Über das „Loi suprême" von J. Hoene-Wroński

publié dans Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A: Sciences Mathématiques; présenté le 6 Février 1939.

Das „Loi suprême" von Hoene-Wroński (¹) betrifft die Entwicklung einer Funktion $x(t)$ in Reihen der Form

$$(*) \qquad x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i(t),$$

wobei die Funktionen $x_i(t)$ beliebig gegeben sind.

Den Inhalt dieses Gesetzes bildet eine Vorschrift für die Berechnung der Koeffizienten α_i, wenn die Funktionen

$$x(t), \quad x_i(t), \quad x_2(t), \ldots$$

bekannt sind.

Die Entwicklung $(*)$ ist nicht immer möglich und daher jene Vorschrift nicht immer anwendbar. Nichtdestoweniger führte sie, was das Aufsehen der damaliger Mathematiker (u.a. von Lagrange) erregte, zu richtigen Formeln für die Koeffizienten α_i der damals bekannten Reihenentwicklungen von Taylor, nach den Potenzen einer gegebenen Funktion, ferner der Entwicklungen von Bürmann, von Lagrange und anderen.

Den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet der Nachweis, dass unter sehr allgemeinen Voraussetzungen das von Hoene-Wroński angegebene Verfahren für die Berechnung der Koeffizienten innerhalb einer recht umfassenden Funktionenklasse zum Ziel führt, welche von den gegebenen Funktionen $x_i(t)$ abhängig ist.

Setzt man z.B. voraus, dass die $x_i(t)$ stetige Funktionen sind, und verlangt, dass die Reihe $(*)$ gleichmässig konvergent sei, so zeigt sich, dass die Hoene-Wroński'schen Formeln für Funktionen $x(t)$ gelten, welche in

(¹) Vgl. S. Dickstein, *O „Prawie najwyższem" Hoene-Wrońskiego w matematyce*, Prace Matematyczno-Fizyczne 2 (1890), S. 145–168 und die dort angeführten Arbeiten von Hoene-Wroński.

dieser Form durch gleichmässig konvergente Reihen darstellbar sind, in welchen die Koeffizienten eine bestimmte Wachstumsordnung besitzen. Sind also von andersher Formeln für die Koeffizienten α_i bekannt, so müssen sie mit denjenigen von Hoene-Wroński übereinstimmen, falls die Koeffizienten α_i die erwähnte Wachstumsordnung besitzen.

Die Paragraphen 1, 2 enthalten gewisse Begriffe und Sätze aus der Theorie der linearen Funktionale (²), der § 3 die Gestalt des »loi suprême« im Rahmen dieser Theorie, schliesslich der § 4 die Interpretation dieses Gesetzes in besonderen Fällen.

§ 1. Es sei E ein beliebiger Raum vom Typus (B) (²). Wir bezeichnen mit (B^x) die kleinste Menge additiver, in beliebigen linearen Teilräumen von E erklärter Funktionale, welche den beiden Bedingungen genügt:

1. (B^x) enthält alle linearen Funktionale.
2. Sind $f_n(x)$ additive Funktionale aus (B^x), die in demselben linearen Teilraum L von E erklärt sind, und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ in L, so gehört auch $f(x)$ zu (B^x).

Offenbar ist jedes Element von (B^x) ein Baire'sches Funktional; es ist nicht bekannt, ob auch umgekehrt jedes additive Baire'sche Funktional in (B^x) enthalten ist.

Wir sagen, dass ein linearer Teilraum L die Eigenschaft (A) besitzt, falls zu jeder Folge $\{x_i\}$ aus L eine Folge positiver Zahlen $\{M_i\}$ existiert, derart dass für jede Zahlenfolge $\{\alpha_i\}$, welche der Bedingung

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty$$

genügt, die Reihe

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

konvergiert und ihre Summe in L enthalten ist.

Der Gesamtraum E besitzt offenbar die Eigenschaft (A).

SATZ 1. *Wenn die linearen Teilräume $L_1, L_2, \ldots$ die Eigenschaft (A) besitzen, so gilt das Gleiche von ihrem Durchschnitt L.*

B e w e i s. Es sei $\{x_i\}$ eine Folge aus L. Nach der Voraussetzung gibt es zu jedem L_n eine Folge positiver Zahlen $\{M_i^n\}$, derart dass aus $\sum_{i=1}^{\infty} M_i^n |\alpha_i| < \infty$ die Konvergenz der Reihe (2) folgt und ihre Summe in L_n enthalten ist. Setzt man $M_i = \max_{n=1,\ldots,i} \{M_i^n\}$, so besitzt die Zahlenfolge $\{M_i\}$ für alle L_n dieselbe Eigenschaft, also auch für den Durchschnitt L. Daher

(²) Vgl. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932 [ce volume, p. 23–216].

folgt aus der Konvergenz der Reihe (1) diejenige von (2) und die Summe der letzteren Reihe gehört zu L.

