$$x_3+x_2+1+\alpha(x_4+x_1)+\alpha^2(x_5+x_2+1)+\ldots+\alpha^{2n-3}(x_{2n}+x_1)=c_2 e^{\alpha^{2n-3}x_1+\alpha^{2n-4}x_2}.$$

Taką samą zupełnie drogą można napisać wszystkie inne całki, odpowiadające następnym pierwiastkom $\beta, \gamma, \ldots, \tau$ równania (4).

Do typu, podobnego do układu (1), zaliczyć także można układ następujący:

$$\begin{aligned}
dx_5 &= (x_6+s)\,dx_1+(x_7+s)\,dx_2+(x_8+s)\,dx_3+(x_9+s)\,dx_4,\\
dx_6 &= (x_7+s)\,dx_1+(x_8+s)\,dx_2+(x_9+s)\,dx_3+(x_{10}+s)\,dx_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dx_i &= (x_{i+1}+s)\,dx_1+(x_{i+2}+s)\,dx_2+(x_{i+3}+s)\,dx_3+(x_{i+4}+s)\,dx_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dx_{n-1} &= (x_n+s)\,dx_1+(x_5+s)\,dx_2+(x_6+s)\,dx_3+(x_7+s)\,dx_4,\\
dx_n &= (x_5+s)\,dx_1+(x_6+s)\,dx_2+(x_7+s)\,dx_3+(x_8+s)\,dx_4,
\end{aligned}$$

gdzie $x_5, x_6, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ są pewnemi funkcyami zmiennych niezależnych x_1, x_2, x_3, x_4, ilość zaś s jest jakąkolwiek liczbą stałą, albo też może oznaczać wartość

$$s = x_1+x_2+x_3+x_4.$$

Całkowanie powyżéj napisanego układu uskutecznia się łatwo według metody, wyżéj wyłożonéj.

Godném uwagi jest to, że we wszystkich podobnych, jak powyższe, układach, w których współczynniki czynią zadość znanym warunkom i zmieniają się przez podstawienia tak zwane kołowe, funkcye, czyniące zadość układowi równań, są analogiczne z funkcyami kołowemi.

Płock, dnia 5 lipca 1888 r.

O CAŁKOWANIU ALGEBRAICZNÉM RÓŻNICZEK ALGEBRAICZNYCH.

PRZEZ

J. PTASZYCKIEGO.

1. Przedmiotem pracy niniejszéj jest zagadnienie następujące:

„Niechaj funkcya y będzie związaną ze zmienną x równaniem algebraicznéni: wyrazić całkę $\int y\,dx$ jako funkcyą algebraiczną zmiennéj x lub też dowieść, że w ten sposób całka ta nie da się przedstawić."

Zadanie to podjął pierwszy Abel, któremu zawdzięczamy następujące twierdzenie: „Jeżeli całka $\int y\,dx$ jest algebraiczną, to daje się przedstawić jako funkcya wymierna ilości x i y." Opierając się na tém twierdzeniu, Liouville [1]) rozwiązał w zupełności powyższe zagadnienie. Późniéj i inni matematycy zajmowali się rozwiązaniem tego zadania, jak: Briot i Bouquet [2]), Zeuthen [3]), Raffy [4]) i Humbert [5]).

Nie wchodząc w rozbiór szczegółowy znanych sposobów, prowadzących do rozwiązania zadania, zauważę tylko, że wszystkie one sprowadzić się dają do odszukania kilku wielomianów, a to za pomocą metody współczynników nieoznaczonych.

W pracy niniejszéj chcę podać twierdzenie, które pozwala rozwiązać zagadnienie to inną drogą. Przyczém twierdzenie to daje możność rozwiązania

[1]) Journal de l'École Polytechnique, XXII cahier. Journal des mathématiques t. III.
[2]) Théorie des fonctions elliptiques.
[3]) Comptes Rendus, 1880.
[4]) Annales de l'École Normale, 1883, 1885.
[5]) Acta mathematica, 1887.

zadania za pomocą metody współczynników nieoznaczonych nowym sposobem.

2. *Twierdzenie.* Niechaj P będzie funkcyą całkowitą zmiennéj x; z — funkcyą, czyniącą zadość równaniu nieprzywiedlnemu o współczynnikach całkowitych:

$$z^n + \varphi_1(x)\, z^{n-1} + \varphi_2(x)\, z^{n-2} + \ldots = 0.$$

Oznaczmy przez:

$$z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_n$$

n wartości funkcyi z, a przez $\sqrt{\Delta}$ wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Połóżmy wreszcie:

$$\Delta = D^2 E,$$

gdzie D jest wielomianem całkowitym, E zaś wielomianem całkowitym, nie mającym pierwiastków wielokrotnych.

