własnego pomysłu pod wpływem ściskania, a p. Wł. Natanson prowadził studya nad oporem, jaki stawia powietrze ciałom w niém się poruszającym. Te ostatnie doświadczenia, przygotowywane w Pracowni, a wykonywane na na drezynie bocznicy drogi żelaznéj Józefów-Pruszków i na parowozie na linii drogi żelaznéj Warsz.-Wiedeńskiéj, mogły być przeprowadzone tylko dzięki wysokiéj uprzejmości Dyrekcyi drogi Warszawsko-Wiedeńskiéj oraz Zarządu fabryki cukru Józefów.

Nie wszystkie z pomienionych prac zostały ukończone, lub téż doprowadzone do tego stanu, by je można było ogłosić; względnie zaś ukończone badania, ogłoszone już z podpisem Pracowni fizycznéj Muzeum Przemysłu i Rolnictwa, są następujące.

J. J. Boguski. Ein Beitrag zur Kenntniss der Geschwindigkeit der Reaction zwischen Marmor und Salzsäure. (Zeitschrift für physikalische Chemie, I, 558).

Tenże Versuch den Einfluss der Volumenänderung der Gefässe bei Messungen der Kompressibilität der Flüssigkeiten zu eliminieren. (loco citato, II, 120).

Tenże Versuch den Einfluss der Volumenänderung der Gefässe bei Messungen der Ausdehnung von Flüssigkeiten zu eliminieren. (loco citato II, 482).

J. J. Boguski i Wł. Natanson. Barometr (pomysłu p. E. Natansona), odczytywany za pomocą zetknięć elektrycznych. (Kosmos, XIII, 138).

Opis poszukiwań autora niniejszego nad wyrugowaniem zmienności objętości naczyń przy oznaczaniach rozszerzalności cieczy znajdą czytelnicy na str. 52 niniejszéj książki.

Wobec trudności znalezienia w Warszawie książek i czasopism naukowych specyalnych założoną została w Pracowni podręczna biblioteczka, złożona z darów. Dla biblioteczki téj otrzymujemy nadto (dzięki specyalnemu poparciu osób życzliwych Pracowni) czasopisma następujące: Annalen der Physik und Chemie, Beiblätter, Journal de Physique, Astronomische Nachrichten, Sitzungsberichte Akademij w Berlinie i w Wiedniu, Comptes Rendus Akademii w Paryżu, Proceedings of the Royal Society w Londynie, Nature (ang.), Lumière Electrique, Science (amer.), Elektrotechnische Zeitschrift, Archives Néerlandaises.

CZĘŚĆ DRUGA.

1. WIADOMOŚĆ O PRACACH Z DZIEDZINY GEOMETRYI WIELOWYMIAROWEJ. [1]

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

Rzadko która gałąź nauki abstrakcyjnéj może poszczycić się takim rozwojem w ciągu bardzo krótkiego okresu, bo niespełna dwóch dziesiątków lat, jak dziedzina, którą zajmiemy się w notatce niniejszéj. Ogłoszone prawie równocześnie dwie sławne rozprawy: jedna Riemann'a: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", Göttinger Abhandlungen, XIII [2]), druga Helmholtz'a: „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen", Göttinger Nachrichten, XIII [3]) stanowią początek tego rozwoju, który przyczynił się z jednéj strony do zgłębienia podstaw wiedzy geometrycznéj, z drugiéj zaś do zbogacenia nauki matematycznéj wielu bardzo cennemi pojęciami.

Riemann w pracy swojéj podjął zadanie wyjaśnienia znaczenia pewników geometrycznych i w ogóle zbadania podstaw systemu prawd geometrycznych. Z właściwą umysłowi swemu zdolnością uogólniania, stanął on od razu

[1]) Notatkę niniejszą ułożyłem na podstawie referatów, pomieszczonych w „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" (rocznik I—XVI) oraz tych rozpraw, które miałem sposobność poznać bezpośrednio; do zupełności notatka ta nie rości pretensyi.

