badając niektóre metale i ich aliaże; o ile teraz już mogę sądzić, wyniki tych badań przemawiają za przytoczoną powyżéj hypotezą.

W końcu wspomnę jeszcze o jednéj osobliwości, którą zauważyłem w ciągu mojéj pracy. Jeżeli (niezależnie od rodzaju odkształcenia) obciążamy sztabkę szkła pewnym ciężarem, blizkim do tego, przy którym sztabka się rozrywa i zostawiamy ją tak obciążoną przez pewien dłuższy przeciąg czasu (24 godzin do 48), to sztabka przyzwyczaja się, że tak powiem, do ciężaru i wytrzymałość jéj zwiększa się; a więc mamy zjawisko podobne do tego, które zauważono na obciążonych magnesach.

O ZWIĄZKU MIĘDZY ZASADĄ NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA I NAJPRAWDOPODOBNIEJSZYM UKŁADEM.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Stosując rachunek prawdopodobieństwa w rozważaniu układów mechanicznych, otrzymałem wniosek, że zasada najmniejszego działania jest w bezpośrednim związku z układem najprawdopodobniejszym, że więc ją można zastąpić zasadą najprawdopodobniejszego układu. Przy takiém uważaniu, równania ruchu przedstawiają się jako warunki konieczne najprawdopodobniejszego układu, a w skutek tego przyczyna działań z odległości i wogóle przyczyna wszelkich zmian ruchu staje się rzeczywiście pojęciem tylko przechodniém.

Nadmieniam przy tém, że o ile mi wiadomo, rachunku prawdopodobieństwa do mechaniki wogóle dotąd nikt nie stosował. Maxwell, a za nim O.E. Meyer, Boltzmann i inni stosowali go tylko w teoryi cynetycznéj gazów, na zasadach całkiem odmiennych.

W pracy niniejszéj zamierzam wyłożyć pomienioną wyżéj nową zasadę i pewne jéj zastosowania.

Prawdopodobieństwo stanu układu.

1. Przekonanie, że między wszystkiemi częściami układu wszechświatowego zachodzą stosunki, zmieniające się z czasem według praw niezmiennych, prowadzi do przypuszczenia, że mimo nieoznaczoność ich liczby, stosunki te wyrażają się przecież jako funkcye czasu oznaczone, za pośrednictwem nieupraszczalnego już układu *n elementów* $q_1, q_2, \ldots, q_n$. [1]) Nie znając jednak wszystkich, nie możemy znać dokładnie niektórych nawet z pomienionych funkcyj, a tém samém nie możemy być pewni, czy to poznanie udokładni się kiedykolwiek. Dla tego to wartość przekonania o układzie wszechświatowym, czyli istocie jego stosunków międzyczęściowych może być tylko prawdopodobną i zadanie oznaczenia tego prawdopodobieństwa ma racyą bytu.

2. Według powyższego, układ wszechświatowy rozważać należy jako zdarzenie, powstające ze współistnienia dwóch niezależnych, a mianowicie:

1-go, że istnieje pewien układ s wartości stosunków międzyczęściowych;

2-go, że istnieje odpowiadający mu układ s' prędkości zmieniania się tych stosunków.

Przypuśćmy, ażeby ułatwić określenie prawdopodobieństw tych zdarzeń, że notując co chwila i przez całą wieczność, otrzymaliśmy w jednym szeregu: wszystkie układy wartości stosunków międzyczęściowych, a w szeregu drugim: odpowiadające im układy prędkości zmieniania się tych stosunków. W każdym z nich, każdy układ wartości powtarzać się może wiele razy.

Owoż, prawdopodobieństwo ψ zdarzenia 1-go jest w gruncie rzeczy prawdopodobieństwem wylosowania układu s z pomiędzy wszystkich w szeregu pierwszym. Że zaś to ostatnie, jako stosunek liczby powtórzenia się układu s do liczby wszystkich zanotowanych, zależyć może tylko od układu s, przeto, za pośrednictwem tego, prawdopodobieństwo ψ jest funkcyą elementów $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Prawdopodobieństwo φ zdarzenia 2-go, będzie to znowóż prawdopodobieństwo wylosowania układu s' z pomiędzy tych tylko szeregu drugiego, które odpowiadają temu samemu układowi s w szeregu pierwszym. Jako więc stosunek liczby zachodzących tu względnie powtórzeń układu s' do liczby powtórzeń układu s w szeregu pierwszym, prawdopodobieństwo φ zależy współcześnie od układów s i s', a tem samem jest wogóle funkcyą elementów $q_1, q_2, \ldots, q_n$ i prędkości ich zmieniania się:

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, \; q'_2 = \frac{dq_2}{dt}, \ldots, q'_n = \frac{dq_n}{dt}.$$

Tym sposobem prawdopodobieństwo układu wszechświatowego, albo raczéj jego *stanu* (q, q'), jako złożone z prawdopodobieństw prostych ψ i φ, będzie iloczynem $\psi\varphi$, w którym ψ zależy tylko od elementów q, a φ— od elementów q i prędkości q'.

