

fonction  $f$  de carré sommable  $U(f) = f$ . Donc  $U(F) = F$ . Mais cette relation est contradictoire avec (3). Le théorème est donc démontré <sup>(7)</sup>(<sup>8</sup>).

3° Si la fonction  $K(s, t, \lambda)$  mesurable est définie pour  $0 \leq t \leq 1$ ,  $1 \leq \lambda < \infty$  et telle que

$$|K(s, t, \lambda)| \leq M_\lambda(s),$$

où  $M_\lambda(s)$  est une fonction finie presque partout dépendante de  $s$  et  $\lambda$  mais indépendante de  $t$ , la fonctionnelle

$$U_\lambda(f) = \int_0^1 K(s, t, \lambda) f(t) dt$$

est bien définie, continue en mesure dans le champ des fonctions sommables, et remplit la condition de la remarque de paragraphe 2.

4° Je veux indiquer encore une chose assez curieuse. Des théorèmes du paragraphe 2 on peut facilement conclure l'existence de fonction continue n'ayant pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive. En effet, posons

$$U_n(x) = \frac{x(t + \lambda_n) - x(t)}{\lambda_n},$$

$\{\lambda_n\}$  étant une suite de nombres positifs tendant vers zéro.

Si nous supposons que chaque fonction  $x(t)$  continue admet une dérivée, on aurait

$$x'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = U(x)$$

presque partout.

Donc  $x'(t) = U(x)$  serait continue en mesure. Mais la suite  $\left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$

montre que  $U(x)$  n'est pas continue en mesure, car  $\left\{ \frac{\sin n\lambda}{n} \right\}$  tend uniformément vers zéro et les dérivées  $\{\cos nx\}$  ne tendent pas en mesure vers zéro. Donc, d'après le théorème III (§ 2), il existe une fonction continue  $x(t)$  pour laquelle

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x(t + \lambda_n) - x(t)}{\lambda_n} = \infty$$

dans un ensemble de mesure positive.

<sup>(7)</sup> Steinhaus a publié un exemple du développement presque partout divergent d'une fonction sommable [An example of a thoroughly orthogonal divergent development, Proc. London Math. Soc. (2) 20 (1922), p. 123-126]. Kolmogoroff a trouvé une fonction sommable dont la série de Fourier est presque partout divergente [Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout], Fundamenta Mathematicae 4 [(1913), p. 324-328].

<sup>(8)</sup> On peut énoncer le pareil théorème pour divers procédés sommatoires.

## Sur le principe de la condensation de singularités

publié en commun avec H. Steinhaus dans Fund. Math. 9 (1927), p. 50-61.

Hankel a donné le nom du *principe de condensation de singularités* à une méthode que l'on rencontre dans beaucoup de raisonnements mathématiques et qui consiste en ce que l'on construit un objet jouissant d'une infinité des singularités à partir des objets (en nombre infini) qui n'ont chacun qu'une seule singularité.

Cette méthode exigeant chaque fois des artifices nouveaux, notre but est de remplacer ces artifices par deux théorèmes du calcul fonctionnel; ce sont les théorèmes I et II du § 2. Le § 1 est consacré aux définitions des certaines notions du calcul fonctionnel; nous n'aurons d'ailleurs à nous occuper que des fonctionnelles linéaires. Pour montrer comment on applique les théorèmes en question sans recourir aux raisonnements spéciaux, nous avons choisi la théorie de séries orthogonales; ces exemples constituent le § 3. Il faut constater que la théorie de fonctions réelles et complexes et la théorie des équations fonctionnelles fournit aussi beaucoup d'exemples où notre méthode conduit aux théorèmes connus et inconnus.

M. Saks ayant lu notre manuscrit a remarqué que les démonstrations du § 2 admettent des simplifications considérables. Nous avons donc abandonné notre propre texte du § 2 en y substituant le texte de M. Saks. De cette manière nous avons évité certains calculs assez laborieux.

