$$X_0 = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad X_1 = \frac{1}{2}.$$

A więc, jeżeli całka dana jest algebraiczną, to przyjąć można, że

$$\int \frac{z}{x}\,dx = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 - c_2}{2} + \frac{1}{2}z.$$

Stałych c_1, c_2 nie możemy tu wyznaczyć z warunku, by pochodna tego równania była tożsamością, skąd wnioskujemy, że całka dana nie przedstawia się algebraicznie.

Żegiestów, w lipcu 1888 r.

BADANIA NAD WYTRZYMAŁOŚCIĄ SZKŁA.

PRZEZ

J. KOWALSKIEGO. [1]

Jednym z działów mechaniki cząsteczkowéj, mającym wielkie zastosowanie w technice, jest nauka o wytrzymałości materyałów. Pomimo, iż nauka ta nadzwyczaj jest rozwiniętą w kierunku zastosowań do potrzeb technicznych, podstawy jéj są dotychczas hypotetycznemi: opierają się one na jednéj z dwóch następujących zasad:

1⁰. Zasada, przyjęta przez Saint-Venant'a i F. Neumann'a, a już do nauki wprowadzona przez Mariotte'a [2]), podług któréj następuje rozerwanie cząstek ciała, gdy wydłużenie linijne (lineare Dilatation) w pewnym punkcie odkształcanego ciała przejdzie pewną stałą granicę.

2⁰. Zasada, którą głównie Clebsch rozwinął i podług któréj następuje rozerwanie, gdy nie wydłużenie linijne, ale ciśnienie wewnętrzne (innere Spannung) w pewnym punkcie ciała przejdzie pewną stałą granicę. O ile mi jest wiadomém, nie było do tego czasu badań, z których można by wnioskować o prawdziwości jednéj z tych zasad; z tego powodu podjąłem niniejszą pracę.

Jako materyału do moich badań użyłem szkła z powodu, iż ciało to odznacza się tak małą podatnością, że można z wielkiém przybliżeniem założyć,

[1]) Opracowane na podstawie rozprawy inauguracyjnéj „Untersuchungen über die Festigkeit des Glases", Göttingen, 1888.

[2]) Mariotte: Traité du mouvement des eaux.

iż do chwili rozerwania ciała wszelkie odkształcenia nie wyprowadzają cząstek ciała po za granicę sprężystości. Szkło, którego użyłem, było umyślnie do tych badań, w formie cienkich sztabek o przekroju eliptycznym, przygotowane w fabryce Greiner'a, w Stuzerbach w Turyngii, a było ono tak wolno studzone, że mogłem przypuszczać, iż jest struktury prawie izotropowéj, o czém się potém przy oznaczaniu współczynników sprężystości przekonałem.

Oznaczenie tych współczynników było rzeczą, któréj mi najpierw dokonać wypadało. Współczynnik zginania E (Biegungscoëfficient) oznaczyłem na 15 różnéj grubości sztabkach za pomocą metody Baumgarten'a[1]) i otrzymałem w przecięciu:

$$E = 6702000 \text{ gr.},$$

przyczém omyłka prawdopodobna nie wynosiła więcéj, niż 1%.

Współczynnik skręcenia μ (Torsionscoëfficient) oznaczyłem za pomocą nowego przyrządu, który w rozprawie jest szczegółowo opisany i który mi pozwolił przy bardzo prostéj konstrukcyi z wielką dokładnością tenże współczynnik oznaczyć. Z 12 sztabek o różnéj grubości otrzymałem wartość przeciętną:

$$\mu = 2730000,$$

przyczém omyłka prawdopodobna także nie przenosiła 1%.

