Über homogene Polynome in (L^2)

publié dans Studia Math. 7 (1938), p. 36–44.

§ 1. Wir bezeichnen mit E, E' zwei vektorielle, normierte und vollständige Räume. Eine für beliebige $x_1, \dots, x_n$ aus E erklärte Operation $u(x_1, \dots, x_n)$, deren Werte dem Raume E' angehören, nennen wir eine *n-lineare Operation*, falls sie stetig und additiv in bezug auf jede der Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ ist. Es ist bequem eine derartige Operation mit

$$ax_1, \dots, x_n \tag{1}$$

zu bezeichnen.

Eine n-lineare Operation ($n > 1$) heisse *symmetrisch*, wenn sich ihr Wert bei beliebigen Permutationen der Variablen nicht ändert. Werden in einer symmetrischen n-linearen Operation r_1 Variablen gleich z_1, weitere r_2 Variablen gleich $z_2, \dots$, schliesslich die letzten r_k Variablen gleich z_k gesetzt $(r_1 + \dots + r_k = n)$, so bezeichnen wir die so entstandene Operation mit

$$az_1^{r_1} \dots z_k^{r_k}.$$

Insbesondere ist

$$az^n = az \dots z.$$

Die Operation az^n nennen wir ein *homogenes Polynom n-ten Grades.* Wie leicht zu sehen, enstehen aus verschiedenen symmetrischen n-linearen Operationen stets verschiedene *homogene Polynome n-ten Grades.*

Als Norm einer n-linearen Operation $ax_1 \dots x_n$ erklären wir die Zahl

$$\|a\| = \underset{\|x_1\| \leqslant 1, \dots, \|x_n\| \leqslant 1}{\text{ob. Gr.}} \|ax_1 \dots x_n\|;$$

es ist also

$$\|ax_1 \dots x_n\| \leqslant \|a\| \cdot \|x_1\| \dots \|x_n\|,$$

insbesondere

$$\|ax^n\| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|^n \text{ (}^1\text{)}.$$

(1) Vgl. S. Mazur und W. Orlicz, *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen*, Studia Mathematica 5 (1935), S. 50–68, 179–189.

Ist E der m-dimensionale euklidische Raum, E' eine Zahlenmenge, so fallen die oben erklärten Operationen mit den gewöhnlichen n-linearen Formen, bzw. den homogenen Formen n-ten Grades zusammen. Bezeichnen ξ_j^i bzw. ξ_j $(j = 1, \dots, m)$ die Koordinaten des Vektors x_i bzw. x, so hat man

$$ax_1 \dots x_n = \sum_{j_1 \dots j_n = 1}^{m} a_{j_1 \dots j_n} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n,$$

$$ax^n = \sum_{j_1 \dots j_n = 1}^{m} a_{j_1 \dots j_n} \xi_{j_1} \dots \xi_{j_n},$$

$$\|a\| = \max |ax_1 \dots x_n| \quad \text{für} \quad \sum_{j=1}^{m} (\xi_j^i)^2 \leqslant 1 \ (i = 1, \dots, n).$$

Wir nehmen jetzt an, dass E der Raum (L^2) sei und dass E' in (L^2) enthalten sei und bezeichnen mit $ax_1 \dots x_n$ eine symmetrische n-lineare Operation. Jetzt bedeutet also x_i eine in $(0, 1)$ quadratisch integrierbare Funktion $x_i(t)$, ebenso ist $ax_1 \dots x_n$ eine derartige Funktion. Ist x_{n+1} ein weiteres Element aus (L^2), so ist

$$\int_0^1 (ax_1 \dots x_n) x_{n+1} \, dt \tag{2}$$

offenbar ein $(n+1)$-lineares Funktional (2).

Wir sagen, das homogene Polynom n-ten Grades ax^n sei symmetrisch, falls das entsprechende Funktional (2) symmetrisch ist. Insbesondere heisst die lineare Operation ax symmetrisch, falls

$$\int_0^1 (ax_1) x_2 \, dt = \int_0^1 (ax_2) x_1 \, dt$$

gilt. In diesem Falle stimmt also unser Symmetriebegriff mit dem von Herrn D. Hilbert in der Theorie der Integralgleichungen eingeführten überein.

Ein Beispiel eines symmetrischen homogenen Polynoms n-ten Grades in (L^2) ist

$$ax^n = \int_0^1 \dots \int_0^1 K(t_1, \dots, t_n, t) x(t_1) \dots x(t_n) \, dt_1 \dots dt_n,$$

wo K eine symmetrische Funktion der Variablen $t_1, \dots, t_n, t$ bedeutet, von der Eigenschaft, dass die rechte Seite stets dem Raume (L^2) angehört. Dies ist z.B. der Fall, wenn K in den Veränderlichen $t_1, \dots, t_n, t$ quadratisch integrierbar ist.