### § 1.

Soit  $D$  un espace 1° vectoriel, 2° métrique et 3° complet. Nous entendons par là

1° que les éléments de cet espace — qui seront désignés par des petites lettres latines — obéissent aux lois ordinaires de l'algèbre en ce qui concerne leur addition mutuelle et leur multiplication par des nombres réels — désignés par des lettres grecques — ces deux opérations étant toujours possibles et conduisant toujours aux éléments de  $D$ ,

2° qu'à tout élément  $e$  de  $D$  il correspond un nombre non-négatif  $\|e\|$  appelé *norme de  $e$* , aux propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\|a+b\| &\leq \|a\| + \|b\|, \\ \|\lambda a\| &= |\lambda| \cdot \|a\|, \\ \|a\| = 0 &\text{ équivaut à } a = \theta,\end{aligned}$$

$\theta$  étant l'élément nul existant en vertu de l'hypothèse 1° et satisfaisant aux égalités  $a+\theta = a$ ,  $0 \cdot a = \theta$ ,

3° que la relation

$$(R) \quad \lim_{p, q \rightarrow \infty} \|a_p - a_q\| = 0$$

implique l'existence d'un élément  $a$  de  $D$  tel que

$$(L) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \|a - a_p\| = 0.$$

Au lieu de (L) on écrit aussi

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a_p = a$$

et au lieu de (R) on dit que „ $\{a_n\}$  est une suite convergente”.

Soit  $C$  un autre espace vectoriel et métrique. On définit une *fonctionnelle* <sup>(1)</sup>  $u(x)$  en faisant correspondre à chaque point  $x$  d'un espace  $D$  un point  $u(x)$  de  $C$ . On appelle  $D$  le domaine et  $C$  le contredomaine de la fonctionnelle  $u(x)$ . Cette fonctionnelle sera *continue* si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = u(x);$$

elle sera *additive* si

$$u(x+y) = u(x) + u(y).$$

Pour abrégé nous dirons qu'une fonctionnelle est *linéaire* quand elle sera continue et additive. On voit que  $u(\lambda x) = \lambda u(x)$  si  $u(x)$  est linéaire. On démontre aussi sans peine qu'à toute fonctionnelle linéaire  $u(x)$  il correspond un nombre  $N$  tel que

$$\|u(x)\| \leq N \|x\| \quad (x).$$

Désignons par  $M$  le moindre parmi les  $N$ ;  $M$  portera le nom de la *norme de la fonctionnelle  $u(x)$* , en symboles

$$M = \bar{u}.$$

Etant donné un espace vectoriel et métrique, on dit qu'un ensemble situé dans cet espace est *partout dense* s'il admet des points communs avec

chaque sphère: une *sphère* est définie par l'inégalité  $\|x-a\| \leq \rho$ ,  $a$  étant le *centre* et  $\rho$  ( $\rho > 0$ ) le *rayon* de la sphère. Un ensemble  $E_1$  est *dense dans un ensemble  $E_2$*  si toute sphère ayant à l'intérieur des points de  $E_2$  contient aussi des points de  $E_1$ . (L'intérieur de la sphère  $\|x-a\| \leq \rho$  est défini par l'inégalité  $\|x-a\| < \rho$ ). Un ensemble est *non dense* s'il n'est dense dans aucune sphère.

Un ensemble est de *1<sup>re</sup> catégorie*, s'il est la somme d'une série des ensembles non denses; il est de *2<sup>me</sup> catégorie*, s'il n'est pas de 1<sup>re</sup> catégorie. On sait que dans un espace vectoriel, métrique et complet l'ensemble complémentaire à un ensemble de 1<sup>re</sup> catégorie est partout dense. Il s'ensuit que cet ensemble est non vide et qu'il est de 2<sup>me</sup> catégorie <sup>(2)</sup>.

§ 2. LEMME 1.  $\{u_n(x)\}$  étant une suite de fonctionnelles continues, l'ensemble  $E$  de points où  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x)\|$  est finie, est la somme d'une suite d'ensembles fermés, tels que les  $\|u_n(x)\|$  aient dans chacun d'eux une borne supérieure indépendante de  $n$ .

Démonstration. Définissons

$$F_{m,n} = \bar{E} [\|u_n(x)\| \leq m] \quad (m, n),$$

$$F_m = \prod_{n=1}^{\infty} F_{m,n} \quad (m).$$

Chaque  $F_{m,n}$ , donc chaque  $F_m$ , est fermé, car les  $u_n(x)$  sont continues. Pour  $x \in F_m$  on a

$$\|u_n(x)\| \leq m \quad (n)$$

quel que soit  $n$ . D'autre part, si  $E$  est l'ensemble des  $x$  où  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x)\|$  est finie, on aura

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} F_m,$$

ce qui est la représentation annoncée.