[2]) Przekład polski téj rozprawy p. t.: „O hypotezach, które służą za podstawę geometryi" przez S. Dicksteina i W. Gosiewskiego, pomieszczony został w Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, tom IX r. 1877

[3]) Obie ogłoszone w roku 1868; praca Riemann'a atoli opracowaną została daleko wcześniéj (1854 r.).

na stanowisku, z którego właściwości t. j. stosunki miarowe przestrzeni naszéj, t. j. przestrzeni, do któréj się stosują twierdzenia geometryi euklidesowéj, oraz wynikający stąd układ pewników—wypływają jako szczególny przypadek z daleko ogólniejszego pojęcia tak zwanéj *rozmaitości* wielowymiarowéj t. j. zmienności, zależnéj od n zmiennych niezależnych (współrzędnych). Ogólne wyrażenie elementu linijnego w takiéj rozmaitości, pojęcie krzywizny rozmaitości, stanowiące uogólnienie pojęcia krzywizny Gauss'owskiéj, pogląd, że nieograniczoność przestrzeni niekoniecznie pociąga za sobą jéj nieskończoność, wyjaśnienie na tych nowych podstawach znaczenia pewników euklidesowych —oto wyniki pracy Riemann'a, które stworzyły zupełnie nową gałąź geometryi. Wyniki te przypomniały matematykom dawniejsze badania Bolay'a (1832), Łobaczewskiego (1840) i wcześniejsze pomysły Gauss'a (1792), dotyczące geometryi, zwanéj urojoną, nieeuklidesową, pangeometryą, lub wreszcie geometryą absolutną, która wyłączała pewnik o liniach równoległych [1]) ze swego układu pewników, a która obecnie okazała się zawartą w teoryi Riemann'owskiéj, jako geometrya przestrzeni o krzywiznie stałéj ujemnéj. [2])

Badania Riemann'a, objąwszy w widoku najogólniejszym całą dziedzinę prawd geometrycznych, natchnęły nietylko matematyków ale i filozofów do podjęcia na nowo zasadniczego w filozofii kantowskiéj zagadnienia o istocie przestrzeni. Owocem tych prac filozoficznych jest zgłębienie podstaw teoretyczno-poznawczych wiedzy matematycznéj. Z drugiéj strony, praca Riemann'a, a głównie zawarte w niéj pojęcie rozmaitości wielokrotnie rozciągłéj, przypomniało matematykom dawniejsze, lecz mało znane badania znakomitego matematyka Grassmann'a, który w dziele swém p. t. „Ausdehnungslehre", ogłoszoném jeszcze w r. 1844, z nadzwyczajną precyzyą wskazał stanowisko geometryi w dziedzinie nauk matematycznych i był pierwszym, rzec można, twórcą nauki o wielkościach wielokrotnie rozciągłych. Z tego względu Grassmann'a należy postawić w rzędzie twórców nowego kierunku w badaniach podstaw geometryi.

Helmholtz niezależnie od Riemann'a doszedł do badania podstaw geometryi zupełnie na innéj drodze, a mianowicie dzięki swym poszukiwaniom fizyologicznym nad lokalizacyą w polu widzenia. Już w roku 1866 (Abhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg) wypowiedział on zdanie, że pomiar przestrzeni polega na przystawaniu (kongruencyi) i że podstawą prawd geometrycznych są następujące postulaty: 1° w przestrzeni n-wymiarowéj miejsce każdego punktu oznacza się za pomocą n zmiennych niezależnych (ciągłość i wymiary); 2° pomiędzy $2n$ współrzędnemi każdéj pary punktów ciała stałego zachodzi równanie, niezależne od ruchu téj pary (istnienie ciał stałych poruszających się); 3° każdy punkt może na drodze *ciągłéj* przejść do innego punktu (swobodna poruszalność ciał); 4° jeżeli ciało porusza się tak, że $n—1$ jego punktów pozostaje stale w jedném miejscu, a każdy inny punkt ciała można opisać tylko linią, to *obrót* sprowadza ciało do położenia pierwotnego (niezależność formy ciała stałego od obrotu — monodromia przestrzeni). W następnéj pracy, któréj tytuł podaliśmy wyżéj, dochodzi Helmholtz przy pomocy rachunku analitycznego do wyrażenia elementu linijnego w przestrzeni n-wymiarowéj o krzywiznie stałéj t. j. do jednego z rezultatów teoryi Riemann'owskiej. W późniejszych swych pracach wraca Helmholtz niejednokrotnie do zagadnienia o podstawach geometryi, badając jego konsekwencye filozoficzne i teoretyczne-poznawcze. Znana jest jego praca o pewnikach geometryi, pomieszczona w „Odczytach popularnych".