In dieser Arbeit beweisen wir die Sätze:

Satz I [§ 5]. *Ist $ax_1 \dots x_n$ eine symmetrische n-lineare Operation in (L^2),*

(2) Ein Funktional ist eine Operation, deren Wertmenge aus Zahlen besteht.

so gilt

$$\underset{\|x_1\|\leqslant 1,\dots,\|x_n\|\leqslant 1}{\text{ob. Gr.}} \|ax_1\dots x_n\| = \underset{\|x\|\leqslant 1}{\text{ob. Gr.}} \|ax^n\|$$ [3].

SATZ II [§ 6]. *Ist ax^n ein symmetrisches homogenes Polynom n-ten Grades in (L^2), so gibt es eine Folge $\{x_i\}$ und eine Zahl λ ($\|x_i\| = 1$ für $i = 1, 2, \dots$; $|\lambda| = 1/\|a\|$), derart dass*

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - \lambda a x_i^n\| = 0.$$

SATZ III [§ 6]. *Ist ax^n ein vollstetiges symmetrisches homogenes Polynom n-ten Grades in (L^2), so gibt es ein Element x und eine Zahl λ ($\|x\| = 1$, $|\lambda| = 1/\|a\|$), so dass*

$$x - \lambda a x^n = 0.$$

In den Sätzen II, III ist der Satz über Existenz von Eigenlösungen einer linearen Integralgleichung mit symmetrischem Kern als Sonderfall enthalten.

§ 2. Seien x, y $(x+y \neq 0)$ zwei Einheitsvektoren des euklidischen Raumes R_m, welche den Winkel α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ einschliessen. Wir bezeichnen mit $\varphi_n(x, y)$ den im Bereiche des Winkels α gelegenen Einheitsvektor, welcher mit y den Winkel α/n bildet, wobei n irgendeine natürliche Zahl bedeutet. Offenbar ist

$$x + \varphi_n(x, y) \neq 0, \quad y + \varphi_n(x, y) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{x+y}{\|x+y\|}.$$

Setzt man

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_k = \varphi_n(x_{k-2}, x_{k-1}) \ (k = 3, 4, \dots),$$

so ergibt sich leicht

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \varphi_{n+1}(x, y).$$

§ 3. HILFSSATZ 1. *Sei $az_1\dots z_n$ eine symmetrische n-lineare Form der Vektoren $z_1, \dots, z_n$ in R_m mit $\|a\| = 1$. Falls für zwei Einheitsvektoren x_1, x_2 die Beziehungen $x_1 + x_2 \neq 0$, $ax_1x_2^{n-1} = 1$ stattfinden und $x = \varphi_n(x_1, x_2)$ gesetzt wird, so ist $ax^n = 1$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$. Nach Voraussetzung ist

$$\|x_1\| = 1, \quad \|x_2\| = 1, \quad x_1 + x_2 \neq 0, \quad ax_1x_2 = 1, \quad \|a\| = 1.$$

[3] Die Werte der Operation $ax_1\dots x_n$ brauchen nicht zu (L^2) angehören.

Wir bezeichnen die Koordinaten von x_1, x_2 mit ξ_i^1 bzw. ξ_i^2 und schreiben

$$ax_1x_2 = \sum_{ik} a_{ik}\xi_i^1\xi_k^2 \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Dann ist

$$\sum_k \xi_k^2 \sum_i a_{ik}\xi_i^1 = \sum_i \xi_i^1 \sum_k a_{ik}\xi_k^2 = 1$$

und wegen $\|a\| = 1$

$$\sum_k \Big(\sum_i a_{ik}\xi_i^1\Big)^2 \leqslant 1, \quad \sum_i \Big(\sum_k a_{ik}\xi_k^2\Big)^2 \leqslant 1.$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$\sum_i a_{ik}\xi_k^1 = \xi_k^2 \ (k = 1, \dots, m), \quad \sum_k a_{ik}\xi_i^2 = \xi_i^1 \ (i = 1, \dots, m)$$

und hieraus, mit Rücksicht auf $a_{ik} = a_{ki}$,

$$\sum_k a_{ik}(\xi_k^1 + \xi_k^2) = \xi_i^1 + \xi_i^2 \quad (i = 1, \dots, m),$$

also

$$\sum_{ik} a_{ik}(\xi_i^1 + \xi_i^2)(\xi_k^1 + \xi_k^2) = \sum_i (\xi_i^1 + \xi_i^2)^2,$$

d.h.

$$a(x_1 + x)^2 = \|x_1 + x_2\|^2.$$

Setzt man nun $x = \varphi_2(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{\|x_1 + x_2\|}$, so ergibt sich wie behauptet

$$ax^2 = 1.$$

Wir nehmen jetzt unseren Hilfssatz für $n-1$ als richtig an; nach Voraussetzung ist

$$\|x_1\| = 1, \quad \|x_2\| = 1, \quad x_1 + x_2 \neq 0, \quad ax_1x_2^{n-1} = 1, \quad \|a\| = 1.$$