LEMME 2. Soit  $\{u_n(x)\}$  la suite du lemme 1; si dans tout point  $x$  d'un ensemble  $H$  de 2<sup>me</sup> catégorie  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x)\|$  est finie, alors il existe une sphère dans laquelle les  $\|u_n(x)\|$  sont uniformément bornées.

Démonstration. En vertu du lemme 1,  $H$  est contenu dans une somme des ensembles fermés  $F_m$ , les  $\|u_n(x)\|$  étant uniformément bornées dans chaque  $F_m$ .  $H$  étant de 2<sup>me</sup> catégorie, il est impossible que tous les  $F_m$  soient non denses. Il y a donc un  $F_k$  qui est dense dans une certaine sphère et comme il est fermé, il la contient. Dans cette sphère on a

$$\|u_n(x)\| \leq k \quad (n).$$

<sup>(1)</sup> L'opérateur — selon la terminologie actuelle.

<sup>(2)</sup> F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, pp. 327–328, VIII.

LEMME 3. Si  $\{u_n(x)\}$  est une suite de fonctionnelles linéaires et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x)\|$  est finie dans un ensemble de la 2<sup>me</sup> catégorie, alors  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n$  est finie.

Démonstration. En vertu du lemme 2 les  $\|u_n(x)\|$  sont uniformément bornées dans une sphère et comme les  $u_n(x)$  sont linéaires, la sphère du centre  $\theta$  et du rayon 1 jouit de la même propriété.

Il existe donc un nombre  $N$  tel que  $\|x\| \leq 1$  implique

$$\|u_n(x)\| \leq N \quad (n).$$

On aura alors pour tous les  $x \neq \theta$  et tous les  $n$

$$\|u_n(x)\| = \|x\| \cdot \left\| u_n \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq N \|x\|$$

ce qui donne

$$\bar{u}_n \leq N \quad (n).$$

LEMME 4. Si une suite de fonctionnelles linéaires  $\{u_n(x)\}$  converge dans un ensemble dense dans une sphère  $K$  et si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n$  est finie, alors la suite en question converge dans tout l'espace.

Démonstration. Par hypothèse il existe un nombre positif  $N$  tel que

$$\|u_n(x)\| \leq N \|x\| \quad (x, n).$$

Soit  $a$  un point de  $K$  et  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse il existe un  $y$  dans  $K$  tel que

$$\|y - a\| \leq \frac{\varepsilon}{3N}$$

et que la suite  $\{u_n(y)\}$  est convergente. Soit alors  $p$  un nombre tel que  $m > p, n > p$  impliquent

$$\|u_m(y) - u_n(y)\| < \frac{1}{3}\varepsilon;$$

on aura pour  $m > p, n > p$

$$\begin{aligned} \|u_m(a) - u_n(a)\| &\leq \|u_m(y) - u_n(y)\| + \|u_m(a - y)\| + \|u_n(a - y)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + N \frac{\varepsilon}{3N} + N \frac{\varepsilon}{3N} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite  $\{u_n(a)\}$  est donc convergente pour tout  $a$  de  $K$  et, les  $u_n(x)$  étant linéaires, pour tous les  $a$ .

Jusqu'ici nous avons supposé seulement que l'espace où les  $u_n(x)$  de ce § ont été définis, était vectoriel et métrique; maintenant nous utiliserons aussi sa troisième propriété: qu'il est complet.

THÉORÈME I. Soit  $\{u_{pq}(x)\}$  une suite double de fonctionnelles linéaires; si à tout  $p$  il correspond un  $x_p$  tel que l'on ait

$$(1) \quad \limsup_{q \rightarrow \infty} \|u_{pq}(x_p)\| = \infty \quad (p),$$

alors il existe un  $x$  (indépendant de  $p$ ) remplissant toutes les relations

$$(2) \quad \limsup_{q \rightarrow \infty} \|u_{pq}(x)\| = \infty \quad (p).$$

Démonstration. Soit  $E_p$  l'ensemble des  $x$  où

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \|u_{pq}(x)\| < \infty.$$

Comme — par hypothèse — (1) est vérifié par certains  $x_p$ , on a

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \bar{u}_{pq} = \infty \quad (p)$$

et, suivant le lemme 3,  $E_p$  est de 1<sup>re</sup> catégorie; l'ensemble  $E = \sum_{p=1}^{\infty} E_p$  est donc aussi de la 1<sup>re</sup> catégorie. Or, la relation (2) est évidemment valable pour tous les  $p$  si  $x$  appartient à l'ensemble complémentaire à  $E$ . Cet ensemble complémentaire étant de 2<sup>me</sup> catégorie et partout dense, comme on a remarqué à la fin du § 1, le théorème est démontré.