Jednocześnie z Helmholtz'em wystąpił matematyk włoski Beltrami z pracą w dziedzinie geometryi wielowymiarowéj („Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante", Brioschi Annali, 1868.) Uczony ten wyprowadził równanie linij geodezyjnych w rozmaitości o krzywiznie stałéj i wskazał niektóre własności tych linij; w następnéj zaś rozprawie („Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea", Battaglini Giornale, VI) wykazał, że wiele twierdzeń planimetryi można wprost przenieść na powierzchnie, w których iloczyn obu promieni krzywizny jest stały; w szczególności zaś wypowiedział twierdzenie, że geometrya nieeuklidesowa Łobaczewskiego, a mianowicie część jej planimetryczna, znajduje swe urzeczywistnienie na powierzchni o krzywiznie stałéj ujemnéj. Wynika stąd, że w geometryi nieeuklidesowéj płaszczyznę uważać należy jako rozmaitość dwuwymiarową o krzywiznie stałéj ujemnéj.

Kronecker („Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln", Berliner Monatsberichte, 1868), badając układy funkcyj, zależnych od wielu zmiennych, zastosował do rozmaitych utworów analitycznych pojęcia geometryi wielowymiarowéj; jednocześnie zaś Christoffel („Ueber die Transformationen der homogenen Differentialausdrücke 2-en Grades", Crelle, 70; „Ueber ein die Transformation homogener etc. betreffendes Theorem", tamże, wreszcie „Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Variabeln, tamże, tom 70 i 71). i Lipschitz („Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen, Crelle, 71) zajęli się badaniem przekształceń form różniczkowych drugiego stopnia, które stały się ważnemi w skutek znaczenia, jakie dała im rozprawa Riemann'a.

Wspomnieć tu należy o ówczesnych badaniach, odnoszących się wprost do kwestyi pewników geometrycznych lub do geometryj nieeuklidesowéj.

[1]) Pewnik ten ma swoją oddzielną i obszerną historyą, którą tu pomijamy; wspomnimy tylko, że oryginalny pogląd na ten przedmiot ogłosił w ostatnich czasach J. Petersen (Math. Ann. Tom XXIX 1887.)

[2]) W geometryi téj prosta ma dwa punkty nieskończone, przez punkt dany można poprowadzić dwie linie równoległe, suma kątów w trójkącie jest mniejsza od dwóch kątów prostych. W geometryi o krzywiznie stałéj, nierównéj zeru, niema punktów nieskończonych, niema równoległych do linii danéj, suma kątów w trójkącie jest większa od dwóch prostych. W geometryi o krzywiznie stałéj, równéj zeru, przez punkt dany można poprowadzić tylko jednę równoległą do prostéj danéj, suma kątów w trójkącie równa się dwóm kątom prostym; jest to geometrya zwykła, euklidesowa.

Genocchi'ego („Dei principi della meccanica e della geometria") Flye-Sainte-Marie'go („Sur le postulatum d'Euclide"), Hoüel'a („Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide") i t. d. Do téj dziedziny należy później wydana interesująca praca de Tilly'ego („Essai sur les principes fondamentaux de la géometrie et de la mécanique." Mém. de Bordeaux, 1879). Wspomnimy także o pracy Betti'ego („Sopra gli spazii di un numero qualunque di dimensioni", Brioschi Annali), w któréj autor podaje związki, zachodzące między przestrzeniami o różnéj liczbie wymiarów, z których jedne (rozmaitości) zawierają się w drugich.

Nowe i ogólne widoki w zajmującéj nas kwestyi odsłoniła znakomita rozprawa F. Klein'a o geometryi nieeuklidesowéj („Ueber die sogenannte nichteuklidische Geometrie", Mathematische Annalen, tom IV i VI). Badania Klein'a ogarnęły, że tak powiem, wszystkie kierunki geometryi, związały geometryą rzutową (projective Geometrie) z geometryą miarową (Maassgeometrie), doprowadziły do pojęcia krzywizny na drodze, zupełnie różnéj od téj, na któréj do pojęcia tego doszedł Riemann. Już w roku 1859 pokazał Cayley („Sixth memoir upon Quantics", Philosophical Transactions, t. 149), że można zbudować oznaczenia miarowe w przestrzeni przez przyjęcie dowolnéj powierzchni stopnia drugiego za powierzchnią zasadniczą; że, stosownie do rodzaju téj powierzchni, oznaczenie miarowe jest obrazem odpowiedniéj teoryi linij równoległych; tak np. według Cayley'a geometrya miarowa (euklidesowa) jest szczególnym przypadkiem geometryi rzutowéj w tém mianowicie założeniu, że owa powierzchnia zasadnicza przechodzi w koło urojone, położone w nieskończoności. Klein uogólnił pomysły Cayley'a i zastosował je do geometryi wielowymiarowéj.