Wir setzen

$$\bar{a}z_1\dots z_{n-1} = ax_2z_1\dots z_{n-1};$$

dieser Ausdruck ist offenbar eine $(n-1)$-lineare symmetrische Form mit $\|\bar{a}\| \leqslant \|a\| = 1$. Wegen $\bar{a}x_1x_2^{n-2} = ax_1x_2^{n-1} = 1$ ist $\|\bar{a}\| = 1$. Da die Form $\bar{a}$ die Voraussetzungen unseres Satzes für $n-1$ erfüllt, gilt $\bar{a}x_3^{n-1} = 1$, oder

$$ax_2x_3^{n-1} = 1, \quad \text{wo} \quad x_3 = \varphi_{n-1}(x_1, x_2), \ x_2 + x_3 \neq 0$$

und ebenso

$$ax_3x_4^{n-1} = 1, \quad \text{wo} \quad x_4 = \varphi_{n-1}(x_2, x_3), \quad x_3 + x_4 \neq 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$ax_{k-1}x_k^{n-1} = 1, \quad \text{wo} \quad x_k = \varphi_{n-1}(x_{k-2}, x_{k-1}), \quad x_{k-1} + x_k \neq 0.$$

Da nach § 2 $\lim_{n\to\infty} x_k = \varphi_n(x_1, x_2)$ ist, ergibt sich durch Grenzübergang

$$ax^n = 1 \quad \text{für} \quad x = \varphi_n(x_1, x_2).$$

Hilfssatz 2. *Ist $az_1 \dots z_n$ eine symmetrische n-lineare Form der Vektoren $z_1, \dots, z_m$ in R_m mit $\|a\| = 1$, so gibt es einen Einheitsvektor x, für welchen $ax^n = \pm 1$ ist.*

Beweis. Ist zunächst $n = 2$, so gibt es wegen $\|a\| = 1$ zwei Einheitsvektoren x_1, x_2 für welche $ax_1x_2 = 1$ ist. Falls $x_1 + x_2 = 0$ ist, so genügt es $x = x_1$ zu setzen, anderenfalls besitzt nach Hilfssatz 1 der Vektor $x = \varphi_2(x_1, x_2)$ die verlangte Eigenschaft.

Wir setzen jetzt die Richtigkeit unseres Satzes für $n-1$ voraus. Wegen $\|a\| = 1$ existieren n Einheitsvektoren $x_1, \dots, x_n$, für welche $ax_1 \dots x_n = 1$ ist. Wir setzen

$$\bar{a}z_1 \dots z_{n-1} = az_1 \dots z_{n-1}x_n.$$

Dann ist $\|\bar{a}\| \leqslant \|a\| = 1$, also wegen $\bar{a}x_1 \dots x_{n-1} = 1$ auch $\|\bar{a}\| = 1$.

Nach unserer Annahme gibt es einen Einheitsvektor x_0, für welchen $\bar{a}x_0^{n-1} = \pm 1$, d.h. $ax_0^{n-1}x_n = \pm 1$ ist. Im Falle $x_0 + x_n = 0$ besitzt also wieder $x = x_0$, anderenfalls aber $x = \varphi_n(x_n, x_0)$ die verlangte Eigenschaft.

§ 4. Hilfssatz 3. *Ist $ax_1 \dots x_n$ ein symmetrisches n-lineares Funktional in (L^2), so gilt*

$$\|a\| = \underset{\|x\|\leqslant 1}{\text{ob.Gr.}} |ax^n|.$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|a\| = 1$ an. Ist $z = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ ein Vektor des m-dimensionalen Raumes R_m, so bezeichnen wir mit $\bar{z}$ das Element $(\xi_1, \dots, \xi_m, 0, 0, \dots)$ aus (L^2). Wir setzen

$$a_m z_1 \dots z_n = a\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n; \tag{1}$$

dann ist a_m eine in R_m erklärte symmetrische n-lineare Form und $\|a_m\| \leqslant 1$. Nach Hilfssatz 2 gibt es in R_m einen Einheitsvektor x_m, für welchen $a_m x_m^n = \pm\|a_m\|$ stattfindet. Daher ist

$$a\bar{x}_m^n = \pm\|a_m\|, \quad \|\bar{x}_m\| = 1. \tag{2}$$

Wir beweisen jetzt, dass $\lim_{m\to\infty} \|a_m\| = 1$ ist.

