constitue un ensemble dense dans Ψ; par conséquent, son complémentaire (comme celui d'un G_δ dense) est de I-e catégorie dans Ψ. Enfin, soit $\{T_n\}$ une suite appartenant à Γ. D'après le lemme 1, en prenant pout E l'espace (C), pour H l'ensemble des polynômes (6) et pour ω l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, cet intervalle contient un ensemble τ jouissant des propriétés $1°-4°$. Comme il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $M > 0$ une fonction $x(t) \in (C)$ de norme $\|x\| = 1$ satisfaisant à (14), on a d'après la propriété 4° mes $\tau = 0$. Il en résulte en vertu de la propriété 2° de τ que (5) se présente pour toute fonction $x(t) \in (C)$, sauf une famille de fonctions qui est de I-e catégorie dans (C), c.q.f.d.

Démonstration du théorème 5. Le lemme 2 et les théorèmes 3 et 4 se démontrent pour Ψ_0 exactement de la même manière que pour Ψ.

Démonstration du théorème 1. Ce théorème résulte du théorème 5 en vertu du théorème général d'après lequel la partie commune de deux G_δ denses est un G_δ dense, donc a fortiori non vide.

(Reçu par la Rédaction le 3. 4. 1940)

Remarques sur les groupes et les corps métriques

(D'après une notice posthume [1])
publié dans Studia Math. 10 (1948), p. 178–181

1. Soit E un groupe. Si $x \in E$ et $H \subset E$, on désigne par xH l'ensemble des éléments de E de la forme xy où $y \in H$. On a évidemment

$$x(E-H) = E - xH \tag{1}$$

et, quel que soit l'ensemble des valeurs de l'indice ι,

$$x\sum_\iota H_\iota = \sum_\iota xH_\iota. \tag{2}$$

Admettons qu'une convergence est définie dans le groupe E et considérons les conditions suivantes:

(3) $\lim x_n = x$ entraîne $\lim x_n y = xy$,
(4) $\lim x_n = u$ et $\lim x_n^{-1} = v$ entraînent $u = v^{-1}$,
(5) $\lim x_n = x$ entraîne $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$,
(6) $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$ entraînent $\lim x_n y_n = xy$.

Lemme. *La convergence dans le groupe E étant assujettie à la condition* (3) *et l'ensemble $H \subset E$ ou l'ensemble $E-H$ étant de I^e catégorie, il en est respectivement de même des ensembles xH et $E-xH$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. H' désignant l'ensemble dérivé de H, on a en vertu de (3)

$$(xH)' = xH'. \tag{7}$$

Rappelons que pour H non-dense dans E, on a par définition $(E-H')' = E$. En appliquant (7), (2) et ensuite (1), on aboutit facilement à la thèse du lemme, c.q.f.d.

Remarque. L'égalité (7) implique que si $H \subset E$ est fermé, il en est de même de xH et réciproquement. On en déduit aisément à l'aide de (1), (2) et (7) que si $H \subset E$ est un ensemble borelien, l'ensemble xH est borelien de la même classe et réciproquement.

[1] Préparé pour l'impression par S. Hartman.

2. Admettons à présent qu'une distance $\varrho(x,y)$ est définie dans le groupe E. Entendons-y désormais la convergence comme celle qui est déterminée par $\varrho(x,y)$.

THÉORÈME I. *Si le groupe E est un espace métrique complet satisfaisant aux conditions* (3) *et* (4), *la condition* (5) *y est également satisfaite**.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où le groupe E est un espace complet séparable.

Désignons par C l'ensemble des couples ordonnés $[x,y]$ où $x\in E$ et $y\in E$. Métrisons C de la manière suivante:

$$\varrho([x,y],[u,v]) = \varrho(x,u)+\varrho(y,v). \tag{8}$$

Il est facile de voir que

(i) l'espace métrique C est complet séparable.

Nous allons montrer qu'aussi

(ii) l'espace métrique $E_1\subset C$ composé de tous les couples $[x,x^{-1}]$ est complet séparable.

En effet, si une suite $\{[x_n,x_n^{-1}]\}$ satisfait à la condition de Cauchy, il existe dans C en vertu de (i) un couple $[u,v] = \lim[x_n,x_n^{-1}]$. Il en résulte en vertu de (8) que $u = \lim x_x$ et $v = \lim x_n^{-1}$, d'où $v = u^{-1}$ en vertu de (4) et par conséquent $[u,v]\in E_1$. La propriété (ii) se trouve ainsi établie.