Wszystkie oznaczenia miarowe w geometryi dają się, według Klein'a, sprowadzić do dwóch zagadnień zasadniczych: 1^0 do mierzenia odległości dwóch punktów; 2^0 do mierzenia nachylenia dwóch prostych. Dodajność i przenośność tych oznaczeń stanowi ich wspólną cechę podstawową i wyraża się geometrycznie jako przesunięcie szeregu punktów i jako obrót wiązki promieni; jedno zaś i drugie podchodzi pod ogólne pojęcia przekształcenia liniowego, które dany utwór zasadniczy przeprowadza w tenże sam utwór bez zmiany. Tyle będzie rodzajów oznaczeń liniowych, ile będzie zasadniczo różnych takich przekształceń liniowych. Rodzajów takich jest dwa: 1^0 Przekształcenie *ogólne* w którém *dwa* elementy rzeczywiste lub urojone utworu zasadniczego są stałemi; 2^0 przekształcenie *specyalne*, w którém *jeden* element *podwójny* jest stałym. Pierwszemu przypadkowi odpowiada geometrya *hyperboliczna* (dwa elementy rzeczywiste) i *eliptyczna* (dwa elementy urojone), drugiemu geometrya *paraboliczna* (jeden element podwójny.) Geometrya hyperboliczna odpowiada geometryi rozmaitości o stałéj ujemnéj krzywiznie; eliptyczna — geometryi rozmaitości o krzywiznie stałéj dodatniéj; geometrya paraboliczna wreszcie — geometryi rozmaitości o krzywiznie równéj zeru czyli geometryi euklidesowéj. Wykazuje w dalszym ciągu swéj pracy Klein, że odległości dwóch dowolnych elementów z i z' utworu zasadniczego pierwszego stopnia równa się logarytmowi „stosunku podwójnego" (Doppelverhältniss) tych punktów względem punktów zasadniczych, pomnożonemu przez pewną ilość stałą. Jeżeli c jest charakterystyczną stałą przekształcenia, to $-1/4c^2$ będzie jego krzywizną. Rozważywszy w najważniejszych szczegółach podstawy różnych gatunków geometryi, dowodzi następnie Klein niezależności geometryi rzutowéj od teoryi linij równoległych i wyprowadza wszystkie trzy geometrye z geometryi rzutowéj. Rozprawa Klein'a zawiera taką obfitość nowych pomysłów, że niepodobna tu jéj streścić i dlatego zachęcamy czytelnika do odczytania téj pierwszorzędnéj pracy, jeżeli bliżéj obznajmić się pragnie z genialnemi poglądami znakomitego matematyka niemieckiego.

Jednocześnie niemniéj znakomity matematyk norwegski Lie, wystąpił z pracą z dziedziny teoryi rozmaitości wielowymiarowych („Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht", Göttin. Nach. 1871), w któréj bada: rozmaitości *styczne* do danéj, rozmaitości jednokrotnie rozciągłe (*konfiguracye*), wewnątrz danéj pomyśleć się dające, przecięcia wzajemne rozmaitości i przenosi twierdzenie Dupin'a o szeregach powierzchni ortogonalnych na rozmaitości wielowymiarowe.

Głęboką, wielce treściwą jest niewielka rozmiarami rozprawa Klein'a p. t. „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", którą wygłosił jako lekcyą wstępną w uniwersytecie w Tybindze (1872). W rozprawie téj geometrya jest przedstawioną jako szczególny przypadek następującego ogólnego zadania: „Daną jest rozmaitość i w niéj *grupa przekształcenia*; idzie o zbadanie utworów w rozmaitości pod względem takich własności, które nie zmieniają się pod wpływem przekształceń grupy". Zadanie to w języku dzisiejszéj algebry wyraża się w ten sposób: „Dana jest rozmaitość i w niéj grupa przekształcenia; rozwinąć teoryą niezmienników (inwaryantów) odnośnie do téj grupy". To ogólne zadanie, jak to wykazuje Klein, obejmuje nietylko zwykłą geometryą, ale i wszystkie metody geometryczne oraz badanie rozmaitości o dowolnéj liczbie wymiarów. Dla przykładu przytoczymy niektóre wyniki, do jakich doszedł autor:

„Teorya form dwójkowych (binarnych) i geometrya układów punktów na stożkowéj (na przecięciu stożkowém) — jest jedną i tąższamą t. j. że każdemu twierdzeniu z teoryi form odpowiada twierdzenie o takich układach i odwrotnie."

