MONOGRAFJE MATEMATYCZNE

TOM I

THÉORIE
DES
OPÉRATIONS LINÉAIRES

PAR

STEFAN BANACH
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ
WARSZAWA 1932

Przedmowa

W dziele tem zamierzam podać teorję operacyj wraz z zastosowaniami. Teorja powyższa stworzona przez V. Volterrę zajmuje się badaniem funkcyj, określonych w przestrzeniach o nieskończenie wielu wymiarach. Niema prawie dziedziny matematyki, gdzieby teorja operacyj nie wnikała w sposób istotny. Dość wspomnieć, że rachunek warjacyjny i teorja równań całkowych okazały się szczególnemi przypadkami ogólnych zawartych w teorji operacyj. Piękność teorji operacyj leży głównie w tem, że w niej łączą się w harmonijną całość metody matematyki klasycznej z metodami matematyki nowożytnej. Teorja operacyj pozwala interpretować twierdzenia teorji mnogości lub topologji i to w sposób zupełnie nieoczekiwany. Twierdzenie np. z topologji o stałym punkcie daje się (jak zauważyli Birkhoff i Kellogg) przy pomocy teorji operacyj przetłumaczyć na twierdzenie klasyczne o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych. Są działy matematyki, których głębsze zrozumienie możliwe jest tylko przy pomocy znajomości teorji operacyj.

Fac-similé de la préface à l'édition polonaise de la „Théorie des opérations linéaires" (p. 15–18)

IV

Takiemi dziedzinami są, teorja funkcyj zmiennej rzeczywistej, równania całkowe, rachunek warjacyjny i t.p.

Jeżeli zwrócimy uwagę na piękno ~~w tej~~ ~~[illegible]~~ książce w teorji operacyj to, pomijając nawet jej liczne zastosowania (które ~~[illegible]~~ są nieistotne dla oceny piękna samej ~~[illegible]~~ teorji), ~~to~~ możemy ją stworzenie zaliczyć do najpiękniejszych teorji matematyki.

Po tem wszystkiem nie dziwi nas zdanie p. J. Hadamarda, że teorja operacyj przedstawia najpotężniejszą metodę badań matematyki nowoczesnej.

~~W części pierwszej niniejszego dzieła, zajmuję się badaniem tzw. operacyj liniowych.~~

Tom pierwszy niniejszego dzieła stanowi wstęp z algebry ~~oper~~ teorji operacyj. W tomie tym ~~pierwszym~~ zajmuję się badaniem t.zw. ~~[illegible]~~ operacyj ~~liniow~~ liniowych. Odpowiada to badaniu w algebrze ~~funkcyj~~ form liniowych ~~[illegible]~~ n zmiennych, t.j. wyrażeń $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$.

W odpowiednich, wstępach podaję zastosowania, otrzymanych twierdzeń, do rozmaitych dziedzin matematyki, j. np. do teorji funkcyj zmiennej rzeczywistej, szeregów ortogonalnych, teorji miary, ~~itp.~~ równań całkowych i t.p. Przy ~~wszystkich~~ twierdzeniach podaję zawsze autora, o ile tylko jest mi znany.

V

Jest tylko kilka dzieł ~~ogólnych~~ ~~[illegible]~~. poświęconych teorji operacyj. Oto najważniejsze:

1. V. Volterra Leçons sur les fonctions de lignes. (Coll. Borel) Gauthier-Villars. Paris 1913
2. V. Volterra: Theory ~~O~~f Functionals Blackie & Son Limited London and Glasgow 1930 ~~[illegible]~~:
3. P. Lévy: Leçons d'analyse fonctionnel Gauthier-Villars - Paris 1922

W książce 2. podana jest również literatura.

Przystępuję do miłego obowiązku złożenia podziękowania tym wszystkim, którzy ~~użyczyli~~ służyli mi radą i pomocą przy redakcji tego tomu, a w szczególności:

~~Przystępuję do miłego obowiązku złożenia podziękowania~~ p. Dr H. Auerbachowi za częściową redakcję wstępu,

p. S. Mazurowi za wydatną pomoc ~~[illegible]~~ użyczoną przy redakcji tej książki, a w szczególności przy ~~uwag~~ redakcji uwag mieszczących się na końcu tego tomu,

p. Dr S. Saksowi, Docentowi Uniw. Warszawskiego za cenne uwagi i poprawki podane w czasie druku tej książki, które przyczyniły się do uproszczenia i wyjaśnienia wielu wywodów, jakoteż do usunięcia wielu błędów i usterek, Kasie im. ~~Hr~~ Mianowskiego za podjęcie się ~~wydawnictwa~~ wydania tego dzieła.

Dr. Stefan Banach
Prof. U. J. K

Lwów dn. 20.VII.1931.