THÉORÈME II. Soit  $\{u_{pq}(x)\}$  une suite double de fonctionnelles linéaires; si à tout  $p$  il correspond un  $x_p$  rendant divergente la suite simple  $\{u_{pq}(x_p)\}$ , alors il existe un  $x$  (indépendant de  $p$ ) qui rend divergentes toutes les suites simples  $\{u_{pq}(x)\}$ .

Démonstration. Désignons par  $E_p$  l'ensemble des  $x$  pour lesquels la suite  $\{u_{pq}(x)\}$  est convergente. Je dis que  $E_p$  est de 1<sup>re</sup> catégorie. En effet, si

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \bar{u}_{pq} < \infty,$$

$E_p$  est non dense, car, s'il était dense dans une sphère, il remplirait, d'après le lemme 4, tout l'espace, contrairement à l'hypothèse. Si — au contraire

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \bar{u}_{pq} = \infty,$$

on voit, en vertu du lemme 3, que l'ensemble  $E_p^*$  des  $x$  où  $\limsup_{q \rightarrow \infty} \|u_{pq}(x)\|$  est finie, est de la 1<sup>re</sup> catégorie; or,  $E_p$  est contenu dans  $E_p^*$ . Dans les deux cas  $E_p$ , donc  $E = \sum_{p=1}^{\infty} E_p$  est de 1<sup>re</sup> catégorie. Les  $x$  qui appartiennent à  $G =$  l'ensemble complémentaire à  $E$ , rendent évidemment divergentes toutes les suites

$$\{u_{pq}(x)\}_{q \rightarrow \infty}$$

à la fois.  $G$  étant de 2<sup>me</sup> catégorie et partout dense, la démonstration est achevée.

**Remarque.** Pour pouvoir parler de la convergence ou divergence d'une suite des fonctionnelles il faut que les „contredomains”  $C_n$  des termes  $u_n(x)$  soient identiques. Cela n'implique nullement que les contredomains correspondants aux différentes lignes d'une suite double  $u_{pq}(x)$  des fonctionnelles soient identiques: nos théorèmes I et II s'appliquent aux cas où chaque suite  $\{u_{pq}(x)\}_{q \rightarrow \infty}$  possède un contredomaine  $C_p$  dépendant de  $p$ .

§ 3. Nous aurons à nous occuper dans ce § du développement d'une fonction  $f(\tau)$  suivant les fonctions  $g_k(\tau)$  de la variable réelle  $\tau$ , les  $g_k(\tau)$  étant continues et formant un système orthogonal et normé dans l'intervalle  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

On écrira:

$$K_n(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^n g_k(\tau) g_k(\omega),$$

$$s_n(f) = s_n(\tau) = \int_{\alpha}^{\beta} K_n(\tau, \omega) f(\omega) d\omega;$$

$s_n(\tau)$  est donc la  $n$ -ième somme partielle du développement de  $f(\tau)$  suivant les  $g_k(\tau)$ .

**PREMIER EXEMPLE.** Le domaine  $D$  soit l'ensemble de toutes les fonctions  $x(\tau)$  continues pour  $\alpha \leq \tau \leq \beta$ . La somme, le produit et la norme soient définies comme il suit:

$$x + y = x(\tau) + y(\tau) \quad (\text{le signe } + \text{ au second membre a la signification ordinaire}).$$

$$\lambda x = \lambda \cdot x(\tau) \quad (\text{le signe } \cdot \text{ au second membre a la signification ordinaire}).$$

$$\|x\| = \text{maximum de } |x(\tau)| \text{ dans } \langle \alpha, \beta \rangle.$$

L'élément „nul”  $\theta$  soit donné par la fonction  $x(\tau) \equiv 0$  ( $\alpha \leq \tau \leq \beta$ ). On voit facilement que ce domaine vérifie les postulats du § 1. Pour contredomaine nous prenons l'ensemble de nombres réels, l'addition, la multiplication et l'élément nul ayant la définition ordinaire et la norme étant égale au module.

