa pierwiastki rzeczywiste, dwa urojone.

Do tegoż samego rezultatu przyjdziemy później bez pomocy przedstawienia geometrycznego.

§ 19. *Punkt styczności stycznej, przeprowadzonej z bieguna do krzywej C_3.*

Niech będzie dane równanie czwartego stopnia bez drugiego wyrazu

(1) $$T(t) = t^4 + 6p_2 t^2 + 4p_3 t + p_4 = 0;$$

niech (x_0, y_0) przedstawia jego biegun, a

(2) $$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

rozwiązującą geometryczną.

Równanie każdej ze stycznych do (2), przeprowadzonych z punktu (x_0, y_0), przedstawia się tak:

(3) $$y - y_0 = 2t(x - x_0),$$

gdzie t oznacza jeden z pierwiastków równania (1).

Oznaczając punkt styczności przez (x_1, y_1), mamy dla x_1 następujące równanie (§ 18):

$$x_1^2 + (x_0 - t^2)x_1 - ty_0 + t^2 x_0 + x_0^2 - \frac{1}{4}g_2 = 0,$$

którego dwa pierwiastki są równe, a więc otrzymujemy:

$$x_1 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}x_0,$$

$$y_1 = y_0 + 2t(x_1 - x_0) = y_0 + t^3 - 3x_0 t.$$

Podstawiwszy następnie zamiast x_0 i y_0 odpowiednie wartości, otrzymujemy:

$$x_1 = \frac{1}{2}(t^2 + p_2), \qquad y_1 = t^3 + 3p_2 t + p_3,$$

czyli

$$x_1 = \frac{1}{24}T''(t), \qquad y_1 = \frac{1}{4}T'(t).$$

Tak wyrażają się spółrzędne punktu styczności stycznej do rozwiązującej geometrycznej, przeprowadzonej z bieguna.

Zważywszy teraz, że żadna z ilości $T'(t)$, $T''(t)$ nie zmienia swej wartości w skutek zamiany równania $T(t) = 0$ na równanie równoważne $T(t+h) = 0$, przychodzimy do następującego twierdzenia:

Twierdzenie. Niech będzie jakiekolwiek równanie stopnia czwartego

$$T = t^4 + 4p_1 t^3 + 6p_2 t^2 + 4p_3 t + p_4 = 0.$$

Cztery punkty, określone wzorami

$$x_1 = \frac{1}{24}T''(t), \qquad y_1 = \frac{1}{4}T'(t)$$

są punktami styczności stycznych, przeprowadzonych z bieguna równania $T = 0$ do jego rozwiązującej geometrycznej.

W n i o s e k. Uczyniwszy dla skrócenia

$$\frac{1}{12}T''(t) = T_2, \qquad \frac{1}{4}T'(t) = T_1$$

i z uwagi, że punkt (x_1, y_1) leży na rozwiązującej geometrycznej, otrzymujemy

$$T_1^2 = \frac{1}{2}T_2^3 - \frac{1}{2}g_2 T_2 - g_3,$$

co stanowi dowód wzoru (2) § 13.

Uwaga. Wzory (1) i (2) § 13 można też udowodnić w sposób następujący:

Niech t_0 oznacza jakikolwiek z pierwiastków danego równania $T(t)=0$; uczyniwszy dla skrócenia

$$\frac{1}{4}T'(t_0) = T_1, \quad \frac{1}{12}T''(t_0) = T_2, \quad \frac{1}{24}T'''(t_0) = T_3,$$

mamy nowe równanie, równoważne z poprzedniem:

$$T(t_0 + t) = t^4 + 4T_3 t^3 + 6T_2 t^2 + 4T_1 t = 0.$$

Parametry zasadnicze ostatniego równania są odpowiednio też same co i danego, a zatem:

$$x_0 = T_3^2 - T_2, \quad y_0 = 2T_3^3 - 3T_2 T_3 + T_1,$$

$$g_2 = 3T_2^2 - 4T_1 T_3, \quad g_3 = -T_1^2 - T_2^3 + 2T_1 T_2 T_3.$$

Z ostatnich dwóch wzorów otrzymujemy bezpośrednio dwa wzory § 13.

Uczynimy tu jeszcze jedną uwagę, a mianowicie, że parametry a i b w równaniu (1) § 15, przedstawiają spółrzędne x_1, y_1, któremi zajmowaliśmy się w paragrafie niniejszym.

§ 20. *Nowe wzory na redukcyę całki.*

Niech dane będzie równanie stopnia czwartego bez drugiego wyrazu:

(1) $$T = t^4 + 6p_2 t^2 + 4p_3 t + p_4 = 0.$$

i odpowiadająca mu krzywa sześcienna:

(2) $$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

z biegunem (x_0, y_0).

