avec la puissance p $(p > 1)$ (la distance de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ étant égale à $\{\int |x-y|^p\}^{1/p}$) et B est l'ensemble de toutes les fonctions x pour lesquelles $\int |x|^q \leqslant 1$ (q étant une constante arbitraire plus grande que p), B est un G_δ.

Si E est le même ensemble et B est l'ensemble de toutes les fonctions pour lesquelles $\int |x|^q$ existe $(q > p)$, B n'est pas un G_δ.

Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires

publié dans Bull. Sci. Math. (2) 50 (1926), p. 27–32 et 36–43.

1. M. Lebesgue a démontré le théorème suivant (1):

Pour que les fonctions bornées de la suite $\{\varphi_n\}$ *aient la propriété d'annuler la limite* $\lim \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx$, *quelle que soit la fonction sommable* $f(x)$, *il faut et il suffit que l'on ait, pour presque tous les* x *tous et tous les* n,

$$|\varphi_n(x)| < M, \quad \lim \int_0^\alpha \varphi_n(x)\,dx = 0,$$

pour tous les α *appartenant à l'intervalle* $(0 \ldots 1)$.

Du théorème cité ci-dessus on peut facilement conclure les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les fonctions $\{K_n(x, y)\}$ pour que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 K_n(x, y) f(y)\,dy = 0 \tag{1}$$

pour chaque x et pour chaque fonction sommable $f(x)$. Mais il se pose la question: quelles sont les conditions pour que l'égalité (1) ait lieu pour presque tous les x et pour chaque fonction sommable $f(x)$.

Bien entendu, nous ne supposons pas que l'ensemble des x pour lesquels (1) subsiste soit le même pour tous les $f(x)$ sommables.

Dans ce cas-là le théorème de M. Lebesgue cité ci-dessus ne donne pas de réponse.

Dans cette Note je m'occupe de ce problème et des questions liées avec lui. Je considère aussi ce problème pour les ensembles abstraits.

2. Soit E un ensemble vectoriel, métrique et complet (2), c'est-à-dire que:

1° La somme, la différence de deux éléments quelconques et le produit d'un élément par un nombre réel sont bien définis. Ces opérations obéissent, bien entendu, aux règles ordinaires de l'algèbre. Par conséquent, il y a un

(1) Annales de la Faculté de Toulouse, 3e série, vol. I, 1909, p. 25–117.

(2) Banach [7] [ce volume, p. 305–348].

élément nul (nous le désignons par 0) tel que si a est un élément quelconque et m est un nombre réel, les égalités suivantes sont toujours remplies: $a-a=0$, $a\pm 0=a$, $m\cdot 0=0$.

2° A chaque élément a correspond un nombre non négatif (nous le désignons par $\|a\|$) remplissant les conditions suivantes:

(a) $$\|a\|>0 \text{ si } a\neq 0, \quad \|0\|=0;$$

(b) $$\|ma\|=|m|\,\|a\| \quad \text{si } m \text{ est un nombre réel;}$$

(c) $$\|a+b\|\leqslant \|a\|+\|b\|.$$

3° Si $\{a_n\}$ est une suite d'éléments et si $\lim\limits_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\|a_p-a_q\|=0$, il existe un élément a tel que $\lim\limits_{n\to\infty}\|a-a_n\|=0$.

Remarque. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\|a-a_n\|=0$, nous écrirons $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Nous disons que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ est convergente vers a si

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|a-\sum_{i=1}^{n}a_i\Big\|=0.$$

Considérons une fonctionnelle [3] $U(x)$ qui à chaque element x de E attribue une fonction $z(t)$ définie et mesurable pour $0\leqslant t\leqslant 1$. Admettons que U est linéaire et continue en mesure, c'est-à-dire:

1° $U(m_1x_1+m_2x_2)=m_1U(x_1)+m_2U(x_2)$;

2° Si $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty}U(x_n)=U(x)$ en mesure [4].

Il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle linéaire $U(x)$ soit continue en mesure est que, à chaque couple des nombres $\varepsilon>0$, $\alpha>0$, correspond un nombre $\eta>0$ tel que si $\|x\|<\eta$, l'ensemble de points où $|U(x)|>\alpha$ est de mesure plus petite que ε.

