O ZADANIU TAIT'A.

PRZEZ

WŁ. NATANSONA.

W pierwszéj swéj pracy o cynetycznéj teoryi gazów „On the foundations of the kinetic theory of gases" [1]), w §§ 19, 23 i 24, profesor Tait rozwiązuje zagadnienie następujące. [Wprowadzam odrazu znakowanie, którego będę poniżéj używał.] W chwili $t=o$ zmięszano ze sobą zupełnie dwa systematy kul sprężystych A i B (dwa gazy A i B, jak będziemy mówili dla skrócenia). Cząsteczek A było N_1, cząsteczek B było N_2. Masy cząsteczek wynosiły m_1 i m_2, promień spotkania cząsteczki A z cząsteczką B wynosił R. Przeciętna energia cynetyczna cząsteczek A była równą E_1, przeciętna energia cynetyczna cząsteczek B była równą E_2. Prędkości cząsteczek w obu gazach były rozdzielone według prawa Maxwell'a już w chwili $t=0$, a moduły prędkości (prędkości najprawdopodobniejsze) wynosiły: dla cząsteczek A — α, dla cząsteczek B—β. Według twierdzenia Maxwell'a przeciętne energie cynetyczne obu gazów dążą do wyrównania się, t. j. różnica $E_1 - E_2$ dąży do zera. Zachodzi pytanie, z jaką prędkością, wogóle według jakich praw, odbywa się to zjawisko?

Tait rozwiązuje zadanie to w sposób następujący. Niechaj będą u i v składowe prędkości dwóch cząsteczek, rozpoczynających właśnie spotkanie, składowe, wzięte w kierunku linii środków podczas spotkania. Kończąc spotkanie, cząsteczki mają, powiedzmy, składowe u' i v'. Wówczas, jak wiadomo

[1]) Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XXXIII. p. 65.

$$m_1(u'^2-u^2)=-m_2(v'^2-v^2)=-\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(m_1u^2-m_2v^2-(m_1-m_2)uv\right) \quad (1)$$

Skądinąd w ciągu jednostki czasu odbywa się

$$N_1 N_2 R^2 \sqrt{\pi(\alpha^2+\beta^2)} \quad (2)$$

spotkań A B. Posiłkując się wreszcie prawem Maxwell'a, udowodnić można, iż przeciętne wartości wyrazów

$$u^2-uv,\ v^2-uv \quad (3)$$

równają się odnośnie α^2 i β^2. Łączmy ze sobą wszystkie te twierdzenia, pamiętając nadto, że

$$E_1=\tfrac{3}{4}m_1\alpha^2\ ;\quad E_2=\tfrac{3}{4}m_2\beta^2\,. \quad (4)$$

Przekonamy się, że ilość energii, którą cząsteczki B oddają w ciągu jednostki czasu cząsteczkom A na skutek spotkań, z niemi odbywanych, wynosi

$$-\frac{16}{3}\,\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}N_1N_2R^2\sqrt{\pi(\alpha^2+\beta^2)}\,(E_1-E_2), \quad (5)$$

równaniem przeto różniczkowém zjawiska wyrównywania się jest następujące:

$$\frac{dE_1}{dt}=-\frac{dE_2}{dt}=-\frac{16}{3}\,\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}N_1N_2R^2\sqrt{\pi(\alpha^2+\beta^2)}\,(E_1-E_2)\,. \quad (6)$$

Tait całkuje je w założeniu, że $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ jest stałą; otrzymuje więc

$$N_1N_2(E_1-E_2)=Ce^{-t/T}, \quad (7)$$

gdzie

$$T=\frac{3}{16}\,\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1m_2}\,\frac{1}{R^2(N_1+N_2)\sqrt{\pi(\alpha^2+\beta^2)}}, \quad (8)$$

zaś C jest pewną stałą, zależną od stanu początkowego. Ponieważ $e^{-4,6}=1/100$ blizko, przeto po upływie czasu t_1

$$t_1=4,6\ T$$

różnica E_1-E_2 zostaje sprowadzoną do jednéj setnéj części swéj początkowéj wartości. Dla obliczenia zaś czasu t_1 posiłkujemy się wzorem (8), wstawiając doń następujące dane liczbowe, otrzymane przez teoryą cynetyczną. [1]) W wypadku mięszaniny, złożonéj z 1-go centymetra sześciennego azotu np. i z 1-go centymetra tlenu, przy 0° C. i 760 mm. ciśnienia, mamy

[1]) Zob. np. O. E. Meyer'a Die kinetische Theorie der Gase, 1877. str. 45 230, 232.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{7}{8}$$
$$N_1 = N_2 = 2.10^{19}$$
$$R = 2,6.10^{-8}\,\text{cm.}$$
$$\alpha = 4,03.10^4\,(\text{cm. sek.}^{-1})$$
$$\beta = 3,78.10^4\,(\text{cm. sek.}^{-1})$$