Z wartości dla E i μ otrzymujemy wartość stosunku Poisson'a

$$\alpha = 0{,}242.$$

Jeżeli więc stosunek wartości α do teoretycznéj wartości stosunku Poisson'a dla ciał izotropowych $A = \frac{1}{4}$ będzie mi dozwoloném nazwać *stopniem izotropii* danego ciała, to otrzymamy jako stopień izotropii badanych sztabek szkła 0,97. Zauważę tu jeszcze, że tak przy oznaczaniu współczynników sprężystości, jako téż przy dalszych doświadczeniach niezmiernie ważném było dokładne oznaczanie wymiarów danego ciała, a szczególniéj oznaczanie grubości. Do mierzenia używałem więc grubomierza z libellą, który dozwalał mierzyć z dokładnością 0,0004 mm.

Przejdźmy teraz do właściwych badań nad wytrzymałością szkła. Doświadczenia były robione w ten sposób, że sztabki szkła rozrywano przez wyciąganie, zginanie, skręcanie i kombinacyą wyciągania ze skręcaniem.

Obciążanie uskuteczniałem przez dosypywanie drobnego śrótu do szalki obciążającéj, przyczém zwracałem szczególną uwagę, aby nie było uderzeń. Wypadki, w których sztabka się łamała z powodu uderzenia, nie były wciągane do obliczeń. Z obciążenia nietrudno jest znaleźć wartość największego wydłużenia linijnego i największego ciśnienia wewnętrznego w punkcie niebezpieczeństwa (point dangereux) w funkcyi obciążenia i wymiarów sztabki.

---

[1]) Poggendorff's Annalen, t. 152.

Otrzymujemy to w następujący sposób:

Jeżeli użyjemy znakowania Kirchhoffa[1]), to wydłużenie linijne λ wyrazi się przy pewném odkształceniu przez wzór:

$$\lambda = \cos^2\alpha . x_x + \cos^2\beta . y_y + \cos^2\gamma . z_z + \cos\gamma . \cos\beta . y_z + \cos\gamma . \cos\alpha . z_x + \cos\beta . \cos\alpha . x_y .$$

Wprowadzając współrzędne kuliste, możemy równanie to napisać:

$$\lambda = \sin^2\vartheta . \cos^2\varphi . x_x + \sin^2\vartheta . \sin^2\varphi . y_y + \cos^2\vartheta . z_z + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta . \cos\varphi . y_z + \\ + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta . \sin\varphi . z_x + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta . \sin 2\varphi . x_y .$$

Kierunek największego wydłużenia linijnego otrzymamy, dając kątom φ i ϑ wartości, wyliczone z równań

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\vartheta} = 0 .$$

Wstawiwszy tak znalezione wartości dla φ i ϑ do równania dla λ, nie trudno znaleźć największą wartość λ w punkcie niebezpieczeństwa.

Podobnym sposobem można obliczyć największe ciśnienie, co jest łatwém, jeżeli przypomnimy sobie, że w ciałach izotropowych osie elipsoidy odkształceń mają ten sam kierunek, jak osie elipsoidy ciśnień.

Zestawmy teraz rezultaty badań:

1.) Rozrywanie przez wyciąganie. Sztabka była wyciąganą równolegle do swéj osi. Największe ciśnienie i największe wydłużenie linijne zachodzi w kierunku samego wyciągania, a więc równolegle do osi sztabki. Jeżeli powierzchnią przekroju sztabki oznaczymy przez q; obciążenie, przy którém sztabka zostaje rozerwaną, przez P, to ciśnienie największe wyrazi się przez wzór:

$$p = \frac{P}{q}$$

a maximum wydłużenia linijnego przez wzór

$$\delta = \frac{p}{E}.$$

Z 31 doświadczeń otrzymałem w przecięciu:

$p = 8770$ gr. (omyłka prawdopodobna 11 gr.)
$\delta = 0{,}00131$ (omyłka prawdopodobna 0,000015)

---

[1]) Kirchhoff, Mechanik, p. 122.