Przez biegun przeprowadźmy dowolną sieczną

(3) $$y - y_0 = 2t(x - x_0)$$

i oznaczmy punkty jej przecięcia z krzywą przez (x, y) (x', y'); przyjmijmy następnie ilość t za zmienną niezależną: każda z ilości x, y, x', y' jest funkcyą zmiennej t; szukajmy wzoru na nie i na ich pochodne.

Na zasadzie równania (2) § 18 mamy:

(4) $$x + x' = t^2 - x_0; \quad x - x' = \sqrt{T},$$

a stąd i z równania (3) otrzymujemy:

$$x = \frac{1}{24} T'' + \frac{1}{2}\sqrt{T}; \qquad y = \frac{1}{4} T' + t\sqrt{T}.$$

Oznaczmy dla skrócenia $4x^3 - g_2 x - g_3$ przez X, to ostatnie dwa równania można tak napisać:

(5) $$\begin{cases} x = \dfrac{1}{24} T'' + \dfrac{1}{2}\sqrt{T}, \\[2ex] \sqrt{X} = \dfrac{1}{4} T' + t\sqrt{T}; \end{cases}$$

Równania te przedstawiają pewne podstawienie, na mocy którego ilości x i $\sqrt{X}$ wyrażają się sposobem wymiernym przez t i $\sqrt{T}$. Lecz łatwo spostrzedz, że i odwrotnie, ilości t, $\sqrt{T}$ wyrażają się sposobem wymiernym przez $x, \sqrt{X}$. W samej rzeczy, z równań (3) i (4) otrzymujemy, po wyrugowaniu ilości x':

(6) $$\begin{cases} t = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\sqrt{X} - y_0}{x - x_0}, \\[2ex] \sqrt{T} = 2x + x_0 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{X} - y_0}{x - x_0}\right)^2 \end{cases}$$

We wzorach (5) i (6) zamiast $\sqrt{T}$, x, y można podstawić odpowiednio $-\sqrt{T}$, x', y', przyczem

$$\sqrt{X(x)} = y, \qquad \sqrt{X(x')} = y'.$$

Przechodząc teraz do pochodnych względem x i x', z równań (4) znajdujemy:

$$2\,dx = \left[2t + \frac{T'}{2\sqrt{T}}\right] dt = \frac{4t\sqrt{T} + T'}{2\sqrt{T}}\, dt.$$

co na mocy wzorów (4) i (5) można napisać tak:

$$dx = \frac{y}{x - x'}\, dt,$$

a podstawiwszy tu po obu stronach zamiast x, y, odpowiednio x', y', otrzymujemy nowy wzór na pochodną względem x'. Otrzymane wzory napiszemy w ten sposób:

(7) $$y\,dt = (x - x')\,dx, \quad y'\,dt = (x' - x)\,dx';$$

z wielu względów wzory te są nadzwyczaj ważne.

Jeśli pierwsze z równań (7) napiszemy pod postacią proporcyi

$$\frac{dt}{x - x'} = \frac{dx}{y}$$

i zauważymy, że $y = \sqrt{X}$, $x - x' = \sqrt{T}$, otrzymamy równanie:

(8) $$\frac{dt}{\sqrt{T}} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

które wraz ze wzorami (5) i (6) daje nam możność przekształcenia całki eliptycznej

$$\int f(t, \sqrt{T})\, \frac{dt}{\sqrt{T}}$$

ze zmienną t na nową całkę ze zmienną x. Okazuje się przytem, że nowa całka będzie miała postać

$$\int F(x, \sqrt{X})\, \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

gdzie znak F, podobnie jak i f, wyraża funkcyę wymierną.

Podane tu przekształcenie całki eliptycznej zasługuje na uwagę z tego względu, że wcale nie wymaga znajomości pierwiastków równania $T = 0$ *)

*) Halphen, Traité des fonctions elliptiques, str. 120.

i daje się dogodnie przedstawić geometrycznie. Największą jednak usługę przedstawia nam przekształcenie (5), (8) w przypadku, gdy $\Delta > 0$, a biegun równania $T=0$ leży na owalu krzywej C_3, bo wtedy przekształcenie liniowe, podane w § 15, nie daje się stosować bez użycia ilości urojonych.

§ 21. *Rozwiązanie ogólnego równania stopnia czwartego.*

Założmy z początku, że równanie stopnia czwartego jest bez drugiego wyrazu:

$$t^4 + 6 p_2 t + 4 p_3 t + p_4 = 0, \tag{1}$$

i oznaczmy jego pierwiastki przez t_0, t_1, t_2, t_3.

