O PRAWDOPODOBIEŃSTWIE BŁĘDOW PRZYPADKOWYCH

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Gauss, jak wiadomo, dał w 1809 roku prawo prawdopodobieństwa błędów przypadkowych, prawo, które do dziś dnia jest jedyną podstawą wszelkiego rodzaju obliczeń w tej dziedzinie. Jakkolwiek sam Gauss nie przyznawał nigdy swemu prawu ścisłości matematycznéj, a nawet odmawiał mu wyraźnie pewności, wszelako współcześni i następcy jego, nie wyłączając nawet samego Laplace'a, robili wysiłki dla udowodnienia tego prawa, w nadziei zapewne, że to jest w gruncie możliwe.

Przed kilku laty, z powodu zamiaru przygotowania krótkiego wykładu metody najmniejszych kwadratów, ta sama kwestya stała się przedmiotem moich rozmyślań, które, chociaż nie doprowadziły mnie do zupełnego wyznaczenia formuły dokładniejszéj od formuły Gauss'a, pozwoliły przynajmniéj określić warunki, przy których ta ostatnia może być dokładną. Zajęty innemi, byłbym może o kwestyi tej zapomniał zupełnie, gdyby nie komunikacye p. Bertrand'a w Sprawozdaniach Akademii Umiejętności paryskiéj z tego roku.[1]) Widząc, że około téj saméj kwestyi w nich chodzi, a mimo to wcale jéj nie rozstrzyga, postanowiłem ogłosić poglądy moje, które, jak mi się przynajmniéj zdaje, rozstrzygają ją stanowczo.

Rozumuję w ten sposób.

Gdybyśmy, w wykonywaniu wszelkich pomiarów, zmuszeni byli, dla jakiéjbądź przyczyny, do poprzestania na jednorazowém tylko mierzeniu wszystkiego, wówczas nie mielibyśmy, ani nawet miéć mogli żadnego wyobrażenia o błędzie.

[1]) „Comptes Rendus"—16 Janvier et 27 Fevrier 1888.

Pojęcie zatem błędu łączy się ściśle z wykonaniem przynajmniéj dwóch mierzeń téj saméj rzeczy, a prawdopodobieństwo popełnienia go powinno być conajmniéj, funkcyą wielkości dwóch możliwych błędów, po sobie następujących.

Jeżeli oznaczymy, w myśl téj zasady, przez a i b dwie dostrzeżone miary téj samej rzeczy, której wielkością możliwą jest x, to wielkościami błędów możliwych będą:

$$x - a, \; x - b,$$

a prawdopodobieństwem p ich popełnienia:

$$p = f\,(x - a, x - b).$$

Ze wszystkich wartości x najprawdopodobniejszą jest oczywiście ta która sprowadza p do maximum, od którego począwszy p stale maleje. Ta zatém wartość zadość czynić powinna przedewszystkiém równaniu:

$$\frac{dp}{dx} = f'\,(x - a, \; x - b) = 0.$$

Ogólnie mówiąc, równanie $\frac{dp}{dx} = 0$ posiadać może także pierwiastki wspólne z równaniem $p = 0$. Lecz że pierwiastkom tym odpowiadają błędy $x - a$, $x - b$, których prawdopodobieństwo p jest zerem, czyli błędy niemożliwe, przeto wartości x, sprawdzające oba równania $\frac{dp}{dx} = 0$ i $p = 0$, jako należące do kategoryi niemożliwych, z zadania naszego wyłączamy. Aby zaś to wykonać, to jest, przeciwko pomienionym pierwiastkom się zabezpieczyć, należy z równań $\frac{dp}{dx} = 0$ i $p = 0$ wyrugować czynnik wspólny, lub, co na jedno wychodzi, zamiast $\frac{dp}{dx} = 0$, uważać równanie:

$$(1) \qquad \frac{1}{p}\,\frac{dp}{dx} = \frac{f'\,(x - a, x - b)}{f\,(x - a, \; x - b)} = 0,$$

w którém oczywiście tego czynnika już nie ma.

