partielles de Fournier $s_n(\tau)$ *ont la propriété*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\int_{\alpha}^{\beta}|s_n(\tau)|\,d\tau = +\infty$$

pour tous les intervalles $\langle\alpha,\beta\rangle$.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les généralisations et combinaisons des théorèmes précédents. Il est aussi aisé de voir que la condition de continuité imposée aux $\{g_k\}$ pour simplifier nos exemples n'a pas été toujours pleinement utilisée.

Sur les fonctionnelles linéaires

publié dans Studia Math. 1 (1929), p. 211–216.

Introduction. Soit E un ensemble vectoriel(1) normé. Dans ce qui va suivre nous désignerons par $x, y, z, \ldots$ des éléments de E et par $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des nombres réels.

Un ensemble $G(\subset E)$ sera dit *linéaire* lorsqu'il contient toute combinaison linéaire $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2$ de deux quelconques de ses éléments x_1, x_2. On définit une fonctionnelle $f(x)$ dans G, en faisant correspondre à chaque élément x de G un nombre réel $\xi = f(x)$. Nous dirons que la fonctionnelle $f(x)$ est *linéaire* si

1° elle est additive, c'est-à-dire $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ pour tout $x_1 \subset G, x_2 \subset G$,

2° elle est continue, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ $(x_n \subset G, x \subset G)$ entraîne toujours $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

On prouve aisément qu'il existe alors un nombre $M > 0$, de sorte que

$$|f(x)| \leqslant M\|x\|$$

pour tout $x \subset G$. Le plus petit possible des nombres M est dit la *norme* de $f(x)$ dans G. Nous la désignons par $\|f\|_G$ ou bien simplement par $\|f\|$, si $G = E$. On a donc

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_G\cdot\|x\| \qquad (x \subset G).$$

§ 1. THÉORÈME 1. *Soit G un ensemble linéaire et y_0 un élément d'E non contenu dans G. Nous désignons par G' l'ensemble formé par tous les*

(1) L'ensemble E est dit *vectoriel* lorsque pour ses éléments sont définies les opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel, conformément aux règles d'algèbre. Un ensemble vectoriel est dit *normé* lorsqu'à tout son élément x est attribué un nombre réel, désigné par $\|x\|$ — la *norme* de cet élément, de manière que: 1° $\|x\| > 0$ pour tout $x \neq \theta$; $\|\theta\| = 0$, le symbole θ désignant l'élément *nul* (module d'addition), 2° $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ pour tout α réel, 3° $\|x_1+x_2\| \leqslant \|x_1\|+\|x_2\|$. La suite $\{x_n\}$ des éléments d'un ensemble vectoriel normé est, par définition, *convergente* vers l'élément x lorsque $\lim\limits_{n\to\alpha}\|x_n - x\| = 0$. Pour une exposition detaillée voir S. Banach [7] [ce volume, p. 305–348].

$x+\alpha y_0$ $(x \subset G, \alpha$ *réel*), *évidemment linéaire et contenant* G. *Soit* $f(x)$ *une fonctionnelle linéaire définie dans* G. *Il existe alors une fonctionnelle linéaire* $\varphi(x)$ *définie dans* G', *telle que*

1° $\varphi(x) = f(x) \quad (x \subset G)$,

2° $\|\varphi\|_G = \|f\|_G$.

Démonstration. On peut évidemment supposer que $\|f\|_G = 1$. On a, pour $x_1 \subset G, x_2 \subset G$,

$$f(x_2-x_1) \leqslant \|x_2-x_1\| = \|x_2+y_0-y_0-x_1\| \leqslant \|x_2+y_0\|+\|x_1+y_0\|,$$

donc

$$-\|x_1+y_0\|-f(x_1) \leqslant \|x_2+y_0\|-f(x_2). \tag{1}$$

Soit m la borne supérieure des nombres $-\|x_1+y_0\|-f(x_1)$ et M la borne inférieure des nombres $\|x_2+y_0\|-f(x_2)$. Les nombres m, M sont finis en vertu de (1) et on a $m \leqslant M$. Soit λ un nombre, satisfaisant à l'inégalité

$$m \leqslant \lambda \leqslant M, \tag{2}$$

d'ailleurs quelconque.