2.) Rozrywanie przez zginanie. Sztabka była opartą przy obu końcach na 2-ch ostrych podstawach; w środku była obciążoną. Punkt niebezpieczeństwa znajduje się wtedy w najniższym punkcie sztabki. Największe wydłużenie linijne przypada w kierunku osi sztabki i wyraża się przez wzór

$$\delta = \frac{3h \,.\, s}{\left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

gdzie h oznacza odległość punktu niebezpieczeństwa od osi sztabki, s zniżenie się tego punktu od obciążenia, przy którém sztabka się łamie, l długość sztabki między dwiema podporami.

Maximum ciśnienia jest

$$p = \frac{Eh}{\rho},$$

gdzie ρ jest promieniem krzywizny krzywéj, w którą oś sztabki przechodzi w skutek obciążenia.

Z 32-ch doświadczeń otrzymałem wartość dla maximum ciśnienia

$$p = 8840 \text{ gr.} \text{(omyłka prawdopodobna 9 gr.)};$$

dla maximum wydłużenia linijnego

$$\delta = 0{,}00132 \text{ (omyłka prawdopodobna } 0{,}000012).$$

3.) Rozrywanie przez skręcanie. Zadanie skręcania zostało bardzo wyczerpująco opracowane teoretycznie przez Saint-Venant'a [1]). Punkt niebezpieczeństwa znajduje się w punkcie najbliższym osi sztabki, a więc przy końcu małéj osi elipsy przekroju; maximum wydłużenia linijnego zachodzi pod kątem 45° do osi sztabki i ma wartość

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{y_z{}^2 + z_x{}^2};$$

maximum ciśnienia przypada w tymże punkcie i ma wartość

$$p = \frac{N}{\pi . ab^2},$$

gdzie N oznacza moment obrotu, a i b wielką i małą oś elipsy przekroju.

Z 29-u doświadczeń otrzymałem rezultaty następujące:

$$\delta = 0{,}00184 \text{ (omyłka prawdopodobna } 0{,}000019)$$
$$p = 11920 \text{ (omyłka prawdopodobna 13 gr.)}.$$

[1]) Saint-Venant, de la torsion des prismes. (Mémoires des savants étrangers, 1855.)

4.) Kombinacye skręcania i wyciągania.

Jak już nadmieniłem, oprócz tych doświadczeń robiłem jeszcze inne, kombinując skręcanie z wyciąganiem. Kombinacyj takich wykonałem 9. Obliczenie doświadczeń przedstawia pewne trudności, ponieważ dla każdéj kombinacyi kąt ϑ jest inny. Nie będę tutaj wszystkich otrzymanych liczb przytaczał, zauważę tylko, że przy zwiększaniu się kąta ϑ zwiększało się również maximum wydłużenia linijnego, jako też i maximum ciśnienia, a to w granicach, zawartych między 0,00132 do 0,00184, względnie między 8700 gr. do 11900 gr.

Jako rezultat tych badań podać można, że tak zasada Saint-Venant'a jako też zasada Clebsch'a nie są bezwzględnie prawdziwemi.

Daléj widzimy, że przy skręcaniu, przy którém gęstość ciała pozostaje stałą, maximum wydłużenia linijnego jest największém; przy odkształceniach zaś, przy których gęstość ciała w okolicy punktu niebezpieczeństwa się zmniejsza, zmniejsza się także maximum wydłużenia linijnego. Kierując się temi względami doprowadzony zostałem do następującéj hypotezy:

Rozerwanie następuje, gdy absolutna odległość cząstek ciała przejdzie po za pewną oznaczoną granicę; odległość ta jest wprost proporcyonalną do gęstości ciała w okolicy punktu, w którym następuje rozerwanie.