Stąd

$$T = \frac{3.3,98}{16.6,76.10^{-16}.\,4.10^{19}.\,\sqrt{3,14}\cdot\sqrt{30,53}.\,10^4.(\text{sek}^{-1})} = 0,29.10^{-9}\ \text{sek.}$$

Samo postawienie tego zagadnienia wydaje mi się ważnym krokiem w rozwoju teoryi cynetycznéj, w któréj na *przebieg czasowy* zjawisk dotychczas prawie wcale nie zwracano uwagi. Rozwiązanie wszelako, przez Tait'a podane jest oczywiście tylko surowém przybliżeniem: całkowanie równania (6) jest przybliżonėm, nadto niepodobna zgodzić się na mnożenie ogólnéj liczby spotkań (2) przez zmianę, zachodzącą w każdém spotkaniu (podaną pod (1)), gdyż spotkania rozmaitych kategoryj (co do u i v) rozmaicie często się zdarzają. Postępowanie takie, niekiedy przez Maxwell'a stosowane, sam Tait słusznie nazywa „całkowaniem wyrazów, niedojrzałych jeszcze dostatecznie". Ponieważ zaś w pracy p. t. „Studya nad prawem Clerk-Maxwell'a" roztrząsałem zjawiska podobnego charakteru (co do ich przebiegu czasowego), jak zmniejszanie się asymptotyczne różnicy $E_1 - E_2$, przeto zająłem się dokładném rozwiązaniem zadania Tait'a. [1])

Niechaj cząsteczka m_1, spotykająca się z cząsteczką m_2, ma przed spotkaniem prędkość bezwzględną v^0, po spotkaniu prędkość bezwzględną v'; niechaj prędkość względna wynosi w, kąt $w^0 w'$, o który się w spotkaniu w wykręca, niechaj wynosi 2ω, kąt pomiędzy v^0 a w^0 zawarty, niechaj wynosi γ, zaś δ niechaj będzie kątem, utworzonym przez płaszczyzny następujące: jedną prowadzę przez w^0 i w', drugą przez w^0 równolegle do v^0. Wówczas, jak dowiodłem [2]) w „teoryi cynetycznéj gazów niedoskonałych", zmiana energii dla cząsteczki m_1 wynosi

$$\frac{m_1}{2}(v'^2 - v^{02}) = \frac{2m_2^2\, m_1\, w^2}{(m_1+m_2)^2}\sin^2\omega - \frac{2m_2\, m_1\, v^0\, w}{m_1+m_2}(\sin^2\omega\cos\gamma + \sin\gamma\cos\omega\sin\omega\cos\delta)\,. \tag{9}$$

Jeżeli uważamy spotkania za uderzenia kul sprężystych, to, rachując jak w cytowanéj ostatnio pracy [3]), łatwo jest okazać, iż

[1]) Uważam za słuszne przytoczyć tu następujące słowa z listu prof. Tait'a, pisanego do mnie przy przesyłaniu mi cytowanéj pracy: „§§ 23 and 24 seem to be what you seek. The equation in § 23 can be integrated *without* approximation; but what I have done was quite sufficient for my immediate purpose". (§§ 23 i 24 są, zdaje się, tém, czego Pan poszukujesz. Równanie w § 23 można zcałkować *bez* przybliżeń; lecz to, co zrobiłem, było zupełnie wystarczające dla bezpośredniego celu mojego.)

[2]) Kosmos, r. 1888, str. 164.

[3]) Kosmos, r. 1888, str. 165 i 166.

$$\frac{8N_1 N_2 R^2}{\alpha^3\beta^3\pi}\, v^{02} e^{-v^{02}/\alpha^2}\, w^3\, e^{-(v^{02}+w^2-2v^0 w\cos\gamma)/\beta^2}\sin\gamma\sin\omega\cos\omega\; dw\, d\omega\, dv^0\, d\gamma\, d\delta \tag{10}$$

odbywa się w ciągu jednostki czasu spotkań typu $m_1\, m_2$, w których wielkości $w, \omega, v^0, \gamma, \delta$ zawarte są pomiędzy granicami w i $w + dw$, ω i $\omega + d\omega$, γ i $\gamma + d\gamma$, v^0 i $v^0 + dv^0$, δ i $\delta + d\delta$. W każdém takiém spotkaniu energia cząsteczki m_1 zmieni się tak, jak to wskazuje równanie (9). Całkując zatém iloczyn z (9) przez (10) w granicach od zera do nieskończoności względem w i v^0, od 0 do 2π względem δ, od 0 do π względem γ, od 0 do $\pi/2$ względem ω, otrzymamy bez trudności na ilość energii, przepływającéj w ciągu jednostki czasu:

$$4\sqrt{\pi}\,\frac{m_1\, m_2}{(m_1+m_2)^2}\, N_1\, N_2\, R^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,(m_2\beta^2 - m_1\alpha^2). \tag{11}$$