Nous posons par définition

$$\varphi(x+\alpha y_0) = f(x)+\alpha\lambda \quad (x \subset G,\ \alpha \text{ réel}).$$

On voit aisément que la fonctionnelle $\varphi(z)$, ainsi définie(²) dans G', est additive et que $\varphi(z) = f(z)$ $(z \subset G)$. On a pour $\alpha \neq 0$ (en vertu de (1), (2)):

$$-\left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|-f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqslant \lambda \leqslant \left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|-f\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

d'où

$$\left|f\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\lambda\right| \leqslant \left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|,$$

ou bien

$$|f(x+\alpha\lambda)| \leqslant \|x+\alpha y_0\|,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(z)| \leqslant \|z\| \quad (z \subset G').$$

On a donc:

$$\|\varphi\|_{G'} = 1 = \|f\|_G.$$

(²) L'élément y_0 n'appartenant pas à G, un élément z de G' n'admet qu'une seule représentation $z = x+\alpha y_0$. La définition de $\varphi(z)$ est donc univoque.

Théorème 2. *G étant un ensemble linéaire et $f(x)$ une fonctionnelle linéaire définie dans* G, *il existe une fonctionnelle linéaire* $\varphi(x)$, *définie dans* E, *telle que*

$$\varphi(x) = f(x) \quad (x \subset G),$$

$$\|\varphi\| = \|f\|_G.$$

Démonstration. On prouve ce théorème par induction transfinie en appliquant succesivement le théorème 1 aux éléments de l'ensemble $E-G$ (supposé bien ordonné).

Remarque. A l'aide du théorème ci-dessus on peut définir dans chaque ensemble vectoriel normé une fonctionnelle linéaire non identiquement nulle.

Soit en effet $x_0 \neq \Theta$ un élément d'E. Les éléments αx_0 forment un ensemble linéaire G. Posons $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. C'est une fonctionnelle linéaire, définie dans G, dont la norme $\|f\|_G = 1$. En vertu du théorème 2, il existe donc une fonctionnelle $\varphi(x)$, définie dans E, telle que $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ et $\|\varphi\| = 1$.

§ 2. Théorème 3. *Soient $\{x_n\}$ une suite des éléments de E, $\{c_n\}$ une suite numérique et M un nombre positif. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonctionnelle linéaire $f(x)$, remplissant les relations*

1° $f(x_n) = c_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

2° $\|f\| \leqslant M$,

est que l'on ait l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right\|$$

pour tout système fini des nombres réels λ_i (³).

Démonstration. *La condition est nécessaire.* En effet, si $f(x)$ existe, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i.$$

D'autre part,

$$\left|f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right)\right| \leqslant \|f\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right\|,$$

ce qui donne (1) en vertu de 1° et 2°.

(³) Ce théorème a été démontré pour certains ensembles particuliers par M. F. Riesz (*Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Mathematische Annalen 69 (1910), p. 449–497; *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier–Villars, 1913) et dans quelques cas plus généraux par M. Helly (Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, IIa, 121 (1912), p. 265). Notre démonstration est très simple et ne suppose sur l'ensemble E que ce qui est dit dans l'introduction. Notamment nous ne supposons pas que l'ensemble E soit complet ou séparable.

La condition est suffisante. Désignons par G l'ensemble linéaire formé par tous les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i$. Définissons une fonctionnelle $\varphi(x)$ de la manière suivante[4]: si $x = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i$, posons

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i c_i.$$

On a, en vertu de (1),

$$|\varphi(x)| \leqslant M\,\|x\|,$$

$\varphi(x)$ est donc une fonctionnelle linéaire définie dans G et $\|\varphi\|_G \leqslant M$. Par conséquent, il existe, d'après de théorème 2, une fonctionnelle linéaire $f(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées.

Remarque. On peut formuler ce théorème d'une manière plus générale que voici:

$\varphi(x)$ étant une fonctionnelle définie dans l'ensemble W (linéaire ou non), la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonctionnelle linéaire, définie dans E, et remplissant les relations

1° $f(x) = \varphi(x) \quad (x \subset W)$,

2° $\|f\| \leqslant M$,

M étant un nombre positif donné, est que l'on ait

$$\Big|\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\varphi(x_i)\Big| \leqslant M\,\Big\|\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i\Big\|,$$

quel que soit le système des r éléments x_i de W, le système des r nombres réels λ_i et l'entier positif r.

THÉORÈME 4. *G étant un ensemble linéaire et y_0 un élément, dont la distance à G est $d > 0$, il existe une fonctionnelle linéaire $f(x)$, définie dans E, remplissant les équations*

1° $f(x) = 0 \quad (x \subset G)$,

2° $f(y_0) = 1$,

3° $\|f\| = 1/d$.

