

Cette analogie se présente également pour le champ $(\mathcal{C}^p \mathcal{C})$.

Nous passons maintenant au dernier champ, qui est $(\mathcal{C}^p \mathcal{S}^r)$.

Pour le champ $(\mathcal{C}^p \mathcal{S}^r)$. Ayant choisi arbitrairement un nombre $\varepsilon > 0$, on peut trouver un mode de subdivision $\mathfrak{g}_k$ de l'intervalle (a, b) , tel que, la notation du théorème 4 étant conservée, on ait

$$(32) \quad W_k(X^{(p)}(t)) \geq \int_a^x |X^{(p)}(t)|^r dt - \varepsilon.$$

On a, en vertu de (29):

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_k(\bar{X}_n^{(p)}(t)) = W_k(X^{(p)}(t)).$$

On a en outre

$$W_k(\bar{X}_n^{(p)}(t)) \leq \int_a^b |X_n^{(p)}|^r dt,$$

de sorte que cette inégalité implique, en vertu de (32) et (33), la suivante:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\bar{X}_n^{(p)}(t)|^r dt \geq \int_a^b |X^{(p)}(t)|^r dt - \varepsilon.$$

Comme cette inégalité subsiste pour chaque ε , on a:

$$(34) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\bar{X}_n^{(p)}(t)|^r dt \geq \int_a^b |X^{(p)}(t)|^r dt.$$

Or, on a pour le champ $(\mathcal{C}^p \mathcal{S}^r)$:

$$\|X(t)\| = \max |X(t)| + \sqrt[r]{\int_a^b |X^{(p)}(t)|^r dt},$$

ce qui donne en vertu de (28) et (34):

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\bar{X}_n(t)\| \geq \|X(t)\|,$$

résultat contradictoire avec (27).

L'axiome VI est donc établi pour tous les champs considérés.

Sur le prolongement de certaines fonctionnelles

publié dans Bull. Sci. Math. (2) 49 (1925), p. 301-307.

1. Soit E un espace métrique continu, dans lequel par conséquent deux points quelconques a, b ont une distance ab bien définie, qui remplit les conditions suivantes: 1° $ab = ba > 0$ pour $a \neq b$, $aa = 0$; 2° $ab + bc \geq ac$; 3° on peut joindre deux points quelconques par un arc simple. (Un arc simple est une image continue et biunivoque d'un segment.)

Soit B un sous-ensemble dense dans E , c'est-à-dire que l'ensemble dérivé de B soit égal à E . Considérons une fonctionnelle U définie pour tous les éléments de l'ensemble B .

Désignons par $\omega(x)^{(1)} \limsup U(a) - \liminf U(a)$, $a \rightarrow x$, $a \neq x$, $a \in B$. Il est clair que, si pour un point x , $\omega(x) > 0$, on ne peut pas définir U au point x de telle manière que U soit continue en x . Si nous supposons maintenant que $\omega(x) > 0$ pour chaque point de $E - B$, peut-on affirmer que la fonctionnelle U n'est pas continue dans B ?

Dans cette Note, je démontre que pour que la réponse soit affirmative, il est nécessaire et suffisant que B ne soit pas un $G_\delta^{(2)}$.

M. Paul Lévy pose dans son excellent livre⁽³⁾ le problème suivant: „Considérons une fonctionnelle U définie pour toutes les fonctions ayant des dérivées finies jusqu'à l'ordre p , mais n'ayant aucun sens si la dérivée d'ordre p n'existe pas ou devient infinie. Peut-on affirmer qu'elle n'est pas continue d'ordre $p-1$?" Si nous admettons que la phrase „n'avoir aucun sens" est équivalente à „ne pas être défini" la réponse est triviale. En effet, la fonctionnelle qui s'annule pour chaque fonction ayant une dérivée d'ordre p finie et pour d'autres fonctions est indéfinie résout le problème de M. Lévy négativement⁽⁴⁾. Changeons maintenant l'énoncé du problème de M.

⁽¹⁾ Nous appelons $\omega(x)$ l'oscillation au point x .

