# Sur la divergence des interpolations

publié dans Studia Math. 9 (1940), p. 156–165.

**1.** Soit $(C)$ l'espace des fonctions $x(t)$, continues dans l'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant 1$. L'espace $(C)$ est vectoriel, normé et complet avec la norme

$$\|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|.$$

Considérons dans l'espace $(C)$ une suite de fonctions $\{x_i(t)\}$ assujettie aux conditions:

(I) La suite $\{x_i(t)\}$ est *complète dans* $(C)$, c.-à-d. que pour toute fonction $x(t) \in (C)$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un système fini de nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big\| < \varepsilon;$$

(II) Pour tout système de nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et de points

$$0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1,$$

les relations

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t_j) = 0 \quad \text{où} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

entraînent

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

En désignant par $\Phi_n$ la famille de tous les systèmes $(T)$ de $n$ points de l'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant 1$, considérons une suite arbitraire $T_1, T_2, \ldots$, où $T_n \in \Phi_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, à savoir où le système $T_n$ est composé de points

$$(T_n) \qquad 0 \leqslant t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leqslant 1.$$

Pour toute fonction $x(t) \in (C)$ et pour tout $n = 1, 2, \ldots$, il existe en vertu de (II) un et un seul système de nombres $\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}$ satisfaisant aux relations

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} x_i(t_j^{(n)}) = x(t_j^{(n)}) \quad \text{où} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$



Posons

$$U_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} x_i(t).$$

Les fonctions $U_n(x, t)$ portent le nom d'*interpolations de la fonction* $x(t)$ *relatives à la suite de fonctions* $\{x_i(t)\}$. Telles sont p. ex. les interpolations polynômiales (relatives à la suite $\{t^n\}$), trigonométriques (relatives à la suite $\{\sin nt, \cos nt\}$), etc.

J'établis dans cet ouvrage les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Etant donnée dans l'espace* $(C)$ *une suite quelconque* $\{x_i(t)\}$ *de fonctions assujetties aux conditions* (I) *et* (II), *il existe une fonction* $x(t) \in (C)$ *et une suite d'ensembles* $\{T_n\}$ *telles que*

(1) $T_n \subset T_{n+1}$ *pour* $n = 1, 2, \ldots;$

(2) *l'ensemble* $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ *est dense dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant 1$;

(3) $\overline{\lim}_{n\to\infty} |U_n(x, t)| = +\infty$ *presque partout dans cet intervalle.*

THÉORÈME 2. *Etant données une suite quelconque* $\{x_i(t)\}$ *de fonctions de* $(C)$ *assujetties aux conditions* (I) *et* (II) *et une suite* $\{T_n\}$ *d'ensembles dont la somme* $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ *n'est pas dense dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *il existe une fonction* $x(t) \in (C)$ *telle que*

(4) $\overline{\lim}_{n\to\infty} |U_n(x, t)| = +\infty$ *presque partout en dehors du dérivé* [1] $\Sigma'$ *de* $\Sigma$.

Pour chaque $n = 1, 2, \ldots$, introduisons dans la famille $\Phi_n$ une distance entre deux systèmes de points:

(A) $\qquad 0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant 1,$

(B) $\qquad 0 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_n \leqslant 1,$

par la formule:

$$(A, B) = |a_1 - b_1| + \sum_{i=1}^{n-1} |(a_{i+1} - a_i)^{-1} - (b_{i+1} - b_i)^{-1}|.$$

La famille $\Phi_n$ devient alors un espace métrique complet.

De même, introduisons dans la famille $\Psi$ de toutes les suites $\{T_n\}$ telles que $T_n \in \Phi_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, une distance entre deux suites $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ par la formule:

$$(\{A_n\}, \{B_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(A_n, B_n)}{1 + (A_n, B_n)}.$$

Alors la famille $\Psi$ devient aussi un espace métrique complet.

[1] C.-à.-d. de l'ensemble des points d'accumulation.

Je montre qu'on a les théorèmes suivants:

THÉORÈME 3. *Pour toute suite* $\{T_n\} \in \Psi$, *sauf une famille de suites qui est de I-e catégorie dans* $\Psi$, *l'ensemble* $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ *est dense dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

THÉORÈME 4. *Soit dans* (C) *une suite quelconque* $\{x_i(t)\}$ *de fonctions assujetties aux conditions* (I) *et* (II). *Alors pour toute suite de systèmes* $\{T_n\} \in \Psi$, *sauf une famille de suites qui est de I-e catégorie dans* $\Psi$, *les interpolations* $U_n(x, t)$ *relatives à cette suite satisfont à la condition*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x, t)| = +\infty \tag{5}$$

*presque partout dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *pour toute fonction* $x(t) \in (C)$, *sauf une famille de fonctions qui est de I-e catégorie dans* (C).