Soit $\{U_n(x)\}$ une suite de fonctionnelles linéaires et continues en mesure. Désignons par $\max\limits_{N_1\leqslant n\leqslant N_2}|U_n(x)|$ la fonction qui, pour chaque t compris entre 0 et 1, est égale à la plus grande valeur au point t des fonctions $\{|U_n(x)|\}$, $N_1\leqslant n\leqslant N_2$. Posons

$$\max_{N\leqslant n\leqslant\infty}|U_n(x)|=\lim_{N_1\to\infty}\max_{N\leqslant n\leqslant N_1}|U_n(x)|.$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant:

Théorème I. *Si $\{U_n(x)\}$ est une suite de fonctionnelles linéaires et continues, et si pour chaque x $\limsup\limits_{n\to\infty}U_n(x)$ est presque partout fini, à chaque couple de nombres $\varepsilon>0$ et $\alpha>0$ correspond un nombre $\eta>0$ tel que si $\|x\|<\eta$ l'ensemble des points où $\max\limits_{1\leqslant n<\infty}|U_n(x)|>\alpha$ est de mesure plus petite que ε.*

Démonstration. Puisque $\limsup\limits_{n\to\infty}U_n(x)$ est presque partout fini pour chaque x, $\max\limits_{1\leqslant n<\infty}|U_n(x)|$ l'est aussi.

Supposons que notre théorème n'est pas vrai.

Dans ce cas il existe un couple de nombres $\varepsilon>0$, $\alpha>0$, une suite $\{\bar\eta_i\}$ de nombres positifs tendant vers zéro, et une suite $\{\bar x_i\}$ d'éléments telle que:

I. $\|\bar x_i\|<\bar\eta_i$.

II. *L'ensemble des points où $\max\limits_{1\leqslant n<\infty}|U_n(\bar x_i)|>\alpha$ est de mesure plus grande que ε.*

Posons

$$x_i=\frac{\bar x_i}{\|\bar x_i\|},\qquad \alpha_i=\frac{\alpha}{\|\bar x_i\|};$$

nous avons donc

I'. $\|x_i\|=1$.

II'. $\lim\limits_{i\to\infty}\alpha_i=\infty$ $(\alpha_i>0)$.

III. *L'ensemble des points où $\max\limits_{1\leqslant n<\infty}(|U_n(x_i)|)>\alpha_i$ est de mesure plus grande que ε.*

Introduisons les symboles suivants:

Soit N_x le plus petit nombre entier pour lequel l'ensemble des points où l'inégalité

$$\max_{1\leqslant n<\infty}|U_n(x)|>\max_{1\leqslant n\leqslant N_x}|U_n(x)|+1$$

a lieu est de mesure plus petite que $\frac{1}{4}\varepsilon$.

Soit $\gamma(n)$ le plus grand nombre tel que si $\|x\|<\gamma(n)$, l'ensemble des points où l'inégalité

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|U_1(x)|>1$$

a lieu est de mesure plus petite que $\frac{1}{4}\varepsilon$. Les nombres N_x et $\gamma(n)$ étant ainsi définis, on trouve une suite de nombres positifs $\{a_i\}$ et une suite partielle $\{x_{r_i}\}$ extraite de la suite $\{x_n\}$ telle que les conditions suivantes soient remplies:

a. $a_1=1$, $r_1=1$.

b. $0<a_{i+1}<\frac{1}{2}a_i$, $a_{i+1}<\frac{1}{2}\gamma(N_{x_{r_i}})$.

En posant

c. $S_i=\sum\limits_{k=1}^{i}a_kx_{r_k}$,

(3) L'operateur — selon la terminologie actuelle.

(4) Nous disons qu'une suite $\{f_n\}$ de fonctions définies et mesurables pour $0\leqslant t\leqslant 1$ *tend vers f en mesure*, si à chaque couple de nombres $\varepsilon>0$, $\eta>0$ correspond un nombre $N>0$ tel que pour chaque $n>N$ l'ensemble de points où $|f_n-f|>\eta$ est de mesure plus petite que ε.

l'ensemble de points où l'inégalité

$$\max_{1\leqslant n<\infty} |U_n(S_i)| > \tfrac{1}{2}a_{i+1}\alpha_{r_{i+1}}$$

a lieu est de mesure plus petite que $\frac{1}{4}\varepsilon$.

d. $a_{i+1}\alpha_{r_{i+1}} > i$.