[1]) Przypuśćmy, dla przykładu, że cały wszechświat składa się tylko z przestrzeni i kul jednorodnych. Wówczas wszystkie stosunki międzyczęściowe wyrazić by się dały jako funkcye czasu oznaczone, za pośrednictwem samych tylko stosunków kul z przestrzenią, to jest współrzędnych ich środków. Jeżeli więc układ tych współrzędnych nie daje się już sprowadzić do mniejszéj liczby elementów, wyobraża wtedy układ nieupraszczalny. W razie przeciwnym układ nieupraszczalny zawierałby mniéj elementów niż współrzędnych i byłoby to znakiem, że między wzajemnemi odległościami pewnych punktów, stale połączonych z kulami (np. ich środków), zachodzi tyle związków od czasu niezależnych, o ile jest mniéj elementów niż współrzędnych.

Maximum prawdopodobieństwa układu.

3. Skoro może być mowa o prawdopodobieństwie stanu układu, wolno się pytać o układ najprawdopodobniejszy, to jest postawić zadanie tak: *przy jakich warunkach układ wszechświatowy jest najprawdopodobniejszy ze wszystkich pomyśléć się dających?*

Zadanie to rozwiążemy w ten sposób.

Oznaczmy przez $(q, q')_0$ i $(q, q')_1$ dwa prawdopodobne stany układu, odpowiadające czasom t_0 i $t_1 > t_0$, a przez $(\psi\varphi)_0$ i $(\psi\varphi)_1$ ich prawdopodobieństwa. Rozdzielmy następnie przedział czasu $t_1 - t_0$ na nieskończenie małe odstępy ∂t, i oznaczmy przez

$$(q, q')', \; (q, q')'', \text{ i t. d.}$$

stany układu, odpowiadające czasom:

$$t_0 + \partial t, \; t_0 + 2\partial t, \text{ i t.d.}$$

a prawdopodobieństwa tych stanów przez

$$(\psi\varphi)', \; (\psi\varphi)'', \text{ i t. d.}$$

Prawdopodobieństwo p, że układ przechodzi od stanu $(q, q')_0$ do stanu $(q, q')_1$, nie omijając żadnego z pośrednich $(q, q')'$, $(q, q')''$, i t.d. i w oznaczonym porządku, będzie iloczynem

$$p = (\psi\varphi)_0 . (\psi\varphi)' . (\psi\varphi)'' . \ldots . (\psi\varphi)_1 .$$

Owóż, szereg stanów pośrednich $(q, q')'$, $(q, q')''$, i t. d. sprowadzający prawdopodobieństwo p do maximum, odpowiada oczywiście układowi najprawdopodobniejszemu w czasie od t_0 do t_1. Lecz że logarytmując wyrażenie p, mamy również oczywiście:

$$\lg p = \frac{1}{\partial t} \int_{t_0}^{t_1} \partial t . \lg (\psi\varphi),$$

przeto, wyznaczywszy warunki maximum całki

$$P = \int_{t_0}^{t_1} \partial t . \lg (\psi\varphi)$$

w założeniu, że stany układu krańcowe $(q, q')_0$ i $(q, q')_1$ są niezmienne, otrzymamy warunki najprawdopodobniejszego układu w czasie od t_0 do t_1. Zadanie więc nasze sprowadziło się do poszukiwania warunków maximum całki P.

4. Warunkiem koniecznym maximum całki P jest, jak wiadomo:

$$\delta P = \int_{t_0}^{t_1} \partial t \sum \left\{ \left(\frac{\partial \lg \psi}{\partial q} + \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q} \right) \delta q + \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \frac{d\delta q}{dt} \right\} = 0, \tag{1}$$

gdzie dla prostoty pisania opuściliśmy znaczki przy q i q'.