Soit enfin $\Psi_0$ le sous-espace de $\Psi$ composé de toutes les suites $\{T_n\}$ assujetties à la condition (1). En gardant la distance introduite dans $\Psi$, l'espace $\Psi_0$ est évidemment aussi métrique et complet.

Je montre le

THÉORÈME 5. *Les théorèmes* 3 *et* 4 *subsistent en remplaçant* $\Psi$ *par* $\Psi_0$.

Il en résulte aussitôt le théorème 1.

**2.** Considérons un espace quelconque $E$ vectoriel, normé et complet, et l'espace $S_\omega$ de toutes les fonctions $u(t)$ mesurables (*L*) dans l'ensemble $\omega \subset (0,1)$ avec la norme

$$\|u\| = \int_\omega \frac{|u(t)|}{1+|u(t)|}\,dt. \tag{5$_1$}$$

LEMME 1. *Soient H un ensemble dense dans E et*

$$y_n(t) = U_n(x, t) \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots, x \in E,\ t \in \omega,\ y_n(t) \in S_\omega,$$

*une suite d'opérations linéaires. Si pour tout* $x \in H$ *la suite de fonctions* $\{y_n(t)\}$ *converge presque partout dans* $\omega$, *il existe un ensemble* $\tau \subset \omega$ *ayant les propriétés suivantes*:

1° $\lim_{n\to\infty} U_n(x, t)$ *existe presque partout dans* $\tau$ *pour tout* $x \in E$;

2° $\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x, t)| = +\infty$ *presque partout dans* $\omega - \tau$ *pour tout* $x \in E$, *sauf un ensemble des x de I-e catégorie dans E*;

3° *l'opération* $y(t) = U(x, t) = \lim_{n\to\infty} U_n(x, t)$, *où* $x \in E$, $t \in \tau$ *et* $y(t) \in S_\tau$, *est linéaire*;

4° *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $M > 0$ *tel que*

$$\text{mes} \mathop{\mathrm{E}}_{t\in\tau} [|U_n(x, t)| < M\|x\| \ \text{pour}\ n = 1, 2, \ldots] \geqslant (1-\varepsilon) \text{ mes } \tau$$

*pour tout* $x \in E$.



Démonstration. Les propriétés 1° et 2° ont été établies par M. S. Saks [2]. La propriété 3° résulte immédiatement du théorème d'après lequel la limite d'opérations linéaires en est également une [3]. Pour démontrer 4°, posons

$$V_n(x, t) = \max |U_i(x, t)| \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ x \in E,\ t \in \tau.$$

L'opération

$$z_n(t) = V_n(x, t) \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots, x \in E,\ t \in \tau,\ z_n(t) \in S_\tau$$

est *quasi-linéaire*, c.-à-d. continue et satisfaisant aux conditions:

$$\|V_n(x_1 + x_2, t)\| \leqslant \|V_n(x_1, t)\| + \|V_n(x_2, t)\|,$$

$$\|V_n(\lambda x, t)\| = \|\lambda V_n(x, t)\|.$$

Par conséquent [4] l'opération

$$z(t) = V(x, t) = \lim_{n\to\infty} z_n(t) \quad \text{où} \quad x \in E,\ t \in \tau,\ z(t) \in S_\tau,$$

est aussi quasi-linéaire; il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que $\|x\| < \delta$ entraîne $\|z\| < \varepsilon$ [5]. Il en résulte facilement 4° en vertu de $(5)_1$.

LEMME 2. *La famille de toutes les suites de systèmes* $\{T_n\}$ *pour lesquelles le dérivé* $\Sigma'$ *de l'ensemble* $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ *est de mesure nulle est dense dans* $\Psi$.

Démonstration. Soient $\{A_n\}$ une suite appartenant à $\Psi$ et $\varepsilon > 0$ un nombre réel donné d'avance. Fixons un entier positif $m$ de façon à avoir $1/2^m < \varepsilon$ et posons $T_n = A_n$ pour $n = 1, 2, \ldots, m$. On peut évidemment choisir les systèmes de points $T_{m+1}, T_{m+2}, \ldots$, de manière que la suite $\{T_n\}$ appartienne à $\Psi$ et que l'on ait mes $\Sigma' = 0$. On aura alors

$$(\{A_n\}, \{T_n\}) \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} < \varepsilon, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

**3.** Démonstration du théorème 2. Posons

$$y_{n,i}(t) = U_n(x_i, t) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots$$

Nous aurons évidemment

$$\lim_{n\to\infty} y_{n,i}(t) = x_i(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;\ i = 1, 2, \ldots$$

---

(2) S. Saks [*Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions*], Fundamenta Mathematicae 10 (1924) [p. 186–196], p. 192.