„Geometrya elementarna płaszczyzny i badanie powierzchni 2-go stopnia, przy *dołączeniu* jednego z jéj punktów, są identyczne".

„Teorya form czwórkowych (quaternäre) odpowiada rzutowemu oznaczeniu miarowemu w rozmaitości, określonéj przez 6 współrzędnych jednorodnych."

„Geometrya promieni odwrotnych (der reciproken Radien) w przestrzeni odpowiada rzutowemu traktowaniu rozmaitości, przedstawionéj za pomocą równania stopnia drugiego między 5 zmiennemi."

W rozprawie, która prawie bezpośrednio potém pojawiła się w „Mathematische Annalen“, a stanowi dalszy ciąg badań o geometryi nieeuklidesowéj, ogłoszonych w IV tomie tegoż dziennika, zajmuje się Klein dalszém poszukiwaniem związku pomiędzy rozmaitością wielowymiarową a grupą przekształceń, i dowodzi twierdzenia, że „grupa przekształceń, które nie zmieniają oznaczenia miarowego w rozmaitości o krzywiznie stałéj, składa się z grupy tych przekształceń liniowych, które równanie stopnia drugiego (o wyróżniku różnym od zera) przeprowadza w siebie samo. Dowodzi téż autor ważnéj prawdy, że uzasadnienie geometryi położenia Staudt'a jest zupełnie niezależném od pewnika o liniach równoległych.

Wspomnieć w tém miejscu należy o wydaném w roku 1872 dziełku Frischhauf'a p. t. „Absolute Geometrie nach Johann Bolay“, zawierającém wykład zasad geometryi nieeuklidesowéj (tenże autor wydał w r. 1879 podręcznik téj nauki p. t. „Elemente der absoluten Geometrie“); o rozprawie Cayley'a („On the non-euclidian geometry“, Math. Annalen, V), w któréj podane są wzory trygonometryi hyperbolicznéj (t. j. wzory trygonometryczne dla geometryi hyperbolicznéj Klein'a); o rozprawach Jordan'a w Sprawozdaniach Akademii paryskiéj, zawierających twierdzenia z geometryi wielowymiarowéj (pojęcia równoległości, prostopadłości i t. d.).

W roku następnym (1873) pojawiają się prace, w których wyniki geometryi wielowymiarowéj stosowane są do mechaniki; do tych prac należą rozprawy: Frahm'a (Habilitationsschrift) o ruchu swobodnym ciała sztywnego w przestrzeni n wymiarowéj; Schering'a („Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen“), który twierdzenia o potencyałach stosuje do przestrzeni wielowymiarowéj, a w innéj pracy („Die Hamilton-Jacobi'sche Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt“) stosuje teoryą Hamilton'a i Jacobi'ego do przestrzeni, w któréj kwadrat elementu linijnego wyraża się jako funkcya jednorodna 2-go stopnia różniczek współrzędnych; Lipschitz'a („Extension of the planet problem to a space of n dimensions and of constant integral curvature“, Quart. J. XII), który zadanie planetarne rozszerza do przestrzeni wielowymiarowéj o krzywiznie stałéj i t. d. i t. d.

Krzywiznę rozmaitości wielowymiarowych badali: Beetz („Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung“, Mathematische Annalen VII, „Theorie des Krümmungsmaasses etc.“ Zeitschrift Schlömilch'a XX); Lipschitz („Beitrag zur Theorie der Krümmung“), Alle („Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses“ Wiener Ber. LXXIV) i inni. Teoryą linij i powierzchni krzywych w przestrzeni wielowymiarowéj zajmowali się: Jordan („Sur la théorie des courbes dans l'éspace à n dimensions“, Comptes Rendus, LXXIX, „Généralisation du theorème d'Euler sur la courbure des surfaces“ tamże); teoryi kompleksów i-go rzędu, t. j. rozmaitościom $(n-i)$-wymiarowym w przestrzeni płaskiéj n wymiarowéj poświęcił rozprawę Halphen (Recherches de géometrie à n dimensions“); Veronese („Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen die zwischen den allgemeinen Chararacteren einer Curve im Raume von n Dimensionen stattfinden kann“. Mathemat. Ann. XVIII) i inni. Kretkowski (Pam. Tow. Nauk Ścisłych w Paryżu tom XII) dał wyrażenie współrzędnych punktu w przestrzeni n wymiarowéj równooddalonego od n punktów danych; Gosiewski (Pam. Tow. Nauk Ścisłych, tom IX w przypisku do wzmiankowanego przekładu rozprawy Riemanna) uprościł rachunki, mające na celu wyprowadzenie miary krzywizny rozmaitości w danym punkcie i uzupełnił określenie krzywizny Riemanowskiéj w $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkach powierzchniowych.