Soit  $\{\tau_p\}$  une suite de points de l'intervalle  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Définissons une fonctionnelle  $u_{pq}(x)$  par la relation

$$u_{pq}(x) = s_q(x)_{\tau=\tau_p} = \int_{\alpha}^{\beta} K_q(\tau_p, \omega) x(\omega) d\omega.$$

On vérifie sans difficulté que les fonctionnelles  $u_{pq}(x)$  sont linéaires dans  $D$ , leurs valeurs appartenant à  $C$ .

Appliquons à la suite double  $\{u_{pq}(x)\}$  les théorèmes I et II du § 2 en tenant compte de la signification de  $s_q(x)$ ; nous obtiendrons immédiatement les théorèmes suivants:

**THÉORÈME 1.** Si  $\{g_k(\tau)\}$  est un système orthogonal et normé de fonctions continues dans  $\langle \alpha, \beta \rangle$  et si à tout point  $\tau_p$  d'un ensemble dénombrable ( $\tau_p \in \langle \alpha, \beta \rangle$ ) il correspond une fonction continue dont le développement suivant les  $\{g_k\}$  est divergent au point  $\tau = \tau_p$  [la limite supérieure du module de sommes partielles étant infinie], alors il existe une fonction continue dont le développement a la même propriété par rapport à tous les points  $\tau_p$ .

**THÉORÈME 1'.** On énonce ce théorème en supprimant le contenu de la parenthèse [ ] du théorème 1.

**DEUXIÈME EXEMPLE.** Le domaine  $D$  et le contredomaine  $C$  soient définis comme dans l'exemple précédent. Supposons que l'on ait défini un ensemble dénombrable de systèmes  $\{G_p\}$  chacun étant orthogonal, normé et composé de fonctions continues. Il faut donc munir d'un indice supérieur ( $p$ ) les  $g_k(\tau)$ , les  $s_n$  et les  $K_n$  correspondants. Soit  $\tau_0$  un point de  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Définissons les fonctionnelles  $u_{pq}(x)$  comme il suit:

$$u_{pq}(x) = s_q^{(p)}(x)_{\tau=\tau_0} = \int_{\alpha}^{\beta} K_q^{(p)}(\tau_0, \omega) x(\omega) d\omega.$$

Après avoir vérifié que ces fonctionnelles sont linéaires on applique les théorèmes I et II; on obtient ainsi le

**THÉORÈME 2.** Si  $\{G_p\}$  est un ensemble dénombrable dont les éléments  $G_p$  sont des systèmes orthogonaux et normés de fonctions continues dans  $\langle \alpha, \beta \rangle$  et si à tout  $G_p$  il correspond une fonction continue dont le développement suivant  $G_p$  est divergent au point  $\tau = \tau_0$  ( $\tau_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ ) [la limite supérieure du module de sommes partielles étant infinie], alors il existe une fonction continue dont les développements ont la même propriété par rapport à tous les  $G_p$ .

**THÉORÈME 2'.** On supprime le contenu de la parenthèse [ ] dans l'énoncé du théorème 2.

**TROISIÈME EXEMPLE.** Le domaine  $D$ , le contredomaine  $C$  et le système  $\{g_k(\tau)\}$  soient définis comme dans l'exemple premier. Soit

$$(T) \begin{array}{ccccccc} \beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1k_1} & & & & & & \\ \beta_{21}, \beta_{22}, & & \dots, & \beta_{2k_2} & & & \\ \dots & & & & & & \\ \beta_{i1}, \beta_{i2}, & & & & \dots, & \beta_{ik_i} & \\ \dots & & & & & & \end{array}$$

un tableau sommatoire à lignes finies, dit „de Toeplitz”. Pour calculer „la limite généralisée” d'une suite  $\{s_n\}$  on calcule la limite ordinaire

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_i} \beta_{ik} s_k,$$

quand elle existe. On dit alors que la suite  $\{s_n\}$  devient convergente quand on lui applique le procédé (T). Quand  $s_n$  sont les sommes partielles d'une série, on dit que cette série est sommable par le procédé (T).