Rezultat ten można zresztą otrzymać z formuły, podanéj [1]) w „teoryi cynetycznéj gazów niedoskonałych" w § 8, a mianowicie

$$16\sqrt{\pi}\,\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\, N_1 N_2\, R^2\,\frac{(m_2\beta^2 - m_1\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^{5/2}}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} w^5\, e^{-w^2/\alpha^2+\beta^2}\sin^2\omega\sin\psi\cos\psi\, d\psi\, dw.$$

Dla kul sprężystych bowiem całka podwójna ma wartość

$$\tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)^3,$$

zgodnie ze wzorem (11). Całkować tedy mamy równanie

$$\frac{d(m_1\alpha^2)}{dt} = \frac{16}{3}\,\frac{m_1\, m_2}{(m_1+m_2)^2}\, N_2\, R^2\sqrt{\pi(\alpha^2+\beta^2)}\,(m_2\beta^2 - m_1\alpha^2)\,, \tag{12}$$

gdyż wielkość (11) jest równą zmianie energii $N_1 E_1$, czyli $\frac{3}{4} N_1 m_1 \alpha^2$.

Całkowita ilość energii, w obu gazach zawarta, jest stałą, a zatém wyraz

$$N_1\, m_1\, \alpha^2 + N_2\, m_2\, \beta^2 \tag{13}$$

jest stały. Założmy, że $N_1 m_1 \alpha^2 + N_2 m_2 \beta^2 = N_2\, L$, zatém L będzie niezależne od czasu. Daléj załóżmy

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{N_1}{N_2} \\ C &= \frac{16}{3}\,\frac{m_1\, m_2}{(m_1+m_2)^2}\, N_2\, R^2\sqrt{\pi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

[1]) Kosmos, r. 1888, str. 166.

Wówczas równanie (12) przybiera kształt następujący:

$$\frac{d(m_1\alpha^2)}{dt} = C\sqrt{\frac{L}{m_2} + \alpha^2\left(1 - n\frac{m_1}{m_2}\right)}\,[L - (n+1)\, m_1\, \alpha^2]. \qquad (15)$$

Zakładając teraz

$$\frac{L}{m_2} + \alpha^2\left(1 - n\frac{m_1}{m_2}\right) = y^2 L \frac{m_1 + m_2}{m_1\, m_2\, (n+1)} \qquad (16)$$

oraz

$$\frac{1}{T} = C\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1\, m_2}(n+1)\, L}\,, \qquad (17)$$

znajdziemy bez trudności, zamiast równania (15),

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2T}(1 - y^2); \qquad (18)$$

stąd

$$\frac{1-y}{1+y} = Ae^{-t/T}\,, \qquad (19)$$

gdzie A jest stałą, zależną od początkowéj $(m_1\alpha^2 - m_2\beta^2)$, oraz daléj

$$y = \frac{1 - Ae^{-t/T}}{1 + Ae^{-t/T}}. \qquad (20)$$

Że jednak, jak łatwo z równania (16) przekonać się można,

$$1 - y^2 = \frac{m_2 - n\, m_1}{m_2 + m_1}\,\frac{m_2\beta^2 - m_1\alpha^2}{L}\,, \qquad (21)$$

przeto (20) można pisać jeszcze jak następuje:

$$m_2\beta^2 - m_1\alpha^2 = \frac{4\,(m_2 + m_1)\,(N_1 m_1\alpha^2 + N_2 m_2\beta^2)}{N_2\, m_2 - N_1\, m_1}\,\frac{Ae^{-t/T}}{(1 + Ae^{-t/T})^2}. \qquad (22)$$

Takiém jest ścisłe prawo zmieniania się różnicy $(m_2\beta^2 - m_1\alpha^2)$. Czas T, który równa się

$$T = \frac{3}{16}\,\frac{(m_1 + m_2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m_1\, m_2\,(N_1 + N_2)\,(N_1\, m_1\alpha^2 + N_2\, m_2\beta^2)}\,\pi R^2}$$

jest, równie jak Tait'a T, dla cytowanego wypadku wielkością rzędu 10^{-9} sekundy. Zatém w tym razie już po tak krótkim czasie różnica $(m_1\alpha^2 - m_2\beta^2)$ spada do $^1/_{100}$ swéj pierwotnéj wielkości. Tém godniejszą uwagi wydaje mi się okoliczność, iż owa pozostająca setna część wyrówna się dopiero po upływie wieczności.

Warszawa, w kwietniu 1888 r.