Dotychczasowe badania w dziedzinie geometryi wielowymiarowéj miały przeważnie charakter analityczny; rozprawka Rudel'a (1876) o elementach i utworach zasadniczych geometryi syntetycznéj rozpoczyna szereg poszukiwań charakteru konstrukcyjno-geometrycznego. Rzecz jasna, że konstrukcyom w przestrzeni cztero i więcéj wymiarowéj nie można przypisać istnienia konkretnego; niemniéj jednak badania tego rodzaju bezużytecznemi nie są, bo służą do uogólnienia, a często i do wyjaśnienia zjawisk w przestrzeni trójwymiarowéj, podobnie jak twierdzenia stereometryczne wyjaśniają z ogólnego stanowiska niektóre twierdzenia planimetryczne. Badaniem figur foremnych w przestrzeniach wielowymiarowych zajmują się: matematyk amerykański Stringham, angielski Cox, matematycy niemieccy Hoppe, Schlegel, i Durège. Owocem poszukiwań wymienionych uczonych jest między innemi oznaczenie i opisanie gatunków figur foremnych w przestrzeni cztero i więcéj wymiarowéj, obliczenie kątów w przestrzeni n wymiarowéj, zastosowanie do téj przestrzeni twierdzenia Euler'a o wielościanach, które wyraża się tu bardzo prostym wzorem

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{\mu-1} a_{\mu-1} = 1 - (-1)^{\mu},$$

gdzie a_r oznacza liczbę utworów granicznych r-wymiarowych utworu μ-wymiarowego. Schlegel stosuje w swych badaniach metodę nauki rozciągłościowéj Grassmann'a, podczas gdy matematyk Cox używa metody kwaternionów. Interesującemi są usiłowania geometrów do uzmysłowienia utworów czterowymiarowych za pomocą ich rzutów na przestrzeń trójwymiarową. Do urzeczywistnienia téj myśli doprowadziły powyższe badania, a opierając się na nich Schlegel wykonał medale trójwymiarowych rzutów sześciu figur foremnych w przestrzeni czterowymiarowéj, które są ograniczone odpowiednio: 5, 16, 600 czworościanami, 8 sześcianami, 24 ośmiościanami i 126 dwunastościanami.

Wspomnieć tu należy o badaniach Newcomb'a nad przekształcaniem powierzchni w przestrzeni wielowymiarowéj; Bianchi'ego nad rozwijaniem jednych przestrzeni na drugie, a zwłaszcza Segre'a nad powierzchniami prostolinijnemi, wiązkami stożków kwadratowych, geometryą prostéj, homografią i t. d. w przestrzeniach liniowych jakichkolwiek i t. d.

W związku z badaniami z dziedziny geometryi wielowymiarowéj pozostają najnowsze prace G. Cantora z ogólnéj nauki o rozmaitościach ogłoszone przeważnie w dziennikach: Crelle'a, Clebsch'a i w „Acta Mathematica". W jednéj ze swych prac dowodzi Cantor, że, gdy usuniemy założenie odpowiedniości *ciągłéj* rozmaitości n wymiarowéj i n współrzędnych niezależnych, to elementy rozmaitości dają się oznaczyć za pomocą mniejszéj liczby zmiennych, a nawet sprowadzić do rozmaitości liniowéj; w innéj dochodzi do wniosku następującego: „Jeżeli między dwiema dziedzinami ciągłemi M_μ i M_ν istnieje taka zależność, że każdemu punktowi z rozmaitości M_μ odpowiada *najwyżéj* jeden punkt Z rozmaitości M_ν, a każdemu punktowi Z *przynajmniéj* jeden punkt z i jeżeli zależność ta jest ciągłą, to $\mu \geqq \nu$. Wzmiankę o innych twierdzeniach Cantor'a, jako przekraczającą zakres niniejszéj notatki, pomijamy.