⁽²⁾ G_δ est un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

⁽³⁾ *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris 1922, p. 18-19.

⁽⁴⁾ G. Bouligand, *Sur quelques points d'analyses fonctionnelles*, Comptes Rendus 176, p. 822 et *Sur les modes de continuité de certaines fonctionnelles*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2) 47 (1923).

Lévy de la manière suivante: Considérons une fonctionnelle U , définie pour toutes les fonctions ayant des dérivées finies jusqu'à l'ordre p , mais telle que si φ est une fonction arbitraire n'admettant pas de dérivée finie d'ordre p , on ne peut pas définir U pour φ , de sorte que U soit continue d'ordre $p-1$ pour φ . Peut-on affirmer que U n'est pas continue d'ordre $p-1$? La réponse maintenant est affirmative et un peu moins triviale. En effet, si nous désignons par E l'ensemble de toutes les fonctions ayant la dérivée d'ordre $p-1$ finie, par B l'ensemble de toutes les fonctions ayant la dérivée d'ordre p finie et si nous définissons la distance de deux éléments φ, ψ de E comme égale à

$$\max |\varphi - \psi| + \max \left| \frac{d^{p-1} \varphi}{dt^{p-1}} - \frac{d^{p-1} \psi}{dt^{p-1}} \right|,$$

on voit sans peine que, d'après notre théorème cité ci-dessus, la réponse est négative ou affirmative suivant que B est un G_δ , donc la réponse est affirmative.

2. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. Si E est un ensemble métrique et continu, B un ensemble dense dans E , la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonctionnelle U définie et continue dans B mais telle que pour chaque x de $E-B$ $\omega(x)$ soit positif est que B soit un G_δ .

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, soit U une fonctionnelle qui remplit les conditions de notre théorème. Désignons par A_n tous les points x de E pour lesquels $\omega(x) < 1/n$.

Il est clair que A_n est un ensemble ouvert et que

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

B est donc un G_δ .

La condition est suffisante. En effet, posons

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n,$$

où les φ_n sont des ensembles ouverts. Nous pouvons sans aucune restriction admettre que $\varphi_{n+1} \subset \varphi_n$ pour chaque n . Désignons par $V_n(x)$ la distance d'un point x à l'ensemble fermé $E - \varphi_n$. En d'autres termes $V_n(x) = \liminf x\varphi_n \subset E - \varphi_n$. Il est évident que la fonctionnelle

$$U_n(a) = \sin \frac{1}{V_n(a)}$$

est bien définie et continue dans B , parce que $V_n(a) \neq 0$ si $a \in B$.

La fonctionnelle

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n U_n,$$

où $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres positifs remplissant la condition

$$\alpha_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i,$$

d'ailleurs quelconque, est la fonctionnelle cherchée. En effet, U est bien définie et continue dans B car chaque U_n est définie et continue dans B , $|U_n| \leq 1$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ est absolument convergente. Soit x un point quelconque de $E-B$. Nous démontrerons maintenant que si

$$x \in E - \varphi_n, \quad \omega_n(x) = 2$$

en désignant par $\omega_n(x)$ l'oscillation de la fonctionnelle $U_n(x)$ en x . Si nous joignons un point quelconque a de B avec x au moyen de l'arc simple k , il y a sur k deux points y', y'' aussi voisins que l'on veut du point x pour lesquels

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{V_n(y')}} = - \frac{1}{\sin \frac{1}{V_n(y'')}} = 1.$$

Or puisque B est partout dense, il y a deux points a', a'' de B assez voisins de y' et y'' pour que

$$U_n(a') - U_n(a'') > 2 - \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif quelconque donné d'avance. Cela montre que $\omega_n(x) \geq 2$. Il est évident que d'après la définition de U_n , $\omega_n(x)$ est au plus égal à 2, donc $\omega_n(x) = 2$. Si maintenant N est le plus petit des nombres n tels que $x \in E - \varphi_n$, nous avons

$$\omega_i(x) = 0 \text{ pour } i < N, \quad \omega_i(x) = 2 \text{ pour } i \geq N.$$

Par conséquent

$$\omega(x) \geq \alpha_n \omega_n(x) - \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i \omega_i(x) = 2\alpha_n - 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i.$$

Comme d'après la supposition

$$\alpha_N > \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i,$$

donc $\omega(x) > 0$. Notre théorème est démontré.