§ 2. SATZ 2. a) *Ist $\{x_i\}$ eine Folge aus E und M_i eine Folge positiver Zahlen von der Eigenschaft, dass aus der Konvergenz der Reihe* (1) *diejenige von* (2) *folgt, so gibt es eine positive Konstante K, derart dass für jede der Bedingung* (1) *genügende Zahlenfolge $\{\alpha_i\}$ die Ungleichung*

$$(3) \qquad \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \Big\| \leqslant K \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i$$

stattfindet.

b) *Ist $f(x)$ ein additives Funktional aus (B^x), welches in einemwlinearen Teilraum L erklärt ist, der die Summen der Reihen* (2) (*mit der Bedingung* (1)) *enthält, so gilt für jede der Bedingung* (1) *genügende Zahlenfolge $\{\alpha_i\}$ die Beziehung*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x_i).$$

Beweis. Es bezeichne H den Raum der Zahlenfolgen $\{\alpha_i\}$, die der Bedingung (1) genügen. Wir normieren diesen Raum folgendermassen:

$$\|\{\alpha_i\}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i.$$

Wie leicht ersichtlich, ist dann H ein Raum vom Typus (B).

Wir definieren in H eine Folge linearer Operationen $\{U_n\}$ durch

$$U_n(\{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad (\{\alpha_i\} \in H) \ (n = 1, 2, \ldots),$$

sowie die Operation

$$U(\{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i,$$

welche wegen

$$\lim_{n\to\infty} U_n\{\alpha_i\} = U(\{\alpha_i\})$$

ebenfalls linear ist. Es gibt also eine positive Konstante K, für welche die Ungleichung (3) stattfindet. Ferner ist

$$(4) \qquad F(\{\alpha_i\}) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big) = f[U(\{\alpha_i\})]$$

ein im ganzen Raume H erklärtes Baire'sches Funktional. Hieraus folgt bekantlich, dass $F(\{\alpha_i\})$ ein lineares Funktional ist.

Es sei $a = \{\alpha_i\}$ eine Zahlenfolge aus H. Setzt man

$$a_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots),$$

so ist $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ im Sinne der gewählten Norm. Daher gilt $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = F(a)$, also wegen (4)

$$f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x_i).$$

SATZ 3. *Ist $\{z_n\}$ eine Folge aus E und $\{\bar{M}_n\}$ eine Folge positiver Zahlen von der Eigenschaft, dass für jede der Bedingung*

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \bar{M}_n < \infty$$

genügende Zahlenfolge $\{a_n\}$ die Reihe

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$$

konvergiert, so bilden alle so erhaltenen Elemente (6) *einen linearen Teilraum L, welcher die Eigenschaft* (*A*) *besitzt.*

Beweis. Nach Satz 2 gibt es eine Zahl $K > 0$, so dass für jede der Bedingung (5) genügende Zahlenfolge $\{a_n\}$ die Ungleichung

$$(7) \qquad \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \Big\| \leqslant K \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \bar{M}_n$$

stattfindet.

Es sei $\{x_i\}$ eine Folge aus L, also

$$(8) \qquad x_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i z_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^i| \bar{M}_n \equiv M_i < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wenn für eine Zahlenfolge $\{\alpha_i\}$ die Reihe $\sum |\alpha_i| M_i$ konvergiert, so folgt aus (7), (8)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \|x_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| K \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^i| \bar{M}_n = K \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty.$$

Demnach ist $\sum \alpha_i x_i$ konvergent. Setzt man

$$a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_n^i,$$

so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_n| \bar{M}_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| |a_n^i| \bar{M}_n = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty,$$

sowie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ ein Element des linearen Teilraumes L ist, welcher somit die Eigenschaft (A) besitzt.

SATZ 4. *Ist $\{f_n(x)\}$ eine Folge additiver Funktionale aus (B^x), die bzw. in linearen Teilräumen L_n erklärt sind, welche die Eigenschaft (A) besitzen, so ist die Konvergenzmenge der Folge $\{f_n(x)\}$ ein linearer Teilraum L von der Eigenschaft (A).*

Beweis. Es sei $\{x_i\}$ eine Folge aus L. Da sie in allen L_n enthalten ist, gibt es Folgen positiver Zahlen $\{M_i^n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, derart dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in L_n \quad \text{für} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i^n < \infty \tag{9}$$

gilt.

