



Stefan Banach

Stefan Banach en 1944

TABLE DES MATIÈRES

Préface	5
Publications de Stefan Banach	7

Stefan Banach

THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES

Préface	19
<i>Introduction</i>	
A. L'intégrale de Lebesgue–Stieltjes	
§ 1. Quelques théorèmes de la théorie de l'intégrale de Lebesgue	23
§ 2. Quelques inégalités pour les fonctions à p -ième puissance sommable	24
§ 3. La convergence asymptotique	25
§ 4. La convergence en moyenne	25
§ 5. L'intégrale de Stieltjes	26
§ 6. Le théorème de Lebesgue	28
B. Ensembles et opérations mesurables (B) dans les espaces métriques	
§ 7. Espaces métriques	29
§ 8. Ensembles dans les espaces métriques	32
§ 9. Opérations dans les espaces métriques	34
<i>Chapitre I. Groupes</i>	
§ 1. Définition des espaces du type (G)	38
§ 2. Propriétés des sous-groupes	39
§ 3. Opérations additives et linéaires	40
§ 4. Un théorème sur la condensation des singularités	41
<i>Chapitre II. Espaces vectoriels généraux</i>	
§ 1. Définition et propriétés élémentaires des espaces vectoriels	42
§ 2. Extension des fonctionnelles additives et homogènes	43
§ 3. Applications: généralisation des notions d'intégrale, de mesure et de limite	45
<i>Chapitre III. Espaces du type (F)</i>	
§ 1. Définition et préliminaires	49
§ 2. Opérations homogènes	50
§ 3. Séries d'éléments. Inversion des opérations linéaires	50
§ 4. Fonctions continues sans dérivée	55
§ 5. La continuité des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles	56
§ 6. Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues	58
§ 7. Applications de l'espace (s)	60

Chapitre IV. Espaces normés

§ 1. Définitions des espaces vectoriels normés et des espaces du type (B) 63

§ 2. Propriétés des opérations linéaires, Extension des fonctionnelles linéaires 63

§ 3. Ensembles fondamentaux et ensembles totaux d'éléments 66

§ 4. Forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces (C), (L^r), (c), (l^r), (m) et dans les sous-espaces de (m) 67

§ 5. Suites fermées et complètes dans les espaces (C), (L^r), (c) et (l^r) 79

§ 6. Approximation des fonctions appartenant à (C) et (L^r) par des combinaisons linéaires de fonctions 80

§ 7. Le problème des moments 81

§ 8. Conditions pour l'existence des solutions de certains systèmes d'équations à une infinité d'inconnues 82

Chapitre V. Espaces du type (B)

§ 1. Opérations linéaires dans les espaces du type (B) 84

§ 2. Principe de condensation des singularités 86

§ 3. Espaces du type (B) compacts 88

§ 4. Une propriété des espaces (L^r), (c) et (l^r) 89

§ 5. Espaces du type (B) formés de fonctions mesurables 90

§ 6. Exemples des opérations linéaires dans quelques espaces particuliers du type (B) 92

§ 7. Quelques théorèmes sur les méthodes de sommation 93

Chapitre VI. Opérations totalement continues et associées

§ 1. Opérations totalement continues 98

§ 2. Exemples des opérations totalement continues dans quelques espaces particuliers 99

§ 3. Opérations conjuguées (associées) 101

§ 4. Applications. Exemples des opérations conjuguées dans quelques espaces particuliers 103

Chapitre VII. Suites biorthogonales

§ 1. Définition et propriétés générales 107

§ 2. Suites biorthogonales dans quelques espaces particuliers 108

§ 3. Bases dans les espaces du type (B) 110

§ 4. Quelques applications à la théorie des développements orthogonaux 112

Chapitre VIII. Fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B)

§ 1. Préliminaires 114

§ 2. Ensembles régulièrement fermés de fonctionnelles linéaires 115

§ 3. Ensembles transfiniment fermés de fonctionnelles linéaires 116

§ 4. Convergence faible des fonctionnelles linéaires 120

§ 5. Ensembles faiblement fermés de fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B) séparables 121

§ 6. Conditions pour la convergence faible des fonctionnelles linéaires définies dans les espaces (C), (L^p), (c) et (l^p) 123

§ 7. Compacité faible d'ensembles bornés dans certains espaces 126

§ 8. Fonctionnelles linéaires faiblement continues définies dans les espaces des fonctionnelles linéaires 127

Chapitre IX. Suites faiblement convergentes d'éléments

§ 1. Définition. Conditions pour la convergence faible des suites d'éléments 128

§ 2. Convergence faible des suites d'éléments dans les espaces (C), (L^p), (c) et (l^p) 129

§ 3. Relation entre la convergence faible et forte dans les espaces (L^p) et (l^p) pour $p > 1$ 133

§ 4. Espaces faiblement complets 134

§ 5. Un théorème sur la convergence faible d'éléments 136

Chapitre X. Equations fonctionnelles linéaires

§ 1. Relations entre les opérations linéaires et les opérations conjuguées avec elles 138

§ 2. La théorie de Riesz des équations linéaires totalement continues 142

§ 3. Valeurs régulières et valeurs propres dans les équations linéaires 147

§ 4. Théorèmes de Fredholm dans la théorie des équations linéaires totalement continues 149