Pierwiastki odpowiedniej rozwiązującej Lagrange'a

$$4 x^3 - g_2 x - g_3 = 0 \tag{2}$$

oznaczmy, jak zwykle, przez e_1, e_2, e_3, i tymczasowo nie będziemy robili między niemi żadnej różnicy tak, że, naprzykład, e_1 może nam przedstawiać jakikolwiek z pierwiastków e_i. Nadto, ponieważ umiemy wyrazić e_i przez g_2, g_3, uważać będziemy ilości e_1, e_2, e_3, jako znane.

Rozważmy teraz funkcyę $(t_0 + t_1)^2$ dwóch pierwiastków równania (1) i przedstawimy ją w sposób następujący:

$$(t_0 + t_1)^2 = -(t_0 + t_1)(t_2 + t_3) = -\Sigma t_0 t_1 + t_0 t_1 + t_2 t_3,$$

albo tak:

$$(t_0 + t_1)^2 = -6 p_2 + t_0 t_1 + t_2 t_3.$$

Suma $t_0 t_1 + t_2 t_3$ stanowi pierwotną rozwiązującą Lagrange'a, tę, którą zajmowaliśmy się w § 11; dowiedliśmy tam, że

$$3(t_0 t_1 + t_2 t_3) = \Sigma t_0 t_1 - (D_0 - D_1),$$

czyli

$$t_0 t_1 + t_2 t_3 = 2 p_2 - 4 e_1.$$

Wniósłszy tę wartość w poprzednie równanie, otrzymujemy:

$$(t_0 + t_1)^2 = -4(p_2 + e_1),$$

albo, lepiej, wprowadzając parametr x_0,

$$(t_0 + t_1)^2 = 4(x_0 - e_1).$$

Podstawiając w tym wzorze zamiast t_1 kolejno t_2, t_3, otrzymujemy bezpośrednio jeszcze nowe dwa wzory analogiczne:

$$(t_0 + t_2)^2 = 4(x_0 - e_2),$$

$$(t_0 + t_3)^2 = 4(x_0 - e_3).$$

Zgodziwszy się teraz przez każde z wyrażeń

$$\sqrt{x_0 - e_1}, \qquad \sqrt{x_0 - e_2}, \qquad \sqrt{x_0 - e_3}$$

rozumieć określoną wartość, i wyciągając pierwiastki kwadratowe z obu stron każdego z trzech powyższych równań, otrzymujemy:

$$\left\{\begin{aligned} t_0 + t_1 &= 2\varepsilon\sqrt{x_0 - e_1}, \\ t_0 + t_2 &= 2\varepsilon'\sqrt{x_0 - e_2}, \\ t_0 + t_3 &= 2\varepsilon''\sqrt{x_0 - e_3}; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

stąd zważywszy, że $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 0$, znajdujemy:

$$\left\{\begin{aligned} t_2 + t_3 &= -2\varepsilon\sqrt{x_0 - e_1}, \\ t_1 + t_3 &= -2\varepsilon'\sqrt{x_0 - e_2}, \\ t_1 + t_2 &= -2\varepsilon''\sqrt{x_0 - e_3}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

We wzorach tych każdy ze spółczynników ε, ε', ε'' oznacza ± 1 i dokładniej określony być nie może; jednakże pomiędzy trzema pierwiastkami

$$\varepsilon\sqrt{x_0 - e_1}, \qquad \varepsilon'\sqrt{x_0 - e_2}, \qquad \varepsilon''\sqrt{x_0 - e_3},$$

zachodzi związek bardzo prosty, pozwalający wyrazić sposobem wymiernym jakikolwiek jeden z pomiędzy pierwiastków przez dwa pozostałe.

W samej rzeczy, weźmy tożsamość

$$T(t) = (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3),$$

i uczyńmy w niej $t = -t_0$; otrzymujemy:

$$(t_0 + t_1)(t_0 + t_2)(t_0 + t_3) = \frac{T(-t_0)}{2 t_0};$$

lecz

$$T(-t_0) = t_0^4 + 6 p_2 t_0^2 - 4 p_3 t_0 + p_4 = -8 p_3 t_0,$$

a zatem:

$$(t_0+t_1)(t_0+t_2)(t_0+t_3) = -4p_3 = -4y_0.$$

Podstawiwszy po stronie lewej zamiast każdego czynnika odpowiednie wyrażenie z równania (3), znajdziemy:

$$\varepsilon\sqrt{x_0-e_1}\,.\,\varepsilon'\sqrt{x_0-e_2}\,.\,\varepsilon''\sqrt{x_0-e_3} = -\frac{1}{2}\,y_0.$$

Związek ten właśnie pokazuje, jak mając wartości dwóch pierwiastków, znaleść wartość trzeciego przy pomocy działań wymiernych; odtąd więc tylko dwa pierwiastki pozostają nieokreślonemi co do znaku.