3. Nous allons maintenant envisager divers champs fonctionnels. Nous disons qu'un ensemble B est G_δ par rapport à un ensemble métrique E ,

si B est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts situés dans E . Si nous définissons la distance de deux fonctions $x(t), y(t)$ définies dans l'intervalle $(0 \dots 1)$ et admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $p-1$ comme égale à

$$\max |x(t) - y(t)| + \max \left| \frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} - \frac{d^{p-1}y}{dt^{p-1}} \right|,$$

nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME II. *L'ensemble B de toutes fonctions définies dans $(0 \dots 1)$, admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre p , n'est pas un G_δ par rapport à l'ensemble E de toutes les fonctions définies dans $(0 \dots 1)$ admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $p-1$.*

Démonstration. Supposons que B est un G_δ par rapport à E . Dans ce cas, il y a une suite dénombrable d'ensembles $\{A_i\}_{i=1, \dots, \infty}$ ouverts tels que $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Si α et β sont des constantes quelconques mais telles que $0 < \alpha < \beta < 1/2$, désignons par $f(t, \alpha, \beta)$ la fonction définie par les formules

$$f(t, \alpha, \beta) = 0 \text{ pour } t = 0, \alpha, \beta, 1, \quad f(t, \alpha, \beta) = 1 \text{ pour } t = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

et par la condition de varier linéairement dans chacun des intervalles

$$(0, \alpha), \quad \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right), \quad (\beta, 1).$$

Soit $\{\varepsilon_n\}_{n=1, \dots, \infty}$ une suite quelconque des nombres positifs tendant vers zéro. Envisageons la sphère⁽⁵⁾ k_1 de centre $x(t) \equiv 0$ et de rayon plus petit que ε_1 contenue dans A_1 . Il est clair qu'on peut trouver un nombre α_1 assez petit pour qu'il existe dans la sphère k_1 une fonction $x_1(t)$ vérifiant l'équation

$$\frac{d^p x_1}{dt^p} = f(t, 0, \alpha_1).$$

Désignons par k_2 une sphère de centre x_1 de rayon plus petit que ε_2 contenue dans $k_1 \cdot A_2$. On peut trouver un nombre $\alpha_2, \alpha_1 < \alpha_2 < 1/2$ assez voisin de α_1 pour qu'il existe dans la sphère k_2 une fonction x_2 vérifiant l'équation

$$\frac{d^p x_2}{dt^p} = f(t, \alpha_1, \alpha_2) + \frac{d^p x_1}{dt^p}.$$

⁽⁵⁾ La sphère k de centre x et de rayon r est l'ensemble de toutes les fonctions appartenant à E , dont la distance de x est plus petite que r .

En général nous désignons par k_n une sphère de centre x_{n-1} et de rayon plus petit que ε_n , contenue dans $A_n \cdot k_{n-1}$, par α_n un nombre remplissant les conditions: 1) $\alpha_{n-1} < \alpha_n < 1/2$; 2) Dans la sphère k_n , il existe une fonction x_n vérifiant l'équation

$$\frac{d^p x_n}{dt^p} = f(t, \alpha_{n-1}, \alpha_n) + \frac{d^p x_{n-1}}{dt^p}.$$

Il est clair que tous les x_n à indices plus grands que N appartiennent à k_N . Puisque le rayon de k_n tend vers 0 avec $1/n$, x_n tend uniformément avec ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$ vers une fonction x et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$. Il est évident que $x \in k_n$ pour chaque n , donc $x \in A_n$ pour chaque n . Il en résulte que $x \in B$. Mais

$$\frac{d^p x}{dt^p} = f(t, 0, \alpha_1) + \sum_{i=1}^{\infty} f(t, \alpha_i, \alpha_{i+1})$$

pour toutes les valeurs de t sauf

$$t = \alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i \leq \frac{1}{2}.$$

Mais un simple calcul montre qu'au point $t = \alpha$ la dérivée d'ordre p droite n'est pas égale à la dérivée d'ordre p gauche et, par conséquent, au point $t = \alpha$ la fonction $x(t)$ n'a pas de dérivée d'ordre p . Mais c'est contradictoire avec le fait obtenu que $x \in B$. Donc B n'est pas un G_δ par rapport à E .