(3) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Warszawa 1932, p. 23–24 [ce volume, p. 40–41].

(4) S. Mazur et W. Orlicz [*Über Folgen linearer Operationen*], Studia Mathematica 4 (1933) [p. 152–157], p. 157, théorème 6.1.

(5) Ibidem, p. 157, théorème 3.1. Cf. aussi S. Saks, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), p. 160–170.

Désignons par $H$ l'ensemble de tous les polynômes

(6) $$z(t) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i x_i(t) \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots$$

En posant

$$Z_n(t) = U_n(z, t),$$

nous avons donc

(6)₁ $$\lim_{n\to\gamma} Z_n(t) = z(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;\ z \in H.$$

Or, l'ensemble $H$ étant dense dans l'espace $(C)$, il existe en vertu du lemme 1 (pour $E = (C)$ et $\omega = (0, 1)$) un ensemble $\tau \subset (0, 1)$ ayant les propriétés 1°–4°. Nous allons montrer que

(7) $$\text{mes}\,(\tau - \Sigma') = 0,$$

où $\Sigma'$ désigne l'ensemble dérivé de $\Sigma = \sum_{n=1}^{\gamma} T_n$.

Soit à ce but

(8) $$\zeta \subset (0, 1) - (\Sigma + \Sigma')$$

un ensemble fermé. Considérons une fonction arbitraire $v(t)$, continue dans $(0, 1)$ et telle que

(9) $$v(t) \begin{cases} \neq 0 & \text{pour} \quad t \in \zeta, \\ = 0 & \text{pour} \quad t \in \Sigma + \Sigma'. \end{cases}$$

Comme ensemble dense dans $(C)$, $H$ contient une suite $\{z_i(t)\}$ de polynômes, telle que

(10) $$\lim_{i\to\infty} \|z_i - v\| = 0.$$

En posant

$$Z_{n,i}(t) = U_n(z_i, t), \qquad v_n(t) = U_n(v, t),$$

nous avons en vertu de (6)₁

(11) $$\lim_{n\to\gamma} Z_{n,i}(t) = z_i(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots$$

En vertu de (9), on a d'autre part $v_n(t) \equiv 0$, où $v_n(t) = U_n(v, t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, d'où

(12) $$\lim_{n\to\infty} v_n(t) \equiv 0.$$

On conclut de (10) et (11) en vertu de la propriété 3° de $\tau$ que

$$v(t) = \lim_{i\to\gamma} z_i(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t) \text{ presque partout dans } \tau.$$

Comme, selon (9), $v(t) \neq 0$ pour $t \in \zeta$, on a selon (12) mes $\tau\zeta = 0$.



Il en résulte aussitôt (7), puisque $\zeta$ est par définition un ensemble fermé arbitraire satisfaisant à (8). Or, les propriétés 2° et (7) de $\tau$ entraînent la relation (4), c.q.f.d.

**Démonstration du théorème 3.** Etant donné un $\varepsilon > 0$, désignons par $\Gamma(\varepsilon)$ la famille de toutes les suites $\{T_n\}$ de $\Psi$ à chacune desquelles on peut faire correspondre un entier positif $n$ tel que

(13) $$t_1^{(n)} < \varepsilon,\ t_2^{(n)} - t_1^{(n)} < \varepsilon,\ \ldots,\ t_{n-1}^{(n)} - t_{n-2}^{(n)} < \varepsilon,\ 1 - t_n^{(n)} < \varepsilon.$$

Ainsi définie, la famille $\Gamma(\varepsilon)$ constitue évidemment un ensemble ouvert dans $\Psi$. Par conséquent

$$\Gamma = \prod_{k=1}^{\infty} G(1/k)$$

est un $G_\delta$ dans $\Psi$.

D'autre part, il est facile de voir que $\Gamma$ est la famille de toutes les suites $\{T_n\}$ pour lesquelles les ensembles $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ sont denses dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Enfin, soient $\{A_n\}$ une suite appartenant à $\Psi$ et $\eta > 0$ un nombre réel donné d'avance. Fixons un entier positif $m$ de façon à avoir $1/2^m < \eta$. La famille $\Gamma$ contient évidemment une suite $\{T_n\}$ telle que $T_n = A_n$ pour $n = 1, 2, \ldots, m$. Par conséquent

$$(\{A_n\}, \{T_n\}) < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} < \eta,$$

ce qui montre que $\Gamma$ est dense dans $\Psi$. Or, le complémentaire d'un $G_\delta$ dense étant de I-e catégorie, le théorème se trouve démontré.