Pour appliquer un procédé (T) au développement d'une fonction  $x(\tau)$  suivant un système  $\{g_k(\tau)\}$ , on forme d'abord les expressions:

$$k_q(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{k_q} \beta_k K_k(\tau, \omega)$$

et puis les expressions

$$s_q[x]_{\tau=\tau_0} = \int_{\alpha}^{\beta} k_q(\tau_0, \omega) x(\omega) d\omega;$$

La sommabilité du développement de  $x(\tau)$  pour  $\tau = \tau_0$  par le procédé (T) est évidemment équivalente à la convergence ordinaire de la suite  $\{s_q[x]_{\tau=\tau_0}\}$ .

Considérons maintenant un ensemble dénombrable  $\{T_p\}$  de procédés (T). Les  $k_q$  et les  $s_q$  correspondants auront un indice supérieur  $p$ . En définissant les fonctionnelles suivantes

$$\mu_{pq}(x) = s_q^{(p)}[x]_{\tau=\tau_0} = \int_{\alpha}^{\beta} K_q^{(p)}(\tau_0, \omega) x(\omega) d\omega$$

et en se servant du théorème II, on obtient immédiatement le

**THÉORÈME 3.** Si  $\{T_p\}$  est un ensemble dénombrable de procédés sommatoires de Toeplitz,  $\{g_k(\tau)\}$  un système orthogonal et normal de fonctions continues dans  $\langle \alpha, \beta \rangle$  et  $\tau_0$  un point de  $\langle \alpha, \beta \rangle$  et si à tout procédé  $(T_p)$  il correspond une fonction continue dont le développement suivant les  $\{g_k\}$  n'est pas sommable par  $(T_p)$  au point  $\tau = \tau_0$ , alors il existe une fonction continue dont le développement suivant les  $\{g_k\}$  est — au point  $\tau = \tau_0$  — *refractaire* à tous les procédés  $\{T_p\}$ .

**QUATRIÈME EXEMPLE.** Le domaine  $D$  soit l'ensemble de toutes les fonctions  $x(\tau)$  définies et intégrables (L) dans  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . La somme et le produit soient définis comme dans le premier exemple; l'élément „nul” soit la fonction nulle presque partout. La norme soit égale à  $\int_{\alpha}^{\beta} |x(\tau)| d\tau$ .

Le contredomaine  $C$  soit défini comme  $D$  avec la seule différence qu'au lieu de  $\langle \alpha, \beta \rangle$  on prend un intervalle  $\langle \gamma, \delta \rangle$  partie de  $\langle \alpha, \beta \rangle$  ( $\alpha \leq \gamma < \delta \leq \beta$ ).

Les fonctionnelles  $u_{pq}(x)$  soient définies par la relation

$$u_{pq}(x) = s_q[x] = \int_{\alpha}^{\beta} K_q(\tau, \omega) x(\omega) d\omega,$$

$K_n$  ayant la même signification qu'au premier exemple. La dépendance de  $p$  est donnée du moment que l'on considère  $s_q[x]$ , qui est une fonction de  $\tau$  seulement dans l'intervalle  $\gamma_p \leq \tau \leq \delta_p$ .

En appliquant à la suite double  $\{u_{pq}(x)\}$  le théorème II et tenant compte de la remarque finale du § 2 on obtient le

**THÉORÈME 4.** Si  $\{g_k(\tau)\}$  est un système orthogonal et normal de fonctions continues dans  $\langle \alpha, \beta \rangle$  et si à tout intervalle  $\langle \gamma_p, \delta_p \rangle$  d'un ensemble dénombrable des intervalles il correspond une fonction intégrable  $x_p(\tau)$  dont le développement suivant les  $\{g_k\}$  a la propriété

$$(3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_p}^{\delta_p} |s_n(\tau)| d\tau = \infty,$$

alors il existe une fonction intégrable  $x(\tau)$  dont le développement a la même propriété par rapport à tous les intervalles  $\langle \gamma_p, \delta_p \rangle$ .

**Application aux séries de Fourier.** Nous avons démontré ailleurs<sup>(3)</sup> l'existence d'une fonction intégrable  $f(\tau)$  qui a la propriété exprimée par la relation

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |s_n^{(1)}(\tau)| d\tau = \infty,$$

en désignant par  $s_n^{(1)}(\tau)$  la  $n$ -ième somme partielle du développement de Fourier de  $f(\tau)$ . Il s'ensuit qu'au moins une de deux expressions

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} |s_n^{(1)}(\tau)| d\tau, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} |s_n^{(1)}(\tau)| d\tau$$

est infinie.