Całkując przez części, otrzymuje się łatwo:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \frac{d\delta q}{dt} \partial t = \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \delta q \right)_1 - \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \delta q \right)_0 - \int_{t_0}^{t_1} \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \right) \partial t.$$

Ponieważ jednak na granicach całkowania stany układu $(q, q')_0$ i $(q, q')_1$ są z założenia niezmienne, przeto $(\delta q)_0 = 0$, $(\delta q)_1 = 0$, i jest tylko

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \frac{d\delta q}{dt} \partial t = - \int_{t_0}^{t_1} \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \right) \partial t.$$

Uwzględniając to w równaniu (1), mieć będziemy:

$$\delta P = - \int_{t_0}^{t_1} \partial t \sum \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \right) - \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q} - \frac{\partial \lg \psi}{\partial q} \right\} \delta q = 0;$$

a z przyczyny dowolności δq:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \right) - \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q} - \frac{\partial \lg \psi}{\partial q} = 0. \tag{2}$$

Dopisując zatém w równaniu (2), przy q i q', znaczki: $1, 2, \ldots, n$, otrzymamy układ n równań, przedstawiający warunki *konieczne* najprawdopodobniejszego układu.

5. Pomnóżmy teraz obie strony równania (2) przez $dq = q' \partial t$; i całkujmy je względem t. Z uwagi na równość

$$\int q' d \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \right) = q' \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} - \int \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} dq',$$

wynikiem tego całkowania będzie:

$$q' \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} - \int \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} dq' + \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q} dq \right) - \int \frac{\partial \lg \psi}{\partial q} dq = \text{stała}. \tag{3}$$

Lecz z założenia mamy:

$$d \lg \varphi = \sum \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} dq' + \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q} dq \right), \quad d \lg \psi = \sum \frac{\partial \lg \psi}{\partial q} dq;$$

więc sumując wszystkie równania postaci (3) stronami odpowiedniemi, znajdziemy łatwo:

$$\lg (\psi \varphi) = H + \sum q' \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'},$$

gdzie H oznacza stałą.

Ten wynik przywodzi całkę P do postaci

$$P = H (t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \partial t \sum q' \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'},$$

z któréj wyprowadzamy wniosek następujący: Warunkiem *koniecznym i dostatecznym* najprawdopodobniejszego układu w czasie od t_0 do t_1, jest, łącznie z układem n równań postaci (2), maximum całki

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \partial t \sum q' \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'}.$$

Zobaczmy, jak się to wiąże z wynikami doświadczenia.

Związek z zasadą najmniejszego działania.

6. W obecnym stanie wiedzy przyjmuje się powszechnie, że stosunki międzyczęściowe wszechświata wyrażają się przez stosunki jego części materyalnych z przestrzenią, a te uważają się znowu jako współrzędne punktów, które składają układ poruszający się bezwzględnie. Ażeby więc wyniki otrzymane powyżéj zastosować w naturze, należy je utożsamić z odpowiedniemi wynikami mechaniki, jako nauki opartéj na doświadczeniu.

Jeżeli T jest siłą żywą, U—funkcyą sił, a współrzędne punktów składających układ—funkcyami n elementów q, wówczas jak wiadomo (równania Lagrange'a), warunki ruchu zawierają się w n równaniach postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} = 0. \tag{4}$$

Owóż z uwagi, że siła żywa T zależy od elementów q i prędkości q', a funkcya sił U — tylko od elementów q, równanie (4) jest oczywiście analogiczne z (2). Z przyczyny więc równoważności stosunków międzyczęściowych wszechświata ze współrzędnemi punktów układu, równania (4) i (2) powinny być nawet tożsame, jeżeli chcemy aby uważany układ był najprawdopodobniejszy ze wszystkich. Wypada zatém położyć:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} \right) &= \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'} \right), \\ \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q} &= \lambda \frac{\partial T}{\partial q}, \\ \frac{\partial \lg \psi}{\partial q} &= \lambda \frac{\partial U}{\partial q}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

gdzie λ oznacza stałą.

Pierwsze z równań (5) daje:

$$\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial q'} - k\right), \tag{6}$$

rozumiejąc przez k stałą; równanie zaś (6) łącznie z drugiém (5) prowadzi do związku

$$d \lg \varphi = \lambda (d T - \Sigma k\, dq'),$$

z którego wynika:

$$\lg \varphi = \lambda (T - \Sigma k q') + \text{stała}.$$

Z trzeciego wreszcie równania (5) mamy:

$$\lg \psi = \lambda U + \text{stała}.$$

Uwzględniając te wyrażenia $\lg \varphi$ i $\lg \psi$ i oznaczając przez g stałą dowolną, mamy:

$$\psi\varphi = g e^{\lambda (T+U-\Sigma k q')}$$

Lecz że żadna z prędkości q' nie może być nieskończenie wielką, przeto dla $q' = \pm \infty$, powinno być $\psi\varphi = 0$. Z przyczyny zatém, że T jest funkcyą dodatnią stopnia drugiego prędkości q', warunkowi temu staje się zadość tylko wówczas gdy $\lambda = -\omega^2 < 0$. Mamy więc

$$\psi\varphi = g e^{-\omega^2 (T+U-\Sigma k q')}, \tag{7}$$

a równanie (6) napisze się tak:

$$\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} = \omega^2 \left(k - \frac{\partial T}{\partial q'}\right).$$