Démonstration. Désignons par G' l'ensemble linéaire formé par les éléments $z = x+\alpha y_0 (x \subset G, \alpha$ réel). Posons dans G':

$$\varphi(z) = \alpha. \tag{2}$$

On a pour $\alpha \neq 0$:

$$\|z\| = \|x+\alpha y_0\| = |\alpha|\,\Big\|\frac{1}{\alpha}x+y_0\Big\|.$$

[4] Cette définition est univoque, comme il résulte aisément du § 1.

Comme l'élément $\frac{1}{\alpha}x$ appartient à G, on a par l'hypothèse

$$\|z\| \geqslant |\alpha|\cdot d,$$

donc, en vertu de (2),

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{1}{d}\,\|z\|$$

et

$$\|\varphi\|_{G'} \leqslant \frac{1}{d}. \tag{3}$$

On a, par définition,

$$\varphi(x+y_0) = 1 \qquad (x \subset G)$$

donc, en vertu de (3),

$$1 \leqslant \|\varphi\|_{G'}\cdot\|x+y\| \leqslant \frac{1}{d}\,\|x+y\|. \tag{4}$$

La distance de y_0 et G étant d, il existe dans G une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_0\| = d.$$

L'inégalité (4), appliquée à cette suite, donne

$$1 \leqslant \|\varphi\|_{G'}\cdot d \leqslant 1$$

ou

$$\|\varphi\|_{G'} = \frac{1}{d}.$$

D'après le théorème 2, il existe donc une fonctionnelle satisfaisant aux conditions demandées.

THÉORÈME 5. *Si G est un ensemble linéaire fermé tel que toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ égale à 0 pour tout x de G est égale à 0 pour tout x, alors*

$$G \equiv E.$$

THÉORÈME 6. *Soit W un ensemble arbitraire $\subset E$ et y_0 un élément qui n'y appartient pas. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une suite $\{w_n\} \subset E$, remplissant les relations*

1° $w_n = \sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^{(n)}x_i \quad (x_i \subset W)$,

2° $\lim_{n\to\infty} w_n = y_0$,

est que l'on ait $f(y_0) = 0$, pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans E et identiquement nulle dans W.

Démonstration. On l'obtient aisément à l'aide du théorème 4 appliqué à l'ensemble linéaire G formé par tous les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$ ($x_i \subset W$, α_i nombres réels).

(Reçu par la Rédaction le 28. IV. 1929)

Sur les fonctionnelles linéaires II *

publié dans Studia Math. 1 (1929), p. 223–239.

§ 1. Soient $\{\sigma_n\}$ $(\sigma_1 = 1)$ une suite numérique à termes positifs croissant indéfiniment et $\{a_n\}$ une suite des éléments telle que $\|a_n\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. $f(x)$ étant une fonctionnelle linéaire, nous désignerons, dans ce qui va suivre, par $\|f\|^*$, le plus petit nombre positif K pour lequel

$$|f(a_n)| \leqslant K\sigma_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nous dirons que $\|f\|^*$ est la *norme* de f relative aux suites $\{\sigma_n\}$, $\{a_n\}$.

On a évidemment

1° $\|f\|^* \geqslant 0$,

2° $\|\alpha f\|^* = |\alpha| \cdot \|f\|^*$ (α réel),

3° $\|f+\varphi\|^* \leqslant \|f\|^* + \|\varphi\|^*$,

4° $\|f\|^* \leqslant \|f\|$.

De même, $z = \{\zeta_n\}$ étant une suite bornée des nombres réels, nous désignerons par $\|z\|^*$ le plus petit nombre K pour lequel $|\zeta_n| \leqslant K\sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dans ce qui va suivre nous supposons toujours que l'ensemble des elements E est véctoriel, normé et complet ([10]).

Lemme 1. *Soit L un ensemble linéaire*([1]) *des fonctionnelles linéaires. Supposons qu'à chaque fonctionnelle de L correspond un nombre $A(f)$ remplissant les relations:*

$$A(f_1+f_2) = A(f_1)+A(f_2),$$
$$|A(f)| \leqslant M\|f\|^*,$$

M étant une constante positive. Il existe alors un élément x_0 tel que

$$\|x_0\| \leqslant M, \quad A(f) = f(x_0) \quad (f \subset L).$$

---

* Voir S. Banach [22] [ce volume, pp. 375–380]. Cette communication sera citée dans la suite comme „I".

([1]) Un ensemble L de fonctionnelles linéaires est dit *linéaire* lorsqu'il contient toute combinaison linéaire à coefficients réels de deux quelconques de ses fonctionnelles.