Z równania (1) wynika, że x, a tém samém $x - a$ i $x - b$ są funkcyami zmiennych a i b. Że zaś między $x - a$ i $x - b$ zachodzi związek (1), od a i b niezależny, przeto ich wyznacznik funkcyjny powinien być zerem, to jest:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} - 1, & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial x}{\partial b} - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

W rozwinięciu tegóż znajdujemy równanie różniczkowe częściowe:

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial b} = 1,$$

którego całką jest:

$$x = \frac{a + b}{2} - \tfrac{1}{2}\,\varphi\,(b - a), \text{ [1]}$$

rozumiejąc przez $\varphi\,(b - a)$ funkcyą dowolną zmiennéj $b - a$.

Przypuśćmy teraz, żeśmy wyznaczyli funkcyą φ w ten sposób, aby x było najprawdopodobniejszą miarą uważanéj rzeczy. Wówczas pisząc całkę powyższą pod postacią:

$$(x - a) + (x - b) + \varphi\,[(x - a) - (x - b)] = 0,$$

powinniśmy otrzymać równanie tożsame z (1), i tylko jedno. Stąd mamy:

$$(2) \qquad \frac{d \lg p}{dx} = \lambda \left\{ (x - a) + (x - b) + \varphi[(x - a) - (x - b)] \right\}$$

rozumiejąc przez λ stałą, i następnie:

$$\frac{d^2 \lg p}{dx^2} = 2\lambda$$

Warunek przeto maximum p wymaga, aby było $\lambda = -2k^2 < 0$. Wskutek tego z (2) znajdujemy:

$$p = He^{-k^2\left(\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)\varphi(\alpha - \beta)\right)}\;\partial\alpha\,\partial\beta,$$

gdzie dla krótkości:

$$\alpha = x - a, \quad \beta = x - b,$$

a $H d\alpha\, d\beta$ oznacza czynnik stały.

Tym sposobem dla n par błędów:

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_n, \beta_n),$$

prawdopodobieństwo P będzie:

$$P = He^{-k^2\Sigma\left(\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)\varphi(\alpha - \beta)\right)}\partial\alpha_1\,\partial\beta_1\,\partial\alpha_2\,\partial\beta_2 \ldots \partial\alpha_n\,\partial\beta_n.$$

Jest to wyrażenie zawierające czynnik

$$e^{-k^2\Sigma(\alpha + \beta)\,\varphi\,(\alpha - \beta)}$$

niesymetryczny względem błędów $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$. Aby więc prawdopodobieństwo P było funkcyą symetryczną możliwych błędów, być powinno: $\varphi\,(\alpha - \beta) = 0$, i wówczas otrzymujemy znaną formułę Gauss'a:

[1] Z równania tego wynika, że $x = \sqrt{ab}$ jest niemożliwe, albowiem w razie przeciwnym musiałoby być $\varphi\,(b - a) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, co jest niedorzecznością.

$$P = H^n e^{-k^2 \Sigma(\alpha^2+\beta^2)} d\alpha_1 \, d\beta_1 \ldots d\alpha_n \, d\beta_n.$$

A zatém, *prawo* Gauss'a, *dotyczące prawdopodobieństwa błędów, jest prawdziwe tylko w tém przypuszczeinu, że szanse ich popełnienia nie zależą wcale od porządku, w jakim po sobie następują, jako téż, że liczba ich spostrzeżeń jest parzysta.* Przy takich dopiero warunkach, średnia arytmetyczna miar dostrzeżonych danego przedmiotu może być jego miarą najprawdopodobniejszą.

W nocie z d. 16 stycznia r. b., p. Bertrand wychodzi z określenia prawdopodobieństwa jednego tylko błędu, co go prowadzi do wniosku, że dwa równania:

$$F(z - x_1) + F(z - x_2) + \ldots + F(z - x_n) = o$$

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \psi(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_n)$$

powinny być tożsame. Owóż, równanie drugie daje się napisać pod postacią:

$$(z-x_1)+(z-x_2)+ \ldots +(z-x_n)-n\,\psi\,[(z-x_2)-(z-x_1),(z-x_3)-(z-x_1),\ldots,(z-x_n)-(z-x_1)] = o,$$

z któréj oczywiście wynika, że, przy wymaganéj tu jednoznaczności funkcyi ψ, może być tożsame z pierwszém tylko wówczas, gdy funkcya ψ jest zerem, lub co najwyżéj liniową względem zmiennych $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_n$.