Równanie to, z powodu że T jest funkcyą jednorodną prędkości q' prowadzi do związku

$$\sum q' \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'} = \omega^2 (\Sigma k q' - 2T),$$

który całce Q nadaje postać:

$$Q = \omega^2 \left\{ (\Sigma k q)_1 - (\Sigma k q)_0 - \int_{t_0}^{t_1} 2 T \partial t \right\}.$$

Owóż $T > 0$; więc maximum Q wymaga oczywiście minimum całki

$$\int_{t_0}^{t_1} 2 T \partial t,$$

które, łącznie z układem n równań postaci (4), wyraża, jak wiadomo, zasadę

najmniejszego działania. Otrzymaliśmy zatém:

Twierdzenie. *Ze wszystkich układów możliwych najprawdopodobniejszy jest ten, w którym spełnia się zasada najmniejszego działania.*

7. Z twierdzenia tego wynika, że zamiast najmniejszego działania, można postawić na czele zasadę najprawdopodobniejszego układu, o wiele racyonalniejszą. Ponieważ warunki konieczne spełniania się téj zasady są w gruncie równaniami ruchu; przeto pojęcie siły, nieodzownie potrzebne dla ustanowienia tych ostatnich, staje się tylko przechodniém. Wreszcie, w tym nowym porządku uważania rzeczy, możliwym być może nowy zupełnie szereg doświadczeń, na podstawie którego dałoby się wyznaczyć funkcye φ i ψ, lub przynajmniéj funkcyą φ, bez uciekania się do pojęcia siły. Przedmiot ten jednak nie wchodzi w zakres niniejszéj pracy.

Układ wolny.

8. Warunki ruchu (4) prowadzą wiadomym sposobem do równania sił żywych:

$$T - U = \text{stała}.$$

Uwzględniając je w (7) i oznaczając przez h stałą różną od g, będzie

$$\psi\varphi = h e^{-\omega^2 (2T - \Sigma k q')} \tag{8}$$

Stałą h wyznacza się z warunku, że jeden z możliwych stanów układu jest konieczny. Oznaczając zatém przez $S\psi\varphi$ sumę prawdopodobieństw $\psi\varphi$ odpowiadających wszystkim bez wyjątku stanom, otrzymamy z warunku $S\psi\varphi = 1$:

$$h = \frac{1}{S e^{-\omega^2 (2T - \Sigma k q')}}.$$

Z przyczyny że siła żywa T zależy od q i q', wyznaczenie stałéj h przedstawia wogóle wielkie trudności. Ograniczymy się zatém do układu wolnego, dla którego zadanie to rozwiązuje się łatwo.

9. W układzie wolnym elementy $q_1, q_2, \ldots, q_n$ wyobrażają współrzędne punktów. Przyjmując współrzędne prostokątne i oznaczając przez x, y, z składowe prędkości punktu posiadającego masę μ, a przez $2\mu a$, $2\mu b$, $2\mu c$ stałe analogiczne z k, do tego punktu należące, można będzie położyć:

$$2T - \Sigma k q' = \sum \mu \left\{ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \right\} - \sum \mu (a^2 + b^2 + c^2),$$

byleby sumowania po prawéj rozciągnąć tylko do tylu wyrazów, ile jest punktów w układzie.

Uwzględniając to założenie w formule (8) i kładąc:

$$i = h\, e^{\omega^2 \Sigma \mu (a^2+b^2+c^2)},$$

znajdziemy, jako prawdopodobieństwo stanu układu wolnego, wyrażenie:

$$\psi\varphi = i\, e^{-\omega^2 \Sigma \mu \left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)}. \tag{9}$$

Wyrażenie to zależy od wszystkich składowych (x, y, z) prędkości, które w tym razie same jedne określają stan układu, co właśnie ułatwia wyznaczenie stałéj i. Z uwagi bowiem, że w każdéj chwili wartość każdéj z tych składowych zawiera się z pewnością między $-\infty$ i $+\infty$, i że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 \mu (x-a)^2} \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{\omega \sqrt{\mu}},$$

znajdziemy łatwo

$$i = \left(\frac{\omega}{\sqrt{\pi}}\right)^{3m} \Pi\, (\sqrt{\mu}^3 \partial x\, \partial y\, \partial z), \tag{10}$$

gdzie m oznacza liczbę punktów układu, a $\Pi(\sqrt{\mu}^3 \partial x \partial y \partial z)$ wyraża iloczyn m czynników postaci $\sqrt{\mu}^3 \partial x \partial y \partial z$.