Il est clair qu'on peut réaliser de proche en proche les conditions a, b, c, d.

De a et b il résulte que $a_i \leqslant 1/2^{i-1}$ et, par conséquent,

$$\sum_{r=i+2}^{\infty} a_r \leqslant \sum_{r=i+2}^{\infty} a_{i+2}\frac{1}{2^{r-i-2}} = 2a_{i+2};$$

donc

$$\sum_{r=i+2}^{\infty} a_r < \gamma(N_{x_{r_{i+1}}}). \tag{1}$$

La série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est convergente, donc $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{r_i}$, l'est aussi. En désignant $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{r_i}$ par S et $\sum_{k=i+1}^{\infty} a_k x_{r_k}$ par R_i, nous avons

$$\|S\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\cdot\|x_{r_i}\| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}} = 2;$$

et, d'après (1),

$$\|R_{i+1}\| \leqslant \sum_{r=i+2}^{\infty} a_r < \gamma(N_{x_{r_{i+1}}}). \tag{2}$$

Soit $m_i = Nx_{r_i}$. Alors

$$U_n(S) = U_n(S_i) + U_n(a_{i+1}x_{r_{i+1}}) + U_n(R_{i+1});$$

donc

$$\max_{1\leqslant n\leqslant m_{i+1}} |U_n(S)| \geqslant \max_{1\leqslant n\leqslant m_{i+1}} |U_n(a_{i+1}x_{r_{i+1}})| - \max_{1\leqslant n\leqslant m_{i+1}} |U_n(S_i)| - \max_{1\leqslant n\leqslant m_{i+1}} |U_n(R_{i+1})|. \tag{3}$$

Mais en vertu de III, et de la définition du nombre

$$N_{x_{r_{i+1}}} = m_{i+1},$$

nous voyons que la première partie de la somme qui constitue le second membre de l'inégalité (3) est plus grande que $a_{i+1}\alpha_{r_{i+1}}$ dans un ensemble de mesure plus grande que $\frac{3}{4}\varepsilon$, en vertu de c, la seconde partie n'est plus grande que $\frac{1}{2}a_{i+1}\alpha_{r_{i+1}}$ que dans un ensemble de mesure plus petite que $\frac{1}{4}\varepsilon$, en vertu de (2) et de la définition du nombre $\gamma(n)$ la troisième partie n'est plus grande que l'unité que dans un ensemble de mesure plus petite que $\frac{1}{4}\varepsilon$. Donc, d'après d et (3) dans un ensemble de mesure plus grande que $\frac{1}{4}\varepsilon$ nous avons

$$\max_{1\leqslant n<\infty} |U_n(S)| \geqslant \max_{1\leqslant n<m_{i+1}} |U_n(S)| \geqslant \tfrac{1}{2}a_{i+1}\alpha_{r_{i+1}} - 2 > \tfrac{1}{2}i - 2. \tag{4}$$

Puisque i est un nombre entier quelconque, l'inégalité (4) est contradictoire avec l'hypothèse que $\limsup_{n\to\infty} U_n(S)$ est presque partout fini. Le théorème est donc démontré.

THÉORÈME II. *Si une suite $\{U_n(x)\}$ de fonctionnelles linéaires et continues en mesure tend presque partout pour chaque x vers une fonctionnelle linéaire $U(x)$, $U(x)$ est continue en mesure.*

Démonstration. Remarquons que nous avons pour chaque x presque partout

$$|U(x)| \leqslant \max_{1\leqslant n<\infty} |U_n(x)|.$$

Donc en vertu du théorème I à chaque couple de nombres $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ tel que si $\|x\| < \eta$, l'ensemble de points où $|U(x)| > \alpha$ est de mesure plus petite que ε. Cela prouve que $U(x)$ est continue en mesure.

THÉORÈME III. *Si une suite $\{U_n(x)\}$ de fonctionnelles linéaires et continues en mesure est telle que:*

1° $\limsup U_n(x)$ *est fini presque partout pour chaque x;*

2° $\lim U_n(x)$ *existe presque partout pour chaque x appartenant à un ensemble B*(5) *partout dense dans E;*

alors la suite $\{U_n(x)\}$ tend pour chaque x presque partout vers une fonctionnelle $U(x)$ linéaire et continue en mesure.