§ 5. Équations intégrales de Fredholm 150

§ 6. Équations intégrales de Volterra 151

§ 7. Équations intégrales symétriques 152

Chapitre XI. Isométrie, équivalence, isomorphie

§ 1. Isométrie 154

§ 2. Les espaces (L^2) et (l^2) 154

§ 3. Transformations isométriques des espaces vectoriels normés 155

§ 4. Espaces des fonctions réelles continues 156

§ 5. Rotations 160

§ 6. Isomorphie et équivalence 166

§ 7. Produits des espaces du type (B) 167

§ 8. Espace (C) comme l'espace universel 169

§ 9. Espaces conjugués 171

Chapitre XII. Dimension linéaire

§ 1. Définitions 176

§ 2. Dimension linéaire des espaces (c) et (l^p) où $p \geq 1$ 177

§ 3. Dimension linéaire des espaces (L^p) et (l^p) où $p > 1$ 179

Annexe. Convergence faible dans les espaces du type (B)

§ 1. Les dérivés faibles des ensembles de fonctionnelles linéaires 187

§ 2. Convergence faible des éléments 194

Remarques 201

Index terminologique 217

A. Pelczyński (en collaboration de Cz. Bessaga)

SOME ASPECTS OF THE PRESENT THEORY OF BANACH SPACES

Introduction 223

Notation and terminology 223

Chapter I.

§ 1. Reflexive and weakly compactly generated Banach spaces. Related counter-examples 225

Chapter II. Local properties of Banach spaces

§ 2. The Banach-Mazur distance and projection constants 230

§ 3. Local representability of Banach spaces 233

§ 4. The moduli of convexity and smoothness; super-reflexive Banach spaces. Unconditionally convergent series	237
<i>Chapter III. The approximation property and bases</i>	
§ 5. The approximation property	241
§ 6. The bounded approximation property	244
§ 7. Bases and their relation to the approximation property	246
§ 8. Unconditional bases	249
<i>Chapter IV.</i>	
§ 9. Characterizations of Hilbert spaces in the class of Banach spaces	253
<i>Chapter V. Classical Banach spaces</i>	
§ 10. The isometric theory of classical Banach spaces	259
§ 11. The isomorphic theory of \mathcal{L}_p spaces	264
§ 12. The isomorphic structure of the spaces $L^p(\mu)$	270
<i>Chapter VI.</i>	
§ 13. The topological structure of linear metric spaces	275
§ 14. Added in proof	280
Bibliography	283
Additional bibliography	298

TRAVAUX DE STEFAN BANACH

<i>Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales</i>	305
<i>Sur le prolongement de certaines fonctionnelles</i>	349
<i>Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires</i>	355
<i>Sur le principe de la condensation de singularités (avec H. Steinhaus)</i>	365
<i>Sur les fonctionnelles linéaires</i>	375
<i>Sur les fonctionnelles linéaires II</i>	381
<i>Sur la convergence forte dans le champ L^p (avec S. Saks)</i>	396
<i>Über metrische Gruppen</i>	402
<i>Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen (avec S. Mazur)</i>	412
<i>Sur la structure des ensembles linéaires (avec C. Kuratowski)</i>	416
<i>Zur Theorie der linearen Dimension (avec S. Mazur)</i>	420
<i>Sur la dimension linéaire des espaces fonctionnels (avec S. Mazur)</i>	431
<i>Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis</i>	434
<i>Über homogene Polynome in (L^2)</i>	442
<i>Über das „Loi suprême“ von J. Hoene-Wroński</i>	450
<i>Sur la divergence des interpolations</i>	458
<i>Remarques sur les groupes et les corps métriques (rédigé d'après une notice posthume par S. Hartman)</i>	465
Table des matières du volume I	469

PRÉFACE

Le premier tome des ouvrages de Stefan Banach apparut en 1967 et contenait 36 de ses travaux du domaine de la fonction réelle et de la théorie des séries orthogonales, ainsi que les commentaires aux travaux insérés.

Conformément à l'annonce du Comité de Rédaction du tome premier, le second tome contient l'acquis scientifique de Stefan Banach dans le domaine de l'analyse fonctionnelle et en particulier sa monographie fondamentale „Théorie des opérations linéaires” publiée en 1932. D'après les plans originaires du Comité de Rédaction, tous les travaux devaient être pourvus de commentaires donnant une opinion sur l'importance de ces travaux et sur l'évolution suivante de leur problématique. Ce plan fut réalisé dans le premier tome, mais dans le tome actuel, on a renoncé aux commentaires. Ont aussi été omis dans la préface du tome premier les résultats inédits de S. Banach, qu'il a présentés à de diverses séances scientifiques ou simplement communiqués à d'autres mathématiciens, ainsi que les problèmes qu'il a posés.

La violente évolution de l'analyse fonctionnelle dans les dix dernières années a empêché la véritable présentation dans les commentaires de l'influence des idées de Stefan Banach contenues dans chacun de son travail publié.

A la place des commentaires, le second tome contient un large article d'Aleksander Pełczyński, qui donne une revue des recherches dans certaines parties de l'analyse fonctionnelle pour lesquelles la monographie de Banach et les problèmes y contenus, étaient comme point initial. La parution de cette monographie en 1932 était décisive dans l'évolution de l'analyse fonctionnelle étant traitée comme une discipline à part de l'analyse mathématique.

L'article de Pełczyński présente certains étapes de cette évolution. Dans le second tome, on reproduit l'édition française de la monographie de Banach. Il existe aussi une traduction en ukrainien, éditée à Kijów en 1948 qui n'était pas mentionnée sur la liste des travaux dans le premier tome.

La liste des publications de S. Banach, présentée à nouveau, comprend aussi cette traduction. La traduction ukrainienne contient une esquisse biographique de Banach, qui n'existe pas dans l'édition française du livre.