Jeżeli całka

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

jest algebraiczną, natenczas

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

gdzie Y, X_0, X_1, ... X_{n-1} są wielomianami, dającemi się określić w sposób następujący:

1⁰ Wielomian Y jest iloczynem wielomianu D przez największy wspólny dzielnik wielomianu P i jego pochodnéj $\frac{dP}{dx}$.

2⁰ Wielomiany X_0, X_1, ... X_{n-1} czynią zadość równaniom:

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2 \ldots z_1^{i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\, dx, & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2 \ldots z_2^{i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\, dx, & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2 \ldots z_n^{i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\, dx, & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

3. *Dowód.* Przypuśćmy, że całka

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

jest algebraiczną. Natenczas całka ta przyjmuje postać (zob. № 1 twierdzenie Abel'a):

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z + \frac{X_2}{Y_2} z^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z^{n-1}, \tag{1}$$

gdzie X_0, Y_0; X_1, Y_1; ... oznaczają funkcye całkowite zmiennéj x. Można przyjąć, że ułamek $\frac{X_i}{Y_i}$ jest nieprzywiedlny.

Z wzoru (1) wynikają równości:

$$\int \frac{z_1}{P}\, dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_1 + \frac{X_2}{Y_2} z_1^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_1^{n-1},$$
$$\int \frac{z_2}{P}\, dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_2 + \frac{X_2}{Y_2} z_2^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_2^{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int \frac{z_n}{P}\, dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_n + \frac{X_2}{Y_2} z_n^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_n^{n-1}.$$

Równości te wskazują, że całka

$$\int \frac{z_k}{P}\, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots n) \tag{2}$$

w blizkości każdego punktu a przedstawioną być może za pomocą szeregu, uporządkowanego według potęg rosnących ilości $x - a$; na początku tego szeregu może być tylko skończona liczba wyrazów o wykładnikach ujemnych.

Rozwiązując powyższe równości względem $\frac{X_0}{Y_0}$, $\frac{X_1}{Y_1}$, ... otrzymujemy wzór:

$$\frac{X_i}{Y_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, z_1^2 \ldots z_1^{i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\, dx, & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, z_2^2 \ldots z_2^{i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\, dx, & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, z_n^2 \ldots z_n^{i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\, dx, & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Przedstawmy wzór ten pod inną postacią. W tym celu zauważmy, że wszystkie elementy wyznacznika we wzorze (3), z wyjątkiem elementów i^{go} wiersza pionowego, pozostają skończonemi dla wszelkiéj skończonéj wartości x. Co się zaś tyczy elementu i^{go} wiersza pionowego, to oczywiście, iż on może się stać nieskończonym tylko dla wartości x, która jest pierwiastkiem wielomianu P. Przypuśćmy, że

$$P=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_l)^{\alpha_l}.$$

Łatwo zrozumieć, że dla $x=a$ całka (2) będzie skończoną lub nieskończenie wielką porządku nie wyższego niż ułamek $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$. Stąd wypada, że omawiany wyznacznik sprowadza się do wyrażenia

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}},$$

gdzie $f(x)$ przedstawia funkcyą skończoną dla wszystkich skończonych wartości x. Przypomnijmy jeszcze, że $\sqrt{\Delta}$ we wzorze (3) równa się $D\sqrt{E}$, gdzie wielomian E nie ma pierwiastków wielokrotnych.

A zatém na mocy wzoru (3) otrzymujemy:

$$\frac{X_i}{Y_i}=\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}D\sqrt{E}}.$$

Z własności funkcyj $f(x)$, E, X_i, Y_i wynika, że wielomian Y_i jest dzielnikiem wielomianu

$$Y=D.(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}$$

A więc w równaniu (1) można napisać:

$$Y_i=Y \qquad (i=0,1,2,\dots n-1);$$

co dowodzi pierwszéj części naszego twierdzenia.

Podstawiając znalezioną wartość Y_i we wzorze (3), otrzymujemy wyrażenie wielomianu X_i, stwierdzające drugą część twierdzenia.

4. *Zastosowanie.* Dla rozwiązania postawionego w № 1 zagadnienia na zasadzie naszego twierdzenia, postępujemy w ten sposób:

Sprowadzamy funkcyą y do postaci

$$\frac{z}{P},$$

wielomian zaś Δ, t. j. kwadrat wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

do postaci

$$\Delta=D^2E.$$

Tworzymy iloczyn z wielomianu D przez największy wspólny dzielnik wielomianów P, $\frac{dP}{dx}$; ten iloczyn przedstawi nam wielomian Y.