Uwzględniając zatém w wyrażeniu (9) formułę (10), otrzymamy prawdopodobieństwo stanu układu wolnego, pod warunkiem jednak, że

$$\int_{t_0}^{t_1} \partial t\, \Sigma \mu \left\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right\} = \text{Minimum};$$

w układzie bowiem wolnym, za równaniem sił żywych idzie zasada najmniejszego działania, a to pierwsze zachowaném zostało.

Układy jednorodne: bezwzględny i względny.

10. Jak z formuły (9) widoczna, prawdopodobieństwo $\psi\varphi$ osięga maximum, jeżeli prędkości x, y, z przyjmują odpowiednie wartości stałych a, b, c. Stałe zatém a, b, c oznaczają w ruchu bezwzględnym składowe *prędkości najprawdopodobniejszych*.

Rożne punkty układu posiadają wogóle różne prędkości najprawdopodobniejsze, i z tego powodu nazywać go będziemy układem *bezwzględnym różnorodnym*. Jeżeli więc wszystkie punkty posiadają prędkości najprawdopodobniejsze jednakie, układ nazywać się będzie *bezwzględnym jednorodnym*.

Przypuśćmy teraz, że rozważamy tylko układ bezwzględny jednorodny, i żeśmy początkowi współrzędnych nadali prędkość najprawdopodobniejszą tego

układu. Jeżeli składowe prędkości względnych oznaczymy przez x', y', z', będzie

$$x = x'+a,\quad y = y'+b,\quad z = z'+c,$$

a z formuł (9) i (10) wyniknie:

$$\psi\varphi = \left(\frac{\omega}{\sqrt{\pi}}\right)^{3m} \Pi\, (\sqrt{\mu}^3 \partial x' \partial y' \partial z') \,.\, e^{-\omega^2 \Sigma \mu (x'^2+y'^2+z'^2)} \tag{11}$$

Przyjąwszy początek osi za biegun, zastąpmy prędkości prostokątne — kulistemi. Kładąc w tym celu

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

i oznaczając przez $\partial \sigma$ element powierzchni kuli promienia jedność —prostopadły do prędkości v, mieć będziemy oczywiście

$$\partial x' \partial y' \partial z' = v^2 \partial \sigma \partial v$$

i formuła (11) przedstawi się tak:

$$\psi\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{3m} \Pi \left\{(\omega\sqrt{\mu})(v\omega\sqrt{\mu})^2 \partial \sigma \partial v\right\} . e^{-\Sigma (v\omega\sqrt{\mu})^2}. \tag{12}$$

Stąd widoczna, że prawdopodobieństwo $\psi\varphi$ osięga maximum, jeżeli za prędkości v podstawimy układ wartości, zadość czyniący m równaniom postaci:

$$v\omega\sqrt{\mu} = 1.$$

Wielkości zatém $\omega\sqrt{\mu}$ są odwrotnościami prędkości względnych najprawdopodobniejszych. A że, z przyczyny czynnika $\sqrt{\mu}$, są one różne dla różnych punktów, przeto nasz układ nazywać będziemy *względnym różnorodnym*.

Jeżeli jednak wszystkie masy μ są jednakowe, układ względny określać się będzie jedną tylko wartością prędkości najprawdopodobnieszéj, i wówczas nazywać go będziemy układem *względnym jednorodnym*.

Oznaczając tę prędkość przez α, to jest kładąc:

$$\alpha = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}},$$

formułę (12) upraszczamy w ten sposób:

$$\psi\varphi = \left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\right)^{3m} \Pi\, (v^2 \partial \sigma \partial v) \,.\, e^{-\frac{1}{\alpha^2} \Sigma v^2}. \tag{13}$$

Takie jest wyrażenie prawdopodobieństwa stanu układu względnego jednorodnego, który, z powodu, że w naturze trafiają się same tylko względności, a jednorodność odgrywa często niezmiernie ważną rolę, przedstawia też największy dla nauki interes.

Układy: izotropowy i heterotropowy.