Przyjąwszy tę hypotezę, można wyprowadzić następujący wniosek:

Niech δ_0 będzie maximum wydłużenia linijnego przy odkształceniu, któremu nie towarzyszy rozszerzenie objętościowe; δ_Δ maximum wydłużenia linijnego przy odkształceniu, któremu towarzyszy rozszerzenie objętościowe Δ; r_0 maximum absolutnéj odległości cząstek przy pierwszym rodzaju odkształcenia, r_Δ maximum odległości cząstek przy drugim rodzaju. Możemy wtedy napisać, jeżeli r bez znaku oznacza pierwotną odległość cząstek,

$$r_0 = r\,(1 + \delta_0) \qquad r_\Delta = r\,(1 + \delta_\Delta).$$

A więc na zasadzie hypotezy naszéj:

$$(1 + \delta_0) : (1 + \delta_\Delta) = (1 + \Delta) : 1$$

czyli $\delta_0 = \delta_\Delta + \Delta$, jeżeli opuścimy wielkości bardzo małe drugiego stopnia. Inaczéj mówiąc: suma, utworzona z maximum wydłużenia linijnego i z towarzyszącego temu wydłużeniu rozszerzenia objętościowego, w okolicy punktu niebezpieczeństwa, musi być liczbą stałą, niezależnie od sposobu, jakim ciało zostało rozerwane. Liczbę tę obliczyłem ze wszystkich moich doświadczeń i otrzymałem w przecięciu

$$\delta_0 = 0{,}00191 \text{ (omyłka prawdopodobna wynosi } 0{,}00002).$$

Doświadczenia moje przemawiają zatém za postawioną hypotezą. Nie można wszelako wnioskować stanowczo o jéj prawdziwości na mocy badań, wykonanych nad jedném ciałem; z tego powodu zająłem się jéj sprawdzeniem, badając niektóre metale i ich aliaże; o ile teraz już mogę sądzić, wyniki tych badań przemawiają za przytoczoną powyżéj hypotezą.

W końcu wspomnę jeszcze o jednéj osobliwości, którą zauważyłem w ciągu mojéj pracy. Jeżeli (niezależnie od rodzaju odkształcenia) obciążamy sztabkę szkła pewnym ciężarem, blizkim do tego, przy którym sztabka się rozrywa i zostawiamy ją tak obciążoną przez pewien dłuższy przeciąg czasu (24 godzin do 48), to sztabka przyzwyczaja się, że tak powiem, do ciężaru i wytrzymałość jéj zwiększa się; a więc mamy zjawisko podobne do tego, które zauważono na obciążonych magnesach.

O ZWIĄZKU MIĘDZY ZASADĄ NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA I NAJPRAWDOPODOBNIEJSZYM UKŁADEM.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Stosując rachunek prawdopodobieństwa w rozważaniu układów mechanicznych, otrzymałem wniosek, że zasada najmniejszego działania jest w bezpośrednim związku z układem najprawdopodobniejszym, że więc ją można zastąpić zasadą najprawdopodobniejszego układu. Przy takiém uważaniu, równania ruchu przedstawiają się jako warunki konieczne najprawdopodobniejszego układu, a w skutek tego przyczyna działań z odległości i wogóle przyczyna wszelkich zmian ruchu staje się rzeczywiście pojęciem tylko przechodniém.

Nadmieniam przy tém, że o ile mi wiadomo, rachunku prawdopodobieństwa do mechaniki wogóle dotąd nikt nie stosował. Maxwell, a za nim O.E. Meyer, Boltzmann i inni stosowali go tylko w teoryi cynetycznéj gazów, na zasadach całkiem odmiennych.

W pracy niniejszéj zamierzam wyłożyć pomienioną wyżéj nową zasadę i pewne jéj zastosowania.

Prawdopodobieństwo stanu układu.

1. Przekonanie, że między wszystkiemi częściami układu wszechświatowego zachodzą stosunki, zmieniające się z czasem według praw niezmiennych, prowadzi do przypuszczenia, że mimo nieoznaczoność ich liczby, stosunki te wyrażają się przecież jako funkcye czasu oznaczone, za pośrednictwem nieupra-