Pour en déduire (5), considérons la fonction

$$y = F(x) = [x,x^{-1}].$$

On a évidemment $y\in E_1$ et la fonction $F(x)$ est inverse de la fonction $x = F^{-1}(y)$ qui transforme de façon biunivoque et continue E_1 en E. Il en résulte que la fonction $F(x)$ satisfait à la condition de Baire. Elle est donc continue sur un ensemble $H\subset E$ tel que $E-H$ est de I^e catégorie dans E. Considérons dans E une suite convergente quelconque $\{x_n\}$ et soit $x_0 = \lim x_n$. En vertu du lemme, les ensembles $E-x_n^{-1}H$ et $E-x_0^{-1}H$ sont de I^e catégorie. E étant par hypothèse un espace complet séparable, la partie commune $\prod_{n=0}^{\infty} x_n^{-1}H$ n'est pas vide. Il existe donc des $u_n\in H$ et $u\in H$ tels que $x_n^{-1}u_n = x_0^{-1}u$ pour $n = 1,2,\ldots$ Soit $z = x_0^{-1}u$. Par conséquent $x_nz = u_n$ pour $n = 1,2,\ldots$ et $x_0z = u$, d'où $\lim u_n = u$ en vertu de (3).

* Dans le cas où la groupe E est un espace séparable, ce théorème a été énoncé dans D. Montgomery, *Continuity in topological groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), p. 879–882. Dans le cas où la groupe E n'est pas un espace séparable, la démonstration présentée ici n'est pas complète, parce qu'on ne sait pas si la groupe E_2 est séparable. Pour une simple démonstration du théorème I dans le cas général, voir W. Żelazko, *A theorem on B_0-division algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), p. 373–375 (Note de la Rédaction).

Il en résulte par suite de la continuité de $F(x)$ dans H que $\lim u_n^{-1} = u^{-1}$, donc $\lim zu_n^{-1} = zu^{-1}$, c'est-à-dire $\lim x_n^{-1} = x_0^{-1}$, de sorte que le théorème se trouve établi dans le cas considéré.

Reste à l'établir dans le cas où le groupe E n'est pas un espace séparable.

Soit $x_0 = \lim x_n$. Désignons par E_2 le plus petit sous-groupe de E qui y est un ensemble fermé et qui contient x_0 et x_n pour $n = 1,2,\ldots$ Le groupe E_2 satisfait évidemment aux hypothèses du théorème et il est un espace séparable. Il suffit donc de lui appliquer le raisonnement qui précède pour conclure que $\lim x_n^{-1} = x_0^{-1}$, c.q.f.d.

Remarque. Les hypothèses (3) et (4) du théorème I peuvent être remplacées par la condition (6) qui les implique évidemment.

3. Soit à présent E un espace métrique complet avec une métrique $\varrho(x,y)$ assujettie à la condition (6) et dans lequel une multiplication associative et un élément-unité 1 sont définies:

$$(xy)z = x(yz), \tag{9}$$

$$x1 = 1x = x. \tag{10}$$

Appelons *inverse de* x et désignons par x^{-1} un élément de E tel que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Il n'est pas supposé que tout élément de E admette un élément inverse; soit E^* l'ensemble de tous ceux dont les inverses existent.

THÉORÈME II. *Pour que la fonction $f(x) = x^{-1}$ soit continue dans E, il faut et il suffit que l'ensemble E^* soit un G_δ.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, l'ensemble H des points de E dans lesquels l'oscillation de la fonction x^{-1} s'annule est un G_δ. En admettant donc que cette fonction est continue dans E^*, on a $E^*\subset H$. D'autre part, si $x\in H$ et $x = \lim x_n$ où $x_n\in E^*$ pour $n = 1,2,\ldots$, la suite $\{x_n^{-1}\}$ converge, elle aussi, vers un $y\in E$. En vertu de (6), on a donc $\lim x_nx_n^{-1} = xy$, c'est-à-dire $xy = 1$, d'où $y = x^{-1}$ et par conséquent $x\in E^*$. On a donc $H\subset E^*$. Ainsi $E^* = H$, et E^* est un G_δ.

La condition est suffisante. Il existe donc dans E^* une métrique $\varrho^*(x,y)$ avec laquelle E^* est un espace complet et $\lim\varrho^*(x_n,x) = 0$ equivaut à $\lim\varrho(x_n,x) = 0$. On conclut donc en vertu de la condition (6) admise pour la métrique $\varrho(x,y)$ que $\lim\varrho^*(x_n,x) = 0$ et $\lim\varrho^*(y_n,y) = 0$ entraînent $\lim\varrho^*(x_ny_n,xy) = 0$. En appliquant donc à E^*, qui est un groupe, le théorème I et la remarque qui le suit, on conclut que, dans E^*, $\lim\varrho^*(x_n,x) = 0$ entraîne $\lim\varrho^*(x_n^{-1},x^{-1}) = 0$ et, par suite de l'équivalence des métriques, $\lim\varrho(x_n,x) = 0$ entraîne $\lim\varrho(x_n^{-1},x^{-1}) = 0$, c.q.f.d.

Remarque. Si, avec une métrique donnée, E est un corps complet et, en outre, l'opération de multiplication y est continue, $\lim x_n = x$ entraîne $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$ pour $x_n \neq 0 \neq x$.

En effet, seul l'élément $x = 0$ n'admet dans ce cas d'élément inverse.

(Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1948)

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME I

Travaux de Stefan Banach et commentaires