12. Ponieważ według formuły (13), prawdopodobieństwo stanu układu względnego jednorodnego zależy od wielkości prędkości za pośrednictwem v, a od ich kierunków—za pośrednictwem $\partial\sigma$, przeto stan tego układu określa się wartościami prędkości v i elementów $\partial\sigma$. Otóż, układem *izotropowym* będziemy nazywali układ względny jednorodny taki, którego stan określić się daje samemi tylko wartościami prędkości v. Prawdopodobieństwo więc stanu układu izotropowego od elementów $\partial\sigma$ zależyć nie powinno. Ażeby je otrzymać, uważmy, że prędkość v posiadać tu może którybądź ze wszystkich kierunków w przestrzeni, a tych jest oczywiście

$$\frac{4\pi}{\partial\sigma}:$$

Szukane zatém prawdopodobieństwo będzie tyle razy większe od prawdopodobieństwa (13), ile jest jedności w iloczynie m czynników $\frac{4\pi}{\partial\sigma}$. Tym sposobem znajdziemy łatwo wyrażenie

$$\psi\varphi = \left(\frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\right)^m \Pi\,(v^2\partial v)\,.\,e^{-\frac{1}{\alpha^2}\Sigma v^2}, \tag{14}$$

jako prawdopodobieństwo stanu (v) układu izotropowego, z warunkiem oczywiście, że

$$\int_{t_0}^{t_1} \partial t\,\Sigma\,v^2 = \text{minimum}.$$

13. Aby jednak same tylko wielkości prędkości v wystarczały do zupełnego określenia stanu układu, każda z nich oczywiście powinna mieć wszystkie kierunki współcześnie (to znaczy w czasie nieskończenie krótkim). Jakże się więc dzieje, że prędkość v ma współcześnie wszystkie kierunki w przestrzeni?

W odpowiedzi na to zauważmy najprzód, że prędkość w ruchu zwyczajnym, podpadającym pod nasze zmysły, posiada przez czas nieskończenie krótki ∂t kierunek stały elementu drogi; tu zaś ma się zupełnie inaczéj w ten mianowicie sposób. Wyobraźmy sobie punkt opisujący linią łamaną, złożoną z odcinków prostych, które przebiega jednostajnie, z różnemi wszakże prędkościami. Oznaczmy długości tych odcinków przez l_1, l_2, i t. d. i przypuśćmy, że w czasie τ punkt nasz zrobił drogę $l_1 + l_2 + \ldots + l_s$; prędkością jego średnią będzie

$$v = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_s}{\tau}$$

Jeżeli założymy teraz, że droga zrobiona w czasie τ jest wielkością tego samego rzędu co τ, a liczba s—nieskończenie wielką, wówczas każdy odcinek l będzie względem drogi nieskończenie mały. A jeżeli przy tem odcinki l wyczerpują wszystkie kierunki, prędkość poruszającego się punktu wyczerpie je również w czasie τ. Należy więc tylko założyć, że τ jest nieskończenie małe, to jest $\tau = \partial t$, ażeby prędkość v posiadała współcześnie wszystkie kierunki w przestrzeni. Rozumié się tu oczywiście prędkość średnią v, gdyż zmiany rzeczywistéj, jako zachodzące wszystkie w nieskończenie krótkim czasie, wcale się zauważyć nie dają. Prędkość ta wreszcie nie może być ani zerem, ani nieskończonością; z formuły bowiem (14) wynika, że prawdopodobieństwo stanu układu staje się zerem, ile razy którakolwiek z prędkości v jest 0 lub ∞.

Droga $l_1 + l_2 + \ldots + l_s$, jako nieskończenie mała tego samego rzędu co ∂t, przedstawia w powszechném znaczeniu tego wyrazu, element linijny. Element ten jednak różny jest od zwykłego, gdyż składa się z nieskończonéj liczby odcinków prostych, nieskończenie małych rzędu drugiego i najrozmaiciéj z sobą poplątanych. O stycznéj zatém do krzywéj, z takich elementów złożonéj, mowy nawet być nie może; bo jako przedłużenie elementu jest niemożliwa, a jako przedłużenie jednego z jego odcinków—nieoznaczona.

Tak więc, rozpatrując się w układzie izotropowym, przekroczyliśmy niechcący zwykłe granice analizy nieskończonościowéj. Czy więc warto się nim zajmować, i to kosztem takich układów, dla których ta analiza wystarcza?

Na to pytanie znajdziemy odpowiedź w ustępie następującym.