Remarque I. On peut facilement démontrer que B est G_δ , c'est-à-dire B est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est un G_δ .

Remarque II. On voit sans peine que le théorème II serait vrai si nous supposons que E (respectivement B) est l'ensemble de toutes les fonctions ayant la dérivée d'ordre $p-1$ (respectivement d'ordre p) finie. En conséquence du théorème I et de la remarque II, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME III. *Si la fonctionnelle U , définie seulement pour toutes les fonctions ayant la dérivée d'ordre p finie, est continue d'ordre $p-1$, il existe une fonction $x(t)$ qui remplit les conditions suivantes: 1° $d^{p-1}x/dt^{p-1}$ est continue, la dérivée d'ordre p de x n'existe pas; 2° on peut définir x de telle manière que U soit continue d'ordre $p-1$ pour x .*

4. On peut généraliser les résultats obtenus pour certains champs fonctionnels. Je remarquerai que si E est l'ensemble de toutes les fonctions continues (la distance étant égale au maximum du module de la différence de deux fonctions) et B est l'ensemble de toutes les fonctions ayant la même dérivée au plus égale à 1 en valeur absolue, B n'est pas un G_δ par rapport à E . Si maintenant E est l'ensemble de toutes les fonctions sommables

avec la puissance p ($p > 1$) (la distance de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ étant égale à $\{\int |x-y|^p\}^{1/p}$) et B est l'ensemble de toutes les fonctions x pour lesquelles $\int |x|^q \leq 1$ (q étant une constante arbitraire plus grande que p), B est un G_δ .

Si E est le même ensemble et B est l'ensemble de toutes les fonctions pour lesquelles $\int |x|^q$ existe ($q > p$), B n'est pas un G_δ .

Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires

publié dans Bull. Sci. Math. (2) 50 (1926), p. 27-32 et 36-43.

1. M. Lebesgue a démontré le théorème suivant⁽¹⁾:

Pour que les fonctions bornées de la suite $\{\varphi_n\}$ aient la propriété d'annuler la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx$, quelle que soit la fonction sommable $f(x)$, il faut et il suffit que l'on ait, pour presque tous les x tous et tous les n ,

$$|\varphi_n(x)| < M, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\alpha \varphi_n(x) dx = 0,$$

pour tous les α appartenant à l'intervalle $(0 \dots 1)$.

Du théorème cité ci-dessus on peut facilement conclure les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les fonctions $\{K_n(x, y)\}$ pour que

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 K_n(x, y) f(y) dy = 0$$

pour chaque x et pour chaque fonction sommable $f(x)$. Mais il se pose la question: quelles sont les conditions pour que l'égalité (1) ait lieu pour presque tous les x et pour chaque fonction sommable $f(x)$.

Bien entendu, nous ne supposons pas que l'ensemble des x pour lesquels (1) subsiste soit le même pour tous les $f(x)$ sommables.

Dans ce cas-là le théorème de M. Lebesgue cité ci-dessus ne donne pas de réponse.

Dans cette Note je m'occupe de ce problème et des questions liées avec lui. Je considère aussi ce problème pour les ensembles abstraits.

2. Soit E un ensemble vectoriel, métrique et complet⁽²⁾, c'est-à-dire que:

1° La somme, la différence de deux éléments quelconques et le produit d'un élément par un nombre réel sont bien définis. Ces opérations obéissent, bien entendu, aux règles ordinaires de l'algèbre. Par conséquent, il y a un

⁽¹⁾ Annales de la Faculté de Toulouse, 3^e série, vol. I, 1909, p. 25-117.

⁽²⁾ Banach [7] [ce volume, p. 305-348].