Démonstration. Soit x un élément quelconque de E. Il existe une suite $\{x_n\}$ d'éléments de B telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to\infty}\|x-x_n\| = 0.$$

Mais puisque $\lim_{i\to\infty} U_i(x_n)$ existe presque partout, on a presque partout

$$\limsup_{i\to\infty} U_i(x) - \liminf_{i\to\infty} U_i(x) = \limsup_{i\to\infty} U_i(x-x_n) - \liminf_{i\to\infty} U_i(x-x_n).$$

Donc presque partout

$$\limsup_{i\to\infty} U_i(x) - \liminf_{i\to\infty} U_i(x) \leqslant 2\max_{1\leqslant i<\infty} |U_i(x-x_n)|.$$

Donc si α est un nombre positif quelconque, puisque

$$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\| = 0,$$

(5) Nous disons qu'un ensemble B est *partout dense dans* E, si chaque élément de E est la limite d'une certaine d'éléments de B.

d'après le théorème I, l'ensemble des points où

$$\lim_{i\to\infty}\sup U_i(x)-\lim_{i\to\infty}\inf U_i(x)\geqslant\alpha$$

est de mesure nulle. Donc presque partout

$$\lim_{i\to\infty} U_i(x) \text{ existe.}$$

D'après le théorème II la fonctionnelle

$$U(x)=\lim_{n\to\infty} U_n(x)$$

est continue en mesure.

Remarque. Considérons une famille de fonctionnelles $U_\lambda(x)$ linéaires et continues en mesure dépendant d'un paramètre λ compris entre 1 et ∞. On peut démontrer par rapport à

$$\lim_{\lambda\to\infty} U_\lambda(x)$$

les mêmes théorèmes que I, II, III, si l'on admet l'hypothèse suivante:

Dans chaque intervalle fini $1\leqslant\lambda\leqslant L$, $U_\lambda(x)$ est uniformément continue et mesure, c'est-à-dire qu'à chaque couple de nombres $\varepsilon>0,\alpha>0$ correspond un nombre $\eta>0$ tel que si $\|x\|<\eta$, il existe un ensemble E_x de mesure plus grande que $1-\varepsilon$ dans lequel $|U_\lambda(x)|<\alpha$ pour $1\leqslant\lambda\leqslant L$.

3. Applications. 1° Soit E l'ensemble de toutes les fonctions définies et sommables dans l'intervalle $(0\dots 1)$. Posons

$$\|f(t)\|=\int_0^1|f(t)|\,dt.$$

Soit $\{K_n(s,t)\}$ une suite de fonctions définies et mesurables dans le carré $0\leqslant{}^s_t\leqslant 1$, telles que $|K_n(s,t)|\leqslant M_n(s)$ où $M_n(s)$ est une fonction finie presque partout dépendante de s et n, mais indépendante de t.

Dans ces conditions, il est clair que la fonctionnelle

$$\int_0^1 K_n(s,t)f(t)\,dt$$

est continue en mesure. Si nous posons $\varphi_z(t)=1$ si $z\geqslant t$, $\varphi_z(t)=0$ si $z<t\leqslant 1$, nous voyons que l'ensemble des polynômes composés de fonctions $\varphi_z(t)$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ est partout dense dans E. Remarquons que

$$\int_0^1 K_n(s,t)\varphi_z(t)\,dt=\int_0^z K_n(s,t)\,dt.$$

Donc, d'après le théorème III (§ 2), si

(1) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^z K_n(s,t)\,dt$$

existe presque partout pour chaque z,

(2) $$\lim_{n\to\infty}\sup\int_0^1 K_n(s,t)f(t)\,dt$$

est presque partout fini pour chaque $f(t)$ sommable,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 K_n(s,t)f(t)\,dt$$

existe presque partout pour chaque $f(t)$ sommable et est une fonctionnelle continue en mesure. Le fait, que la fonctionnelle

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 K_n(s,t)f(t)\,dt$$

est continue en mesure, nous la définit pour tous les f, si nous la connaissons pour les $\varphi_z(t)$. Par exemple si

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^z K_n(s,t)\,dz=0$$

presque partout pour tous les z,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 K_n(s,t)f(t)\,dt=0$$

presque partout pour tous les $f(t)$ sommables.