Wir setzen

$$h_i = \underset{n=1,2,\ldots}{\mathrm{ob.Gr.}} \{f_n(x_i)\}, \quad m_i = \underset{n=1,\ldots,i}{\mathrm{ob.Gr.}} \{M_i^n\}, \tag{10}$$

$$M_i = \max\{h_i, m_i, \|x_i\|\}. \tag{11}$$

Es sei $\{\alpha_i\}$ eine der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty \tag{12}$$

genügende Zahlenfolge. Nach (11) und (12) gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \|x_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty.$$

Daher ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x \tag{13}$$

konvergent. Da nach (10) und (11) die Ungleichungen

$$M_i \geqslant M_i^n \quad (n \leqslant i)$$

gelten, ist wegen (12) und (9) die Summe dieser Reihe in L_n enthalten. Nach Satz 2 b) und (10), (11) folgt weiter, dass für ein beliebiges N

$$\Big|f_n\Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big)\Big| = \Big|\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i f_n(x_i)\Big| \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i| |f_n(x_i)| \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i| M_i,$$

also, für beliebige p, q, N,

$$\Big|f_p\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big) - f_q\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big)\Big|$$

$$\leqslant \Big|f_p\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\Big) - f_q\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\Big)\Big| + \Big|f_p\Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big)\Big| + \Big|f_q\Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big)\Big|$$

$$\leqslant \Big|f_p\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\Big) - f_q\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\Big)\Big| + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i| M_i$$

gilt.

Für $p, q \to \infty$ strebt das erste Gield nach Null; ebenso strebt wegen (12) das zweite Glied nach Null, wenn $N \to \infty$. Daher ist die Folge $\{f_n(x)\}$ konvergent, wenn x die Summe der Reihe (13) bezeichnet. Somit gehört x zu L und L besitzt die Eigenschaft (A).

SATZ 5. *Jedes additive Funktional $f(x)$ aus (B^x) kann zu einem ebenfalls in (B^x) enthaltenen additiven Funktional $F(x)$ erweitert werden, das in einem linearen Teilraum L erklärt ist, welcher die Eigenschaft (A) besitzt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\bar{B}$ die Menge aller additiven Funktionale aus (B^x), welche sich auf diese Weise erweitern lassen. Offenbar enthält die Menge $\bar{B}$ alle linearen Funktionale.

Es sei $\{f_n(x)\}$ eine Folge additiver Funktionale aus $\bar{B}$, die in einem linearen Raume K erklärt sind und gegen das Funktional $f(x)$ konvergieren. Aus der Definition von $\bar{B}$ folgt, dass jedes $f_n(x)$ zu einem additiven Funktional $F_n(x)$ aus (B^x) erweitert werden kann, welches in einem linearen Teilraum L_n von der Eigenschaft (A) erklärt ist. Nach Satz 4, konvergiert die Folge $F_n(x)$ in einem gewissen linearen Teilraum L von der Eigenschaft (A) gegen ein Funktional $F(x)$ aus B^x. Offenbar ist $F(x) = f(x)$ in K, also $f(x)$ in $\bar{B}$ enthalten. Die Menge $\bar{B}$ erfüllt also die Bedingungen 1), 2) des § 1. Da (B^x) die kleinste derartige Menge ist, erweist sich $\bar{B}$ mit (B^x) identisch.

§ 3. Es sei $\{f_n(x)\}$ eine beliebige Folge additiver Funktionale aus (B^x), welche bzw. in linearen Räumen L_n von der Eigenschaft (A) erklärt sind, ferner $\{x_i\}$ eine in allen L_n enthaltene Folge. Wir setzen für $1 \leqslant m \leqslant n$ und $x \in K \equiv \prod_{n=1}^{\infty} L_n$

$$W_{m,n}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x_1), \ldots, f_1(x_{m-1}), f_1(x), f_1(x_{m+1}), \ldots, f_1(x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1), \ldots, f_n(x_{m-1}), f_n(x), f_n(x_{m+1}), \ldots, f_n(x_n) \end{vmatrix} \tag{14}$$

Wir nehmen an, dass für ein beliebiges System von Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Beziehungen

$$f_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{14'}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ zur Folge haben. Dann ist für alle n und $m \leqslant n$

$$W_{m,n}(x_m) \neq 0.$$

Setzt man

$$F_{m,n}(x) = \frac{W_{m,n}(x)}{W_{m,n}(x_m)} \quad (1 \leqslant m \leqslant n), \tag{15}$$

so ist $F_{m,n}$ ein in K erklärtes additives Funktional aus (B^x).