Następnie wyrażenia:

$$\frac{Y}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2\dots z_1^{i-1}, & \int\frac{z_1}{P}dx, & z_1^{i+1}\dots z_1^{n-1}, \\ 1, & z_2, & z_2^2\dots z_2^{i-1}, & \int\frac{z_2}{P}dx, & z_2^{i+1}\dots z_2^{n-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2\dots z_n^{i-1}, & \int\frac{z_n}{P}dx, & z_n^{i+1}\dots z_n^{n-1}, \end{vmatrix} \quad (i=0,1,2,\dots n-1).$$

rozwijamy na szereg według malejących potęg ilości x; części całkowite tych rozwinięć przedstawią nam wielomiany X_0, X_1, ... X_{n-1}.

Współczynniki tych wielomianów będą w ogólności zawierały n stałych niewiadomych c_1, c_2, ... c_n; c_k przedstawia stałą dowolną całki $\int\frac{z_k}{P}dx$.

Jednę z tych stałych można wyznaczyć dowolnie; pozostałe zaś można określić za pomocą warunku, aby równość:

$$\frac{d}{dx}\left[\int\frac{z}{P}dx-\frac{X_0+X_1z+X_2z^2+\dots+X_{n-1}z^{n-1}}{Y}\right]=0.$$

była tożsamością.

Gdy stałe c_1, c_2, ... c_n będą określone, natenczas funkcya

$$\frac{X_0+X_1z+X_2z^2+\dots+X_{n-1}z^{n-1}}{Y}$$

przedstawi nam wartość danéj całki

$$\int ydx.$$

Jeżeli zaś stałe c_1, c_2, ... c_n nie mogą czynić zadość wyż wskazanemu warunkowi, wnioskujemy wtedy, że omawiana całka nie jest algebraiczną.

Uwaga. Może się zdarzyć, że niemożebność całkowania algebraicznego okaże się wcześniéj, zanim wszystkie działania doprowadzone będą do końca. Całka nie będzie algebraiczną: 1° jeżeli w rozwinięciu funkcyi $\frac{z_k}{P}$ znajdować się będzie wyraz, zawierający x^{-1} (№ 3); 2° jeżeli w rozwinięciu wyrażenia, które nam daje wielomian X_i, potęgi dodatnie ułamkowe ilości x nie znoszą się dla żadnéj z wartości c_1, c_2, ... c_n.

5. Z drugiéj części naszego twierdzenia wynika jeszcze sposób następujący oznaczenia wielomianów X_0, X_1, ... X_{n-1}.

Na zasadzie wyrażeń, stanowiących drugą część twierdzenia, obliczamy granice wyższe stopni tych wielomianów; poczém wyznaczamy ich współczynniki pod warunkiem, by równość, podana w n-rze poprzedzającym, była tożsamością.

Uwaga. Przy użyciu tego drugiego sposobu wystarczają działania arytmetyczne dla rozwiązania postawionego w № 1 zagadnienia.

6. *Przykłady.* I. Rozpatrzmy całkę

$$\int z\,dx,$$

gdzie z czyni zadość równaniu nieprzywiedlnemu

$$z^3 - 3z + 2x = 0.$$

Dla tego równania jest:

$$\Delta = -108x^2 + 108;$$

zatém

$$D = 1.$$

Otrzymujemy tedy:

$$Y = 1.$$

Przystępujemy do oznaczenia wielomianów X_0, X_1, X_2. W tym celu szukamy całkowitych części rozwinięć trzech wyrażeń:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \int z_1 dx, & z_1, & z_1^2 \\ \int z_2 dx, & z_2, & z_2^2 \\ \int z_3 dx, & z_3, & z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & \int z_1 dx, & z_1^2 \\ 1, & \int z_2 dx, & z_2^2 \\ 1, & \int z_3 dx, & z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & \int z_1 dx \\ 1, & z_2, & \int z_2 dx \\ 1, & z_3, & \int z_3 dx \end{vmatrix}$$

według potęg malejących ilości x.