Si

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^z K_n(s,t)\,dt=\varphi_z(s)$$

presque partout pour tous les z,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 K_n(s,t)f(t)\,dt=f(s)$$

presque partout pour tous les $f(t)$.

Bien entendu, nous supposons que la condition (2) est toujours remplie.

On peut facilement généraliser ces théorèmes pour les autres champs fonctionnels.

2° De nos théorèmes on peut sans peine deduire le théorème de M. Lebesgue cité ci-dessus. En effet, supposons que $\{\varphi_n\}$ sont des fonctions bornées et que $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f\varphi_n=0$ pour tous les f sommables. En vertu du théorème I (§ 2), si nous posons $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$, il existe un nombre $\eta>0$ tel que si $\|f\|=\int|f|<\eta$, on a pour chaque n $|\int_0^1 f\varphi_n|\leqslant 1$. Cela prouve que si $\int |f| = 1$, $|\int f\varphi_n| \leqslant 1/\eta$. Donc $|\varphi_n| \leqslant 1/\eta$ presque partout. Si nous supposons maintenant que $|\varphi_n| < M$ pour chaque n presque partout et que $\lim \int_0^\alpha f_n = 0$ pour tous les α compris entre $0 \ldots 1$, du théorème III (§ 2), il résulte immédiatement que pour chaque f sommable $\lim \int f_n = 0$. Le même procédé s'applique dans le champ des fonctions continues ou sommables avec la puissance p ($p \geqslant 1$).

3° Soit maintenant E l'ensemble de toutes les fonctions de carrés sommables définies dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$. Posons

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2}.$$

Soit $\{f_n(t)\}$ une suite complète de fonctions normales et orthogonales, c'est-à-dire que

(1) $$\int_0^1 f_i(t) f_k(t) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k, \quad \int_0^1 f_i^2(t) = 1;$$

(2) Si $\int_0^1 f^2(t)$ existe et si $\int_0^1 f(t) f_i(t) = 0$ pour chaque i, $f(t)$ soit nécessairement nul.

Les théorèmes du paragraphe 2 nous donnent en posant

$$c_i = \int_0^1 f(t) f_i(t)\, dt$$

les théorèmes suivants:

Théorème I. *Si pour chaque $f(t)$ de carré sommable $\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(t)$ est presque partout fini, on a presque partout*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(t) = f(t)$$

pour chaque $f(t)$ de carré sommable.

Théorème II. *La condition nécessaire et suffisante pour que, si $f(t)$ est de carré sommable,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(t) = f(t)$$

est qu'à chaque $\varepsilon > 0$ on puisse faire correspondre un nombre $\alpha > 0$ tel que si

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \quad \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Big| \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(t) \Big| > \alpha$$

dans un ensemble de mesure plus petite que ε.

Théorème III. *S'il existe une fonction $\varphi(n)$ positive et tendant vers l'infini avec n telle que pour chaque $f(t)$ de carré sommable*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)}{\varphi(n)}$$

est presque partout fini, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) = 0$$

presque partout pour tous les $f(t)$ de carrés sommables.

Les théorèmes sont évidents, si nous observons que l'ensemble des polynômes composés de $\{f_i(t)\}$ est partout dense dans E et que dans la série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(t)$ correspondant à une fonction $f_k(t)$ tous les c_i sont nuls, sauf $c_k = 1$.

Remarque. On peut démontrer des théorèmes pareils pour d'autres champs fonctionnels.

Supposons maintenant que les fonctions $\{f_n(t)\}$ remplissant les conditions (1) et (2) citées ci-dessus sont bornées; supposons en outre qu'il existe une fonction $F(s)$ sommable non identiquement nulle telle que pour chaque n

(3) $$\int_0^1 F(t) f_n(t) = 0\ (^6).$$

On peut démontrer que dans ce cas il existe une fonction $\Phi(t)$ sommable pour laquelle la série correspondante $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(t)$ diverge dans un ensemble de mesure positive. En effet, supposons que le théorème n'est pas vrai. En posant

$$U(f) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(t)$$

où

$$c_i = \int_0^1 f f_i,$$

nous voyons que la fonctionnelle $U(f)$ est continue en mesure dans le champ des fonctions sommables. On voit sans peine que pour chaque

---

[6] Banach [8] [cette édition, vol. I, p. 63–65].

fonction f de carré sommable $U(f) = f$. Donc $U(F) = F$. Mais cette relation est contradictoire avec (3). Le théorème est donc démontré (7)(8).