**Démonstration du théorème 4.** Etant donnés deux nombres $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, désignons par $\Gamma(\varepsilon, M)$ la famille de toutes les suites $\{T_n\}$ de $\Psi$ à chacune desquelles on peut faire correspondre une fonction $x(t) \in (C)$ de norme $\|x\| = 1$ et telle que les interpolations correspondantes $U_n(x, t)$ satisfassent à la condition

(14) $$\text{mes} \mathop{\mathrm{E}}_{0 \leqslant t \leqslant 1} [|U_n(x, t)| < M \text{ pour } n = 1, 2, \ldots] < \varepsilon.$$

Ainsi définie, la famille $\Gamma(\varepsilon, M)$ constitue évidemment un ensemble ouvert dans $\Psi$ et par conséquent

$$\Gamma = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{M=1}^{\infty} \Gamma(1/k, M)$$

est un $G_\delta$ dans $\Psi$.

D'autre part, $\Gamma$ contient en vertu du théorème 2 toute suite $\{T_n\}$ pour laquelle on a mes $\Sigma' = 0$, de sorte qu'en vertu du lemme 2 la famille $\Gamma$

constitue un ensemble dense dans $\Psi$; par conséquent, son complémentaire (comme celui d'un $G_\delta$ dense) est de I-e catégorie dans $\Psi$. Enfin, soit $\{T_n\}$ une suite appartenant à $\Gamma$. D'après le lemme 1, en prenant pout $E$ l'espace $(C)$, pour $H$ l'ensemble des polynômes (6) et pour $\omega$ l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, cet intervalle contient un ensemble $\tau$ jouissant des propriétés $1°-4°$. Comme il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $M > 0$ une fonction $x(t) \in (C)$ de norme $\|x\| = 1$ satisfaisant à (14), on a d'après la propriété 4° mes $\tau = 0$. Il en résulte en vertu de la propriété 2° de $\tau$ que (5) se présente pour toute fonction $x(t) \in (C)$, sauf une famille de fonctions qui est de I-e catégorie dans $(C)$, c.q.f.d.

Démonstration du théorème 5. Le lemme 2 et les théorèmes 3 et 4 se démontrent pour $\Psi_0$ exactement de la même manière que pour $\Psi$.

Démonstration du théorème 1. Ce théorème résulte du théorème 5 en vertu du théorème général d'après lequel la partie commune de deux $G_\delta$ denses est un $G_\delta$ dense, donc a fortiori non vide.

*(Reçu par la Rédaction le 3. 4. 1940)*

# Remarques sur les groupes et les corps métriques

**(D'après une notice posthume [1])**

**publié dans Studia Math. 10 (1948), p. 178–181**

**1.** Soit $E$ un groupe. Si $x \in E$ et $H \subset E$, on désigne par $xH$ l'ensemble des éléments de $E$ de la forme $xy$ où $y \in H$. On a évidemment

$$x(E-H) = E-xH \tag{1}$$

et, quel que soit l'ensemble des valeurs de l'indice $\iota$,

$$x\sum_{\iota} H_\iota = \sum_{\iota} xH_\iota . \tag{2}$$

Admettons qu'une convergence est définie dans le groupe $E$ et considérons les conditions suivantes:

(3) $\lim x_n = x$ entraîne $\lim x_n y = xy$,

(4) $\lim x_n = u$ et $\lim x_n^{-1} = v$ entraînent $u = v^{-1}$,

(5) $\lim x_n = x$ entraîne $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$,

(6) $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$ entraînent $\lim x_n y_n = xy$.

Lemme. *La convergence dans le groupe $E$ étant assujettie à la condition* (3) *et l'ensemble $H \subset E$ ou l'ensemble $E-H$ étant de* I$^e$ *catégorie, il en est respectivement de même des ensembles $xH$ et $E-xH$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. $H'$ désignant l'ensemble dérivé de $H$, on a en vertu de (3)

$$(xH)' = xH'. \tag{7}$$

Rappelons que pour $H$ non-dense dans $E$, on a par définition $(E-H')' = E$. En appliquant (7), (2) et ensuite (1), on aboutit facilement à la thèse du lemme, c.q.f.d.

Remarque. L'égalité (7) implique que si $H \subset E$ est fermé, il en est de même de $xH$ et réciproquement. On en déduit aisément à l'aide de (1), (2) et (7) que si $H \subset E$ est un ensemble borelien, l'ensemble $xH$ est borelien de la même classe et réciproquement.

---

[1] Préparé pour l'impression par S. Hartman.