À Madame Lucie Banach

PRÉFACE

La théorie des opérations, créée par V. Volterra, a pour objet l'étude des fonctions définies dans les espaces à une infinité de dimensions. Dans plusieurs domaines très importants des mathématiques cette théorie a pénétré d'une façon essentielle: il suffit de rappeler que la théorie des équations intégrales et le calcul des variations se sont trouvés contenus comme des cas particuliers dans les principales sections de la théorie générale des opérations. On voit dans cette théorie les méthodes de mathématique classique s'unir aux méthodes modernes d'une manière parfaitement harmonieuse et remarquablement efficace. Elle permet souvent d'interpréter les théorèmes de la théorie des ensembles ou de la topologie d'une façon tout à fait imprévue. Ainsi p. ex. le théorème topologique sur le point invariant se laisse traduire moyennant la théorie des opérations (comme l'ont montré MM. Birkhoff et Kellogg) dans le théorème classique sur l'existence des solutions des équations différentielles. Il y a des parties importantes des mathématiques dont la connaissance vraiment approfondie n'est possible qu'à l'aide de la théorie des opérations. Telles sont aujourd'hui: la théorie des fonctions de variable réelle, équations intégrales, calcul des variations, etc.

Cette théorie mérite donc avec raison, aussi bien par sa valeur esthétique que par la portée de ses raisonnements (même abstraction faite de ses nombreuses applications) l'intérêt de plus en plus croissant que lui prêtent les mathématiciens. Aussi on ne s'étonnera pas à l'opinion de M. J. Hadamard, qui considère la théorie des opérations comme une des plus puissantes méthodes de recherche de la mathématique contemporaine.

Le livre présent contient la première partie de l'algèbre des opérations. Il est consacré à l'étude des opérations dites *linéaires*, qui correspond à celle des formes linéaires $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ de l'algèbre.

La notion d'opération linéaire peut être définie comme suit. Soient E et E_1 deux espaces formés d'éléments quelconques, mais où une addition associative et l'élément-zéro sont supposés définis. Soit $y = U(x)$ une fonction (opération, transformation) qui fait correspondre à tout élément x de E un élément y de E_1 (dans le cas où E_1 est en particulier l'espace des nombres réels, cette fonction porte aussi le nom de *fonctionnelle*). Si, quels que soient x_1 et x_2 de E, on a $U(x_1+x_2) = U(x_1)+U(x_2)$, l'opération $U(x)$ s'appelle *additive*. Si, en outre, E et E_1 sont des espaces *métriques*, c.-à.-d. que dans chacun d'eux la *distance* des éléments est définie, on peut considérer des opérations $U(x)$ *continues*. Or, les opérations à la fois additives et continues s'appellent *linéaires*.

Dans ce livre, je me suis proposé de recueillir surtout les résultats concernant les opérations linéaires définies dans certains espaces généraux, notamment dans les ainsi dits *espaces du type* (B), dont des cas particuliers sont: l'espace des fonctions continues, celui des fonctions à p-ième puissance sommable, l'espace de Hilbert, etc.

Je donne aussi l'interprétation des théorèmes généraux dans diverses disciplines mathématiques, à savoir dans la théorie des groupes, des équations différentielles, des équations intégrales, des équations à une infinité d'inconnues, des fonctions de variable réelle, des méthodes de sommations, des séries orthogonales, etc. Il est intéressant de voir certains théorèmes donner des résultats même dans des disciplines assez éloignées les unes des autres. Ainsi p. ex. le théorème sur l'extension (prolongement) d'une fonctionnelle additive résout simultanément le problème général de la mesure, le problème des moments et celui de l'existence des solutions d'un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

A côté des méthodes algébriques, ce sont surtout celles de la théorie générale des ensembles qui passent dans ce livre au premier plan, en gagnant à cette théorie plusieurs applications nouvelles. On trouvera aussi dans divers chapitres de ce livre de nouveaux théorèmes généraux. Tels sont, en particulier, les deux derniers chapitres et l'annexe: les résultats qui'ils renferment n'ont été nulle part publiés. Ils constituent une ébauche de l'étude des invariants relatifs aux transformations linéaires (des espaces du type (B)). En particulier, le Chapitre XII contient la définition et l'analyse des propriétés de la *dimension linéaire*, qui joue dans ces espaces un rôle analogue à celui de la dimension au sens ordinaire dans les espaces euclidiens.

Les résultats et les problèmes qui, faute de place, n'ont pas été envisagés, sont discutés brièvement dans les Remarques à la fin du livre. On y trouvera aussi quelques indications bibliographiques supplémentaires. D'une façon générale (excepté l'Introduction) je n'indique pas l'origine des théorèmes que je crois trop simples ou bien démontrés ici pour la première fois.

Un certain nombre d'ouvrages plus récents a paru et continue à paraître dans le périodique *Studia Mathematica*, qui poursuit le but de grouper avant tout les recherches concernant l'analyse fonctionnelle et ses applications.

Je me propose de consacrer un second livre (qui constituera la suite de l'ouvrage présent) à la théorie des autres opérations fonctionnelles avec un large emploi des méthodes topologiques.

En terminant, je tiens à témoigner ici mon affectueuse reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu m'aider dans mon travail, en se chargeant

de la traduction de mon manuscrit polonais, ou concourir à ma tâche par leurs précieux conseils. Je remercie tout particulièrement M. H. Auerbach pour sa collaboration à la rédaction de l'Introduction et M. S. Mazur pour le concours général qu'il m'a prêté et pour sa part à la rédaction des Remarques finales.

Lwów, Juillet 1932

Stefan Banach