3° Si la fonction $K(s, t, \lambda)$ mesurable est définie pour $0 \leqslant {s \atop t} \leqslant 1$, $1 \leqslant \lambda < \infty$ et telle que

$$|K(s, t, \lambda)| \leqslant M_\lambda(s),$$

où $M_\lambda(s)$ est une fonction finie presque partout dépendante de s et λ mais indépendante de t, la fonctionnelle

$$U_\lambda(f) = \int_0^1 K(s, t, \lambda) f(t)\, dt$$

est bien définie, continue en mesure dans le champ des fonctions sommables, et remplit la condition de la remarque de paragraphe 2.

4° Je veux indiquer encore une chose assez curieuse. Des théorèmes du paragraphe 2 on peut facilement conclure l'existence de fonction continue n'ayant pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive. En effet, posons

$$U_n(x) = \frac{x(t+\lambda_n) - x(t)}{\lambda_n},$$

$\{\lambda_n\}$ étant une suite de nombres positifs tendant vers zéro.

Si nous supposions que chaque fonction $x(t)$ continue admet une dérivée, on aurait

$$x'(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(x) = U(x)$$

presque partout.

Donc $x'(t) = U(x)$ serait continue en mesure. Mais la suite $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ montre que $U(x)$ n'est pas continue en mesure, car $\left\{\frac{\sin n\lambda}{n}\right\}$ tend uniformément vers zéro et les dérivées $\{\cos nx\}$ ne tendent pas en mesure vers zéro. Donc, d'après le théorème III (§ 2), il existe une fonction continue $x(t)$ pour laquelle

$$\limsup_{n\to\infty} U_n(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{x(t+\lambda_n) x(t)}{\lambda_n} = \infty$$

dans un ensemble de mesure positive.

(7) Steinhaus a publié un exemple du développement presque partout divergent d'une fonction sommable [*An example of a thoroughly orthogonal divergent development*, Proc. London Math. Soc. (2) 20 (1922), p. 123–126]. Kolmogoroff a trouvé une fonction sommable dont la série de Fourier est presque partout divergente [*Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout*], Fundamenta Mathematicae 4 [(1913), p. 324–328].

(8) On peut énoncer le pareil théorème pour divers procédés sommatoires.

Sur le principe de la condensation de singularités

publié en commun avec H. Steinhaus dans Fund. Math. 9 (1927), p. 50–61.

Hankel a donné le nom du *principe de condensation de singularités* à une méthode que l'on rencontre dans beaucoup de raisonnements mathématiques et qui consiste en ce que l'on construit un objet jouissant d'une infinité des singularités à partir des objets (en nombre infini) qui n'ont chacun qu'une seule singularité.

Cette méthode exigeant chaque fois des artifices nouveaux, notre but est de remplacer ces artifices par deux théorèmes du calcul fonctionnel; ce sont les théorèmes I et II du § 2. Le § 1 est consacré aux définitions des certaines notions du calcul fonctionnel; nous n'aurons d'ailleurs à nous occupper que des fonctionnelles linéaires. Pour montrer comment on applique les théorèmes en question sans recourir aux raisonnements spéciaux, nous avons choisi la théorie de séries orthogonales; ces exemples constituent le § 3. Il faut constater que la théorie de fonctions réelles et complexes et la théorie des équations fonctionnelles fournit aussi beaucoup d'exemples où notre méthode conduit aux théorèmes connus et inconnus.

M. Saks ayant lu notre manuscrit a remarqué que les démonstrations du § 2 admettent des simplifications considérables. Nous avons donc abandonné notre propre texte du § 2 en y substituant le texte de M. Saks. De cette manière nous avons évité certains calculs assez laborieux.

§ 1.

Soit D un espace 1° vectoriel, 2° métrique et 3° complet. Nous entendons par là

1° que les éléments de cet espace — qui seront désignés par des petites lettres latines — obéissent aux lois ordinaires de l'algèbre en ce qui concerne leur addition mutuelle et leur multiplication par des nombres réels — désignés par des lettres grecques — ces deux opérations étant toujours possibles et conduisant toujours aux éléments de D,