Dodajmy teraz do siebie odpowiedniemi stronami trzy równania, zawarte w (3), i zważmy, że $t_0+t_1+t_2+t_3$ jest zerem, otrzymujemy

$$t_0 = \varepsilon\sqrt{x_0-e_1}+\varepsilon'\sqrt{x_0-e_2}+\varepsilon''\sqrt{x_0-e_3}.$$

Podobnym sposobem, z równań, zawartych w układach (3) i (4), możemy otrzymać wzory na pozostałe pierwiastki, mianowicie:

$$t_1 = \varepsilon\sqrt{x_0-e_1}-\varepsilon'\sqrt{x_0-e_2}-\varepsilon''\sqrt{x_0-e_3},$$

$$t_2 = -\varepsilon\sqrt{x_0-e_1}+\varepsilon'\sqrt{x_0-e_2}-\varepsilon''\sqrt{x_0-e_3},$$

$$t_3 = -\varepsilon\sqrt{x_0-e_1}-\varepsilon'\sqrt{x_0-e_2}+\varepsilon''\sqrt{x_0-e_3}.$$

Rzut oka na cztery otrzymane tu wzory doprowadza nas do wniosku, że wszystkie pierwiastki równania (1) zawarte są w jednym wzorze ogólnym

(5) $$t = \sqrt{x_0-e_1}+\sqrt{x_0-e_2}+\sqrt{x_0-e_3},$$

w którym dwa pierwiastki mogą przyjmować znaki dowolne, a wartość trzeciego pierwiastka określa się z warunku

(6) $$\sqrt{x_0-e_1}\;\sqrt{x_0-e_2}\;\sqrt{x_0-e_3} = -\frac{1}{2}\,y_0.$$

Jeśli teraz przejdziemy do przypadku ogólnego, w którym spółczynnik p_1 nie jest równy zeru, to oczywiście w takim razie mieć będziemy zamiast (5) i (6) wzór następujący:

(7) $$\begin{cases} t = -p_1+\sqrt{x_0-e_1}+\sqrt{x_0-e_2}+\sqrt{x_0-e_3} \\ \sqrt{x_0-e_1}\;\sqrt{x_0-e_2}\;\sqrt{x_0-e_3} = -\dfrac{1}{2}\,y_0. \end{cases}$$

§ 22. *Rozstrząsanie przypadków szczególnych.*

Dajmy jakiekolwiek równanie rzeczywiste 4-go stopnia

$$t^4+4p_1t^3+6p_2t^2+4p_3t+p_4 = 0,$$

i nazwawszy jego wyróżnik przez Δ, rozpatrzmy oddzielnie trzy przypadki:

$$\Delta<0 \text{ i } x_0>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}\,;\ \Delta>0 \text{ i } x_0<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}\,;\ \Delta<0.$$

1. $\Delta>0,\ 2x_0>\sqrt{\frac{g_2}{3}}$. Trzy pierwiastki e_1, e_2, e_3 są rzeczywiste; możemy założyć, że $e_1>e_2>e_3$. W takim razie, na mocy twierdzenia Rollego, mamy:

$$e_2<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}<e_1.$$

a zatem

$$x_0>e_1,$$

gdyż y_0 jest ilością rzeczywistą. W tym przypadku biegun znajduje się na nieskończonej gałęzi, a wzory na pierwiastki t przyjmują postać następującą:

$$t_0 = -\varepsilon\sqrt{x_0-e_1}-\sqrt{x_0-e_2}-\sqrt{x_0-e_3}-p_1,$$

$$t_1 = \varepsilon\sqrt{x_0-e_1}+\sqrt{x_0-e_2}-\sqrt{x_0-e_3}-p_1,$$

$$t_2 = \varepsilon\sqrt{x_0-e_1}-\sqrt{x_0-e_2}+\sqrt{x_0-e_3}-p_1,$$

$$t_3 = -\varepsilon\sqrt{x_0-e_1}+\sqrt{x_0-e_2}+\sqrt{x_0-e_3}-p_1,$$

przyczem każdy z pierwiastków $\sqrt{x_0-e_i}$ rozumieć należy w znaczeniu arytmetycznem, ε zaś oznacza ∓ 1, mianowicie:

jeśli $y_0>0$, to $\varepsilon=+1$,

jeśli $y_0<0$, to $\varepsilon=-1$.