Tym sposobem nic się nowego nie otrzymuje, co zapewne p. Bertrand sam zauważył, skoro w nocie następnéj, z d. 26 lutego r. b., tę samę kwestyą traktuje na nowo i inaczéj. Lecz i tu pokazał tylko, że formuła Gauss'a

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \Delta}$$

nie jest wyrażeniem prawdopodobieństwa błędu Δ, co, zdaje się, było już wiadomém; ale natomiast nie uzasadnił wcale swego domniemania, jakoby prawdopodobieństwo błędu Δ powinno zależyć nie tylko od Δ, ale i od wielkości X, przy mierzeniu której błąd popełniamy. Takie uważanie prawdopodobieństwa błędu, jako funkcyi $\psi(X, \Delta)$, nie wydaje mi się zgodném z naturą rzeczy, choćby dla tego, że tu właściwie idzie o ten tylko koniec wielkości mierzonej X, który się obserwuje, bo przy nim tylko błąd się popełnia. Gdyby więc np. pewna miara l mieściła się w X razy m i jakiś ułamek, powinno by być:

$$\varphi(X, \Delta) = \varphi(X - l, \Delta) = \varphi(X - 2l, \Delta) = \ldots = \varphi(X - ml, \Delta),$$

i to całkiem niezależnie od wyboru miary l. Prawdopodobieństwo zatém błędu Δ od X zależyć nie może.

Warszawa, w maju 1888 r.

WŁASNOŚCI I NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA WROŃSKIANÓW.

PODAŁ

S. DICKSTEIN.

W historyi wyznaczników, pomiędzy matematykami, którym teorya ta już to powstanie, już to rozwój swój zawdzięcza [1]), pomijano dotąd nazwisko Hoene-Wrońskiego, lubo on jeszcze przed Cauchy'm[2]) używał w dziełach swoich wyrażeń wyznacznikowych, nazwanych przez siebie funkcyami *schin*, które stosował do wielu zagadnień analizy. Mimo dzieła Schweins'a[3]), zawierającego mnóstwo twierdzeń podanych przez Wrońskiego, mimo dzieła Montferriera [4]), streszczającego najważniejsze pomysły matematyczne naszego ziomka, uczeni o odkryciach Wrońskiego nie wiedzieli, i często

---

[1]) Co do historyi wyznaczników patrz Baltzer „Theorie und Anwendung der Determinanten", Wydanie czwarte, Lipsk 1875.; Günther: „Lehrbuch der Determinanten, Handbuch für Studirende", Erlangen 1875; Władysław Trzaska (Kretkowski): „Krótkie wiadomości o wyznacznikach", (Przypisek do dzieła: „Zasady rachunku różniczkowego" W. Folkierskiego); M. A. Baraniecki „Teorya wyznaczników" Paryż, 1879. Określenie funkcyj *schin* podane na str. 473 tego dzieła, jest niedokładném.

[2] Cauchy'ego rozprawa „Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales etc." została przedstawioną Instytutowi w dniu 30 listopada 1812, gdy tymczasem Wrońskiemu nie był obcym ten przedmiot w pracy przedstawionéj Instytutowi w roku 1810 a wydanéj w 1812 p. t. „Refutation de la theorie des fonctions analytiques de Lagrange" gdzie znajdują się wzory zawierające funkcye *schin*. Podaję to na zasadzie twierdzenia samego Wrońskiego w późniejszém dziele: „Reforme absolue" (Tom I str. 305, Tom II, CXXII), poprzednio bowiem wymienionej rozprawy nie mam.

[3]) Schweins „Theorie der Differenzen und Differentiale, Heidelberg 1825. Dzieło to przepełnione jest wzorami i twierdzeniami Wrońskiego.

[4]) Montferrier. „Encyclopédie mathématique", Paryż. W czterech tomach, bez daty. Wyszło 1856—1859.