SATZ 7. *Es gibt einen linearen Teilraum L von der Eigenschaft (A), welcher alle x_i enthält, so dass für jedes x aus L der Grenzwert*

$$\Phi_m(x) \equiv \lim_{n\to\infty} F_{m,n}(x) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

existiert. Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} x_m \Phi_m(x)$ ist konvergent und

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \Phi_m(x).$$

Beweis. Offenbar ist

$$F_{m,n}(x_i) = \begin{cases} 1 & (1 \leqslant m = i \leqslant n), \\ 0 & (i \neq m,\ 1 \leqslant i \leqslant n); \end{cases}$$

also

$$\Phi_m(x_i) = \begin{cases} 1 & (m = i), \\ 0 & (m \neq i). \end{cases} \tag{17}$$

Daher ist $\Phi_m(x)$ in einem linearen Teilraume $\bar{L}_m$ von den Eigenschaft (A) erklärt, welcher die Elemente der Folge $\{x_i\}$ enthält. Dasselbe gilt vom Durchschnitt $\bar{L}$ der Räume $\bar{L}_m$. Nach Satz 1 besitzt $\bar{L}$ die Eigenschaft (A). Es gibt daher eine Folge positiver Zahlen $\{M_i\}$, derart, dass die lineare Menge L der Elemente

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty \tag{18}$$

in $\bar{L}$ enthalten ist und nach Satz 3 die Eigenschaft (A) besitzt. Ferner ist nach Satz 2 b)

$$\Phi_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi_m(x_i) \quad (x \in L,\ m = 1, 2, \ldots),$$

also wegen (17) $\Phi_m(x) = \alpha_m$ und daher wegen (18)

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \Phi_m(x) \quad (x \in L).$$

§ 4. Wir bezeichnen mit E den Raum der im Interval $0 \leqslant t \leqslant 1$ stetigen Funktionen $x(t)$ und normieren ihn in üblicher Weise: $\|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$. Die Eigenschaft (A) nimmt hier die folgende Gestalt an:

Ein linearer Teilraum L von E besitzt die. Eigenschaft (A), falls zu jeder Funktionenfolge $\{x_i(t)\}$ aus L eine Folge positiver Zahlen $\{M_i\}$ existiert, derart dass für jede der Bedingung $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| M_i < \infty$ genügende Zahlenfolge $\{\alpha_i\}$ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i(t)$ gleichmässig konvergiert und ihre Summe in L enthalten ist.

Es sei $\{x_i(t)\}$ eine Folge von im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ stetigen Funktionen Wir erklären die Folge der Funktionale $f_n(x)$ folgendermassen:

$$f_1(x) = x(0), \quad f_n(x) = \Delta^{n-1} x(0) \ (n = 2, 3, \ldots) \tag{19}$$

d.h. $f_n(x)$ bedeutet die $(n-1)$-te Differenz von $x(t)$ an der Stelle $t = 0$ für den Zuwachs $h = 1/n$. Die Funktionale $f_n(x)$ sind stetig, also linear.

Wir nehmen an, dass die Bedingung (14′) erfüllt sei und definieren $W_{m,n}(x)$ und $F_{m,n}$ durch die Formeln (14), (15). Dann sind die durch Formel (16) dargestellten Funktionale $\Phi_m(x)$ in einem gewissen linearen Teilraum L erklärt, welcher die Funktionen $x_i(t)$ enthält. Jedes $x(t)$ aus L lässt sich in eine gleichmässig konvergente Reihe

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m x_m(t) \quad (\alpha_m = \Phi_m(x)) \tag{20}$$

entwickeln.

Sind uns von andersher Formeln für die Koeffizienten α_m bekannt, so müssen sie, falls die Entwicklung eindeutig ist, mit (20) übereinstimmen. Ist z. B. $x_1(t) = 1$, $x_m(t) = t^{m-1}$, so erhält man für $x(t)$ aus L den Ausdruck $\Phi_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} x^{(m-1)}(0)$. Auf diese Weise erklärt sich die Tatsache, dass für die bekannten Reihenentwicklungen von Taylor, Lagrange u. a. die Hoene-Wroński'schen Formeln zu richtigen Ergebnissen führen.

Besitzen die Funktionen $x_i(t)$ stetige Ableitungen jeder Ordnung, so kann man z. B.

$$f_i(x) = x(0), \quad f_n(x) = x^{(n-1)}(0) \ (n > 1) \tag{21}$$

annehmen. Die Funktionale $r_n(x)$ sind jetzt nicht stetig in E, sie sind aber, wie leicht zu zeigen ist, Baire'sche Funktionale aus (B^x), definiert in einem linearen Teilraume von der Eigenschaft (A). Für diese Funktionale gelten also die Ergebnisse von § 3.

Die Beispiele (19) und (21) waren von Hoene-Wroński betrachtet.

In ähnlicher Weise lässt sich der Satz aus § 3 im Raume der beschränkten Funktionen, im Raume der mit der p-ten Potenz $(p \geqslant 1)$ integrierbaren Funktionen und in anderen Räumen deuten.