Z równania, któremu czyni zadość ilość z, wynika:

$$z_1 = \alpha_1 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_1} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_1 x^{-\frac{5}{3}} + \dots,$$

$$z_2 = \alpha_2 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_2} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_2 x^{-\frac{5}{3}} + \dots,$$

$$z_3 = \alpha_3 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_3} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_3 x^{-\frac{5}{3}} + \dots;$$

gdzie $\alpha_1 = \sqrt[3]{-2}$, $\alpha_2 = \sqrt[3]{-2}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\alpha_3 = \sqrt[3]{-2}\,.\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;

wartość współczynników $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ nie jest nam potrzebną. Stąd mamy bezpośrednio:

$$z_1^2 = \alpha_1^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_1^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_1\beta_1 x^{-\frac{4}{3}} + \dots,$$

$$z_2^2 = \alpha_2^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_2^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_2\beta_2 x^{-\frac{4}{3}} + \dots,$$

$$z_3^2 = \alpha_3^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_3^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_3\beta_3 x^{-\frac{4}{3}} + \dots,$$

oraz:

$$\int z_1\, dx = \frac{3\alpha_1}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_1} x^{\frac{2}{3}} + c_1 - \frac{3\beta_1}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$\int z_2\, dx = \frac{3\alpha_2}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_2} x^{\frac{2}{3}} + c_2 - \frac{3\beta_2}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$\int z_3\, dx = \frac{3\alpha_3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_3} x^{\frac{2}{3}} + c_3 - \frac{3\beta_3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots.$$

Mamy jeszcze:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = 1 : \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2 \\ 1, & z_2, & z_2^2 \\ 1, & z_3, & z_3^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{-3}}\left(x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-3} + \dots\right).$$

Na mocy tych rozwinięć otrzymujemy:

$$X_0 = \text{stałéj},\quad X_1 = \frac{3}{4}x,\quad X_2 = -\frac{3}{8}.$$

A więc, jeżeli całka dana jest algebraiczną, przyjąć można:

$$\int z\,dx = \frac{3}{4}xz - \frac{3}{8}z^2.$$

Wziąwszy pochodną tego równania, przekonywamy się, że druga jego strona przedstawia nam rzeczywiście wartość całki danéj.

II. Niechaj będzie całka

$$\int z\,dx,$$

gdzie z czyni zadość równaniu nieprzywiedlnemu:

$$z^3 - 3xz + x^3 = 0.$$

Dla tego równania jest:

$$\Delta = -27x^6 + 108x^3,$$

a zatém:

$$D = x.$$

Otrzymujemy tedy:

$$Y = x.$$

Przystępujemy teraz do oznaczenia wielomianów X_0, X_1, X_2 na podstawie prawidła, wskazanego w № 5. W tym celu szukamy wyższych granic stopni tych wielomianów, t. j. wyrażeń

$$\frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \int z_1 dx, & z_1, & z_1^2 \\ \int z_2 dx, & z_2, & z_2^2 \\ \int z_3 dx, & z_3, & z_3^2 \end{vmatrix}, \frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & \int z_1 dx, & z_1^2 \\ 1, & \int z_2 dx, & z_2^2 \\ 1, & \int z_3 dx, & z_3^2 \end{vmatrix}, \frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & \int z_1 dx \\ 1, & z_2, & \int z_2 dx \\ 1, & z_3, & \int z_3 dx \end{vmatrix}.$$

Z równania, określającego funkcyą z, wynika, że ilości z_1, z_2, z_3 są stopnia pierwszego; stąd wnioskujemy, że ilości z_1^2, z_2^2, z_3^2 i całki $\int z_1 dx, \int z_2 dx, \int z_3 dx$ są stopnia drugiego; zauważmy jeszcze, że $\frac{x}{\sqrt{\Delta}}$ jest stopnia $(-2)^{\text{go}}$. A zatém granicami wyższemi stopni omawianych wyrażeń będą odpowiednio liczby

$$3, \quad 2, \quad 1.$$

Przystępujemy do wyznaczenia współczynników wielomianów X_0, X_1, X_2. Równanie

$$\frac{d}{dx}\left[\int z dx - \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2}{x}\right] = 0,$$

po podstawieniu w niém w miejsce pochodnéj $\frac{dz}{dx}$ jéj wartości, wyrażonéj przez ilość x i z, po wyłączeniu ułamków i potęg ilości z, wyższych nad drugą, da nam związek między ilościami x i z stopnia drugiego względem z. Ze związku tego wypływają bezpośrednio równania następujące:

$$x\frac{dX_0}{dx} - X_0 + x^3\frac{dX_1}{dx} - x^4 = 0,$$

$$2x\frac{dX_1}{dx} - X_1 - x^3\frac{dX_2}{dx} - x^2 X_2 - 2x^2 = 0,$$

$$x\frac{dX_0}{dx} - X_0 + 2x^2\frac{dX_2}{dx} = 0,$$

którym powinny czynić zadość szukane wielomiany. Znając granice wyższe tych wielomianów, możemy metodą współczynników nieoznaczonych znaleźć same wielomiany. Nie od rzeczy będzie uwaga, że, ponieważ stopień wielomianu X_1 nie jest wyższy od 2, to, jak to bezpośrednio wypływa z otrzymanych równań, wielomian X_2 będzie stopnia nie wyższego od 0, wielomian X_0 stopnia nie wyższego od 1.