14. Jeżelibyśmy przyjęli, że prędkość v posiada współcześnie nieskończenie wiele kierunków, lecz wszystkich nie wyczerpuje, wówczas, dla otrzymania prawdopodobieństwa stanu układu tę własność posiadającego, należałoby prawdopodobieństwo (13) pomnożyć przez iloczyn m czynników postaci

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\partial\sigma},$$

rozumiejąc przez ε liczbę zadość czyniącą nierównościom

$$\frac{\partial\sigma}{4\pi} \leqslant \varepsilon \leqslant 1.$$

W ten sposób otrzymuje się wyrażenie

$$\psi\varphi = \left(\frac{4\varepsilon}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\right)^m \Pi\,(v^2\,\partial v)\,.\,e^{-\frac{1}{\alpha^2}\Sigma v^2}, \tag{15}$$

jako prawdopodobieństwo stanu układu, który nazywać będziemy układem *heterotropowym*.

Owóż, stosunek prawdopodobieństwa (15) do (13), to jest:

$$(4\pi\varepsilon)^m\,\Pi\left(\frac{1}{\partial\sigma}\right)$$

jest wogóle liczbą nieskończenie wielką, a skutkiem tego układ heterotropowy jest nieskończenie prawdopodobniejszy od zwykłego; najprawdopodobniejszym zaś będzie układ izotropowy, gdyż pomieniona liczba osięga wtedy maximum

$$(4\pi)^m \,\Pi\left(\frac{1}{\partial\sigma}\right).$$

Jako więc w najprawdopodobniejszym, w układzie izotropowym, urzeczywistnia się najprawdopodobniéj większość zjawisk natury, i z téj przyczyny uważać go należy za najważniejszy.

Przeciwnie, najmniéj stosunkowo zjawisk urzeczywistniać się powinno w układzie zwykłym, po którym w coraz wyższym stopniu prawdopodobieństwa idą układy heterotropowe, począwszy od najbardziéj doń zbliżonego, aż do izotropowego włącznie.

15. Ponieważ prędkości v, wchodzące w wyrażenie prawdopodobieństwa stanu układu heterotropowego wogóle, są to prędkości średnie ze wszystkich elementu drogowego i czynią zadość zasadzie najmniejszego działania, przeto ruch zwykły, i wszystkie zjawiska dające się doń sprowadzić, pochodzą właśnie od średnich prędkości. Przyczyny więc zjawisk, nie dających się sprowadzić do ruchu zwykłego, należy szukać w nieskończenie nagłych zmianach wielkości i kierunku prędkości rzeczywistych, odbywających się w samym elemencie drogowym. Jakim zaś w szczególności zjawiskom te zmiany towarzyszą —odpowiedź na to pytanie wychodzi po za granice pracy, któréj zadaniem było udowodnić tylko zasadę najprawdopodobniejszego układu i wyciągnąć z niéj najprawdopodobniejsze wnioski.

Rozdział prędkości w układzie i formuła Maxwell'a.

16. Na zakończenie pokażemy jeszcze, jak z wyrażenia (13)

$$\psi\varphi = \left(\frac{1}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}\right)^m \Pi\,(v^2\partial\sigma\,\partial v)\, e^{-\frac{1}{\alpha^2}\Sigma v^2},$$

otrzymuje się formuła Maxwell'a.

Wyobraźmy sobie w tym celu, że w chwili t rozdzieliliśmy myślą cały układ na *grupy* punktów takie, że w każdéj poszczególe wszystkie punkty posiadają wspólną prędkość, tak co do wielkości, jak i kierunku, a różne — od grupy do grupy. Niech l', l'', i t. d. będą prawdopodobnemi liczbami punktów w grupach, którym odpowiadają prędkości v', v'', i t. d., normalne do elementów $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$, i t. d., odróżniających się tylko położeniem. Wyrażając w tych warunkach prawdopodobieństwo stanu układu $\psi\varphi$, napiszemy krótko

$$\psi\varphi = \left(\frac{\partial\sigma\,\partial v}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}\right)^m \Pi\left(e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2\right)^l,$$

gdzie

$$m = \Sigma l,$$

a znaki: iloczynu Π i sumy Σ rozciągają się tylko do tylu czynników, względnie wyrazów, ile jest wszystkich grup punktów. Oznaczmy nadto przez $\Sigma\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2$ sumę wartości funkcyi $e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2$, odpowiadających również wszystkim

grupom układu i napiszmy wyrażenie $\psi\varphi$ tak:

$$\psi\varphi = \left(\frac{\partial\sigma\,\partial v\, \Sigma\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}\right)^m \Pi\left(\frac{e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}{\Sigma\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}\right)^l,$$

gdzie oczywiście

$$\Sigma\left\{\frac{e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}{\Sigma\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}\right\} = 1.$$