I tak, widzimy, że w rozpatrywanym przypadku wszystkie cztery pierwiastki są rzeczywiste; mamy nadto:

$$t_3>t_2>t_1>t_0,$$

co widać bezpośrednio z wzorów powyższych. Znak każdego z pierwiastków $t_0, t_1, \ldots\ldots$ w każdym szczególnym przypadku określa się przy pomocy twierdzenia Descartes'a.

2. $\Delta > 0$, $2x_0 < \sqrt{\frac{g_2}{3}}$. Biegun (x_0, y_0) znajduje się na owalu. Wszystkie cztery pierwiastki t są urojone i wyznaczają się za pomocą wzorów następujących:

$$t_0 = -p_1 + \sqrt{x_0 - e_3} + \left(\sqrt{e_1 - x_0} + \varepsilon\sqrt{e_2 - x_0}\right) i,$$

$$t_1 = -p_1 + \sqrt{x_0 - e_3} - \left(\sqrt{e_1 - x_0} + \varepsilon\sqrt{e_2 - x_0}\right) i,$$

$$t_2 = -p_1 - \sqrt{x_0 - e_3} + \left(\sqrt{e_1 - x_0} - \varepsilon\sqrt{e_2 - x_0}\right) i,$$

$$t_3 = -p_1 - \sqrt{x_0 - e_3} - \left(\sqrt{e_1 - x_0} - \varepsilon\sqrt{e_2 - x_0}\right) i.$$

Przytem rozumie się, że znowu przypuszczamy, iż $e_1 > e_2 > e_2$.

Każdy z pierwiastków $\sqrt{x_0 - e_2}$, $\sqrt{e_1 - x_0}$, $\sqrt{e_2 - x_0}$ rozumieć należy w znaczeniu arytmetycznem, Ilości t_0 i t_1 stanowią jednę parę pierwiastków sprzężonych, a t_2 i t_3 drugą; ε oznacza $+1$ albo -1 stosownie do tego, czy $y_0 > 0$ lub $y_0 < 0$.

3. $\Delta < 0$. Ilości e_1, e_2 są urojone i wzajemnie sprzężone. Uczyniwszy przeto:

$$e_1 = \alpha - \beta i, \qquad e_2 = \alpha + \beta i,$$

przyczem zakładamy $\beta > 0$, mamy:

$$e_3 = -2\alpha, \qquad x_0 > e_2,$$

$$t = -p_1 + \sqrt{x_0 - e_3} + \sqrt{x_0 - \alpha + \beta i} + \sqrt{x_0 - \alpha - \beta i},$$

$$\sqrt{x_0 - e_3}\,\sqrt{x_0 - \alpha + \beta i}\,\sqrt{x_0 - \alpha - \beta i} = -\tfrac{1}{2} y_0.$$

Uczyńmy następnie:

$$\sqrt{x_2 - \alpha + \beta i} = a + bi; \ \sqrt{x_0 - \alpha - \beta i} = a - bi$$

stąd, ponieważ $\beta > 0$, wynika $ab > 0$; a więc ilości a i b są jednakowego znaku; co się zaś tyczy znaku ilości a, wybór tego jest dowolny.

Powyższy wzór na t przedstawia się teraz tak:

$$t = \varepsilon\sqrt{x_0 - e_3} + \varepsilon'(a + bi) + \varepsilon''(a - bi) - p_1,$$

gdzie znak $\sqrt{x_0 - e_3}$ wyraża pierwiastek arytmetyczny, a każda ilość ε, ε', ε'' oznacza ± 1; przytem mamy jeszcze warunek

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' y_0 < 0.$$

Z liczby czterech możliwych kombinacyj na ε' i ε'' są dwie, mianowicie

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = +1 \quad \text{i} \quad \varepsilon' = \varepsilon'' = -1,$$

które dają dwa pierwiastki rzeczywiste:

$$t_0 = \varepsilon\sqrt{x_0 - e_2} + 2a - p_1,$$

$$t_1 = \varepsilon\sqrt{x_0 - e_2} - 2a - p_1,$$

przyczem znak ilości ε jest przeciwny znakowi ilości y_0; drugie dwie kombinacye:

$$\varepsilon' = 1, \quad \varepsilon'' = -1 \quad \text{i} \quad \varepsilon' = -1, \quad \varepsilon'' = +1.$$

dają parę pierwiastków sprzężonych urojonych:

$$t_2 = \varepsilon\sqrt{x_0 - e_2} - p_1 + 2bi,$$

$$t_3 = \varepsilon\sqrt{x_0 - e_0} - p_1 - 2bi,$$

przyczem znak ilości ε jest ten sam co i ilości y_0.