Supposons que c'est la première. Définissons  $f(\tau)$  pour tous les  $\tau$  par l'équation  $f(\tau + 2\tau k\pi) = f(\tau)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) et définissons une nouvelle fonction  $h(\tau)$  par l'équation

$$h(\tau) = f(\tau - \pi).$$

En désignant par  $s_n^{(2)}(\tau)$  la somme partielle correspondante à  $h(\tau)$  nous aurons évidemment

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} |s_n^{(2)}(\tau)| d\tau = \infty.$$

En procédant de la même manière on trouve pour chaque intervalle de l'ensemble  $\{\langle 2\pi i/2^j, 2\pi(i+1)/2^j \rangle\}$  ( $i = 0, 2, \dots, 2^j - 1; j = 0, 1, 2, \dots$ ) une fonction dont le développement de Fourier jouit de la propriété (3), les  $\gamma_p, \delta_p$  étant les extrémités de ces intervalles. Nous pouvons donc appliquer le théorème 4 en prenant pour les  $\{g_k\}$  les fonctions trigonométriques, ce qui nous conduit au

**THÉORÈME 5.** Il existe une fonction intégrable  $f(\tau)$  dont les sommes

<sup>(3)</sup> S. Banach et H. Steinhaus [1] [cette édition, vol. I, p. 31-39].

partielles de Fournier  $s_n(\tau)$  ont la propriété

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{\alpha}^{\beta} |s_n(\tau)| d\tau = +\infty$$

pour tous les intervalles  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les généralisations et combinaisons des théorèmes précédents. Il est aussi aisé de voir que la condition de continuité imposée aux  $\{g_k\}$  pour simplifier nos exemples n'a pas été toujours pleinement utilisée.

## Sur les fonctionnelles linéaires

publié dans *Studia Math.* 1 (1929), p. 211–216.

**Introduction.** Soit  $E$  un ensemble vectoriel<sup>(1)</sup> normé. Dans ce qui va suivre nous désignerons par  $x, y, z, \dots$  des éléments de  $E$  et par  $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$  des nombres réels.

Un ensemble  $G (\subset E)$  sera dit *linéaire* lorsqu'il contient toute combinaison linéaire  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  de deux quelconques de ses éléments  $x_1, x_2$ . On définit une fonctionnelle  $f(x)$  dans  $G$ , en faisant correspondre à chaque élément  $x$  de  $G$  un nombre réel  $\xi = f(x)$ . Nous dirons que la fonctionnelle  $f(x)$  est *linéaire* si

1° elle est additive, c'est-à-dire  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  pour tout  $x_1 \in G, x_2 \in G$ ,

2° elle est continue, c'est-à-dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ( $x_n \in G, x \in G$ ) entraîne toujours  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ .

On prouve aisément qu'il existe alors un nombre  $M > 0$ , de sorte que

$$|f(x)| \leq M \|x\|$$

pour tout  $x \in G$ . Le plus petit possible des nombres  $M$  est dit la *norme* de  $f(x)$  dans  $G$ . Nous la désignons par  $\|f\|_G$  ou bien simplement par  $\|f\|$ , si  $G = E$ . On a donc

$$|f(x)| \leq \|f\|_G \cdot \|x\| \quad (x \in G).$$

**§ 1. THÉORÈME 1.** Soit  $G$  un ensemble linéaire et  $y_0$  un élément d' $E$  non contenu dans  $G$ . Nous désignons par  $G'$  l'ensemble formé par tous les

<sup>(1)</sup> L'ensemble  $E$  est dit *vectoriel* lorsque pour ses éléments sont définies les opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel, conformément aux règles d'algèbre. Un ensemble vectoriel est dit *normé* lorsqu'à tout son élément  $x$  est attribué un nombre réel, désigné par  $\|x\|$  — la *norme* de cet élément, de manière que: 1°  $\|x\| > 0$  pour tout  $x \neq \theta$ ;  $\|\theta\| = 0$ , le symbole  $\theta$  désignant l'élément *nul* (module d'addition), 2°  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  pour tout  $\alpha$  réel, 3°  $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ . La suite  $\{x_n\}$  des éléments d'un ensemble vectoriel normé est, par définition, *convergente* vers l'élément  $x$  lorsque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ . Pour une exposition détaillée voir S. Banach [7] [ce volume, p. 305–348].