Ponieważ rozdział układu na grupy nie powinien zależyć od wartości elementów, grupę oznaczających, ale od ich stosunków, przeto prawdopodobieństwo stanu układu, ze względu na ten rozdział, zależyć również powinno od tych samych stosunków. Że zaś, elementy oznaczające grupę sprowadzają się w wyrażeniu $\psi\varphi$ do jednéj funkcyi $e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2$, zatém iloczyn $\Pi\left(\frac{e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}{\Sigma\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}\right)^l$, jako zależny tylko od stosunków wartości tej funkcyi, oznacza, wyjąwszy współczynnik, prawdopodobieństwo stanu układu, dotyczące rozdziału na grupy. Aby więc to prawdopodobieństwo osięgało maximum, musi być

$$l = \frac{m\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}{\Sigma\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}.$$

Jest to zatém ogólne wyrażenie najprawdopodobniejszéj liczby punktów, posiadających prędkość v normalną do elementu $\partial\sigma$.

17. Każdéj grupie punktów, w szeregu grup posiadających daną wartość prędkości v, odpowiada różny z położenia element $\partial\sigma$. Całka zatém

$$\int_0^{4\pi\varepsilon} \partial\sigma = 4\pi\varepsilon\,,$$

w któréj ε zależy w ogóle od v i t i czyni zadość nierównościom:

$$\partial\sigma \leqslant 4\pi\varepsilon \leqslant 4\pi$$

będzie miarą kąta cielesnego, obejmującego wszystkie elementy, odpowiadające danéj prędkości v, a stosunek

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\partial\sigma}$$

będzie liczbą grup posiadających tę samą wartość prędkości v.

Owóż, liczba L punktów poruszających się z prędkością v we wszystkich $\frac{4\pi\varepsilon}{\partial\sigma}$ kierunkach jest oczywiście $\frac{4\pi\varepsilon}{\partial\sigma}$ razy większą od liczby l, i mamy

$$L = \frac{4\pi m\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2\varepsilon}{\partial\sigma\, \Sigma\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}v^2}.$$

Jeżeli więc prędkość v wyczerpuje w układzie w chwili t wszystkie wartości od v_0 do $v_1 > v_0$, będzie oczywiście

$$\partial\sigma\, \Sigma\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 = \frac{1}{\partial v} \int_{v_0}^{v_1}\int_{0}^{4\pi\varepsilon} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 \partial\sigma\, \partial v = \frac{4\pi}{\partial v}\int_{v_0}^{v_1} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 \varepsilon \partial v,$$

a tém samém

$$L = \frac{m\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2\, \varepsilon\, \partial v}{\int_{v_0}^{v_1} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2\, \varepsilon\, \partial v} \tag{16}$$

Takie jest najogólniejsze wyrażenie liczby L, w przypadku gdy liczba m jest nieskończenie wielka; zależy ona od funkcyi nieznanéj ε, i, jako taka, wyznaczyć się w ogóle nie daje. W razie jednak gdy ε od v nie zależy, będzie

$$L = \frac{m\, e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2\, \partial v}{\int_{v_0}^{v_1} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2\, \partial v} \tag{17}$$

a gdy nadto prędkość v wyczerpuje wszystkie wartości od 0 do ∞, będzie jeszcze

$$L = \frac{4\, m e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2\, \partial v}{\alpha^3 \sqrt{\pi}}, \tag{18}$$

to jest formuła M a x w e l l'a.

18. Otrzymaliśmy zatém trzy formuły: w (16) i (17) liczba L zależy od v i t, co wskazuje na zmienność stanu układu; w (17) (jeśli v_0 i v_1 od t nie zależą) i (18) zależy tylko od v, co odpowiada znowu trwałości tego stanu.

W gazach więc, jako układach blizkich osięgnięcia stanu trwałego, należałoby stosować raczej formułę (17) niż (18). Jakoż, niezależnie nawet od tego, czy energja cynetyczna $\frac{1}{2}\Sigma v^2$ jest stała, jak to przyjmują dla gazów, czy nie jest, układ, przechodząc różne stany, zmierza oczywiście do najprawdopobniejszego (*max.* $\psi\varphi$), który, jako taki, jest najtrwalszy. Że zaś *max.* $\psi\varphi$ następuje dopiero wówczas, gdy za wszystkie prędkości v podstawimy najprawdopodobniejszą α, przeto prędkości w układzie, a tém samém i granice całkowania v_0 i v_1, w formule (17), dążą ostatecznie do wyrównania się, a liczba L do m. Tym czasem w formule (18) prędkości graniczne są: 0 i ∞, co odpowiada stanowi układu najodleglejszemu od najprawdopodobniejszego.

Warszawa, w sierpniu 1888 r.