Do najnowszych prac w omawianéj przez nas dziedzinie należą prace Killing'a. W jednéj z nich („Ueber zwei Raumformen mit constanter Krümmung," Crelle, 75) wykazuje Killing, że są dwie (i tylko dwie) formy przestrzeni o stałéj krzywiznie: jedna z nich ma charakter kuli, druga zgadza się z formą Klein'a (w Math. Annalen, tom VI). Tenże autor poświęcił rozprawy pojęciom zasadniczym geometryi („Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie), rachunkowi w przestrzeniach nieeuklidesowych (Crelle, 89); zastosował do przestrzeni nieeuklidesowych twierdzenia, odnoszące się do przestrzeni płaskich n-wymiarowych; wyłożył mechanikę w przestrzeni nieeuklidesowéj (Crelle, 91) wreszcie wydał książkę p. t.: „Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung" (1885), zawierającą wykład teoryi form nieeuklidesowych, przeprowadzonéj za pomocą układu współrzędnych tak zwanych weierstrassowskich.

W niniejszéj notatce pominęliśmy cały szereg prac, należących do dziedziny teoryi poznawania, które omawiały nowe teorye geometryczne z punktu widzenia filozoficznego; jedne z nich stają na stanowisku matematyków, uprawiających tę teoryą, inne zajmują stanowisko negujące wprost zasadność podobnych dociekań. Wymienimy tylko niektórych filozofów, którzy ogłosili prace w tym przedmiocie, a mianowicie Wundt'a, Erdmann'a, Dühring'a, Schmitz-Dumont'a, Kromana.

---

2. O PODSTAWACH CYNETYCZNEJ TEORYI GAZÓW.

(DYSKUSYA POMIĘDZY TAIT'EM A BOLTZMANN'EM.)

PRZEZ

WŁ. NATANSONA.

Historya rozwoju cynetycznéj teoryi gazów zaznacza niejednę pamiętną rozprawę naukową. Ważną pracę „Ueber die mittlere Länge der Wege, welche bei der Molecularbewegung gasförmiger Körper von den einzelnen Molecülen zurückgelegt werden" napisał Clausius w obronie nowéj podówczas nauki przeciwko zarzutom Bujs-Ballot'a i Jochmann'a. [1]) Mniéj głośną, lecz także ważną była wymiana zdań pomiędzy O. E. Meyer'em a Boltzmann'em w przedmiocie dowodu, przytoczonego przez pierwszego dla udowodnienia prawa Clerk-Maxwell'a. [2]) Od roku 1886 wreszcie trwa dyskusya pomiędzy Tait'em a Boltzmann'em [3]), z którą czytelnika zapoznać zamierzam. Ludwik Boltzmann, profesor uniwersytetu w Gradcu, uczony sumienny i ostrożny, znany jest od lat dwudziestu jako jeden z najgorliwszych promotorów teoryi cynetycznéj. Cały szereg rozpraw jego ma za zadanie ściśle uzasadnienie i dalsze rozwinięcie prawa Clerk-Maxwell'a, oraz zastoso-

---

[1]) Zobacz Clausius'a Abhandlungen über die mech. Wärmetheorie, 1867, tom II; Poggendorff's Annalen, tom 103 i 108.

[2]) Zobacz O. E. Meyer'a Die kinetische Theorie der Gase, 1877. Sitzungsberichte d. Wiener Akademie, tom 76; Wiedemann's Annalen, tomy 7, 8, 10 i 11.

[3]) Oto zupełna literatura téj dyskusyi: 1) Tait, Philosophical Magazine, t. 21, str. 343. Kwiecień 1886. 2) Tait, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, tom 33, str. 65. Maj 1886. 3) Burbury, Phil. Mag. t. 21, str. 481. Czerwiec 1886. 4) Tait, Phil. Mag. t. 23, str. 141. Luty 1887. 5) Boltzmann, Phil. Mag. t. 23, str. 305. Kwiecień 1887. 6) Tait, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, tom 33, str. 251. Kwiecień, 1887. 7) Tait, Phil. Mag. t. 23, str. 433. Maj 1887. 8) Boltzmann, Phil. Mag. t. 25, str. 81. Luty 1888. 9) Tait, Phil. Mag., t. 25, str. 172. Marzec 1888.