W ten sposób odszukanie wielomianów X_0, X_1, X_2 nie przedstawia żadnéj trudności; otrzymujemy tedy:

$$X_0 = bx, \; X_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad X_2 = -\frac{1}{2},$$

gdzie b jest stałą dowolną.

A więc wartość całki danéj może być wyrażoną wzorem:

$$\int z dx = \frac{\frac{1}{2}x^2 z - \frac{1}{2}z^2}{x}.$$

III. Rozpatrzmy całkę:

$$\int \frac{z}{x} dx,$$

gdzie z czyni zadość równaniu nieprzywiedlnemu:

$$z^2 - 2x^3 z + x^6 - x^4 - 1 = 0.$$

Dla tego równania jest

$$\Delta = 4x^4 + 4,$$

zatém:

$$D = 1.$$

Ponieważ

$$P = x,$$

więc:

$$Y = 1.$$

Przystępujemy do odszukania wielomianów X_0, X_1. Szukamy całkowitych części rozwinięć wyrażeń:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \int \frac{z_1}{x} dx, & z_1 \\ \int \frac{z_2}{x} dx, & z_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & \int \frac{z_1}{x} dx \\ 1, & \int \frac{z_2}{x} dx \end{vmatrix}.$$

Z równania, określającego funkcyą z, otrzymujemy

$$z_1 = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-6} + \ldots;$$

$$z_2 = x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{8}x^{-6} \ldots;$$

stąd:

$$\int \frac{z_1}{x} dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 - \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1}{48}x^{-6} + \ldots,$$

$$\int \frac{z_2}{x} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_2 + \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1}{48}x^{-6} + \ldots.$$

Zauważmy jeszcze, że:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = 1 : \begin{vmatrix} 1, z_1 \\ 1, z_2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}\left(x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-6} + \ldots\right).$$

Na mocy tych rozwinięć będzie:

$$X_0 = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1-c_2}{2}x + \frac{c_1+c_2}{2}, \quad X_1 = \frac{1}{2}.$$

A więc, jeżeli całka dana jest algebraiczną, to przyjąć można, że

$$\int \frac{z}{x}dx = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1-c_2}{2}x + \frac{c_1-c_2}{2} + \frac{1}{2}z.$$

Stałych c_1, c_2 nie możemy tu wyznaczyć z warunku, by pochodna tego równania była tożsamością, skąd wnioskujemy, że całka dana nie przedstawia się algebraicznie.

Żegiestów, w lipcu 1888 r.

BADANIA NAD WYTRZYMAŁOŚCIĄ SZKŁA.

PRZEZ

J. KOWALSKIEGO. [1])

Jednym z działów mechaniki cząsteczkowéj, mającym wielkie zastosowanie w technice, jest nauka o wytrzymałości materyałów. Pomimo, iż nauka ta nadzwyczaj jest rozwiniętą w kierunku zastosowań do potrzeb technicznych, podstawy jéj są dotychczas hypotetycznemi: opierają się one na jednéj z dwóch następujących zasad:

1°. Zasada, przyjęta przez Saint-Venant'a i F. Neumann'a, a już do nauki wprowadzona przez Mariotte'a [2]), podług któréj następuje rozerwanie cząstek ciała, gdy wydłużenie linijne (lineare Dilatation) w pewnym punkcie odkształcanego ciała przejdzie pewną stałą granicę.

2°. Zasada, którą głównie Clebsch rozwinął i podług któréj następuje rozerwanie, gdy nie wydłużenie linijne, ale ciśnienie wewnętrzne (innere Spannung) w pewnym punkcie ciała przejdzie pewną stałą granicę. O ile mi jest wiadomém, nie było do tego czasu badań, z których można by wnioskować o prawdziwości jednéj z tych zasad; z tego powodu podjąłem niniejszą pracę.

Jako materyału do moich badań użyłem szkła z powodu, iż ciało to odznacza się tak małą podatnością, że można z wielkiém przybliżeniem założyć,

---

[1]) Opracowane na podstawie rozprawy inauguracyjnéj „Untersuchungen über die Festigkeit des Glases", Göttingen, 1888.

[2]) Mariotte: Traité du mouvement des eaux.