Wegen $\|a\| = 1$ gibt es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ n Einheitsvektoren $y_1, \dots, y_n$ aus (L^2) von der Eigenschaft, dass

$$|ay_1 \dots y_n| > 1-\varepsilon \tag{3}$$

ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} y^k &= (\eta_1^k, \eta_2^k, \dots), \\ y_k^m &= (\eta_1^k, \dots, \eta_m^k), \qquad (k = 1, \dots, n) \\ \bar{y}_k^m &= (\eta_1^k, \dots, \eta_m^k, 0, 0, \dots); \end{aligned}$$

dann ist $\lim_{m\to\infty} \bar{y}_k^m = y_k$ $(k = 1, \dots, n)$, also nach (1), (3)

$$\lim_{m\to\infty} |a_m y_1^m \dots y_n^m| = \lim_{m\to\infty} |a\bar{y}_1^m \dots \bar{y}_n^m| = |ay_1 \dots y_n| > 1-\varepsilon.$$

Wegen $|y_k^m| \leqslant 1$ ist $|a_m y_1^m \dots y_n^m| \leqslant \|a_m\|$, also, da $\|a_m\| \leqslant 1$ und ε beliebig ist, $\lim_{m\to\infty} \|a_m\| = 1$.

Aus (2) ergibt sich jetzt $\lim_{m\to\infty} |a\bar{x}_m^n| = 1$; da $\|\bar{x}_m\| = 1$ $(m = 1, 2, \dots)$, so ist

$$\underset{\|x\|\leqslant 1}{\text{ob.Gr.}} |ax^n| = 1 = \|a\|.$$

§ 5. Satz I. *Ist $ax_1 \dots x_n$ eine symmetrische n-lineare Operation in (L^2), so gilt*

$$\underset{\|x_1\|\leqslant 1, \dots, \|x_n\|\leqslant 1}{\text{ob.Gr.}} \|ax_1 \dots x_n\| = \underset{\|x\|\leqslant 1}{\text{ob.Gr.}} \|ax^n\|.$$

Beweis. Wir nehmen $\|a\| = 1$ an und bezeichnen mit ε eine positive Zahl. Es gibt n Elemente $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, so dass

$$\|a\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n\| > 1-\varepsilon, \quad \|\bar{x}_1\| = 1, \dots, \|\bar{x}_n\| = 1.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} y &= ax_1, \dots, x_n, \\ \bar{y} &= a\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \end{aligned}$$

so ist $\|\bar{y}\| > 1-\varepsilon$.

Sei Y ein lineares Funktional, welches für alle y, d.h. in der Wertmenge der Operation a erklärt ist und der Bedingung

$$\|Y\| = 1, \quad Y(\bar{y}) = \|\bar{y}\| \tag{1}$$

genügt. Dann ist

$$\bar{a}x_1 \dots x_n = Y(ax_1 \dots x_n)$$

ein symmetrisches n-lineares Funktional in (L^2). Man hat ferner

$$\bar{a}\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n = Y(a\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) = Y(\bar{y}) = \|\bar{y}\| > 1-\varepsilon,$$

also $\|\bar{a}\| > 1-\varepsilon$. Nach Hilfssatz 3 gibt es daher in (L^2) ein $\bar{x}$, für welches

$$|\bar{a}\bar{x}^n| > 1-\varepsilon, \quad \|\bar{x}\| = 1 \tag{2}$$

gilt. Wegen

$$|\bar{a}\bar{x}^n| = |Y(a\bar{x}^n)| \leqslant \|Y\| \cdot \|ax^n\|$$

ist nach (1), (2) $\|a\bar{a}^n\| > 1-\varepsilon$. Da $\|\bar{x}\| = 1$ und ε beliebig ist, folgt

$$\underset{\|x\|\leqslant 1}{\text{ob.Gr.}} \|ax^n\| = 1 = \|a\|.$$

§ 6. Satz II. *Ist ax^n ein symmetrisches homogenes Polynom n-ten Grades in (L^2), so gibt es eine Folge $\{x_i\}$ und eine Zahl λ $(\|x_i\| = 1$ für $i = 1, 2, \dots;$*

$|\lambda| = 1/\|a\|$), *derart dass*

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - \lambda a x_i^n\| = 0.$$

Beweis. Setzt man

(1) $$\bar{a}x_1 \ldots x_n x_{n+1} = \int_0^1 (ax_1 \ldots x_n) x_{n+1}\, dt,$$

so ist

$$\|\bar{a}\| \leqslant \|a\| \cdot \|x_1\| \ldots \|x_n\| \cdot \|x_{n+1}\|,$$

also $\|\bar{a}\| \leqslant \|a\|$.

Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ gibt es n Elemente $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ ($\|\bar{x}_1\| = 1, \ldots, \|\bar{x}_n\| = 1$) für welche

(2) $$\|a\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\| > \|a\| - \varepsilon;$$

wir setzen

$$x_{n+1} = a\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n, \qquad \bar{x}_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|};$$

dann ist nach (1)

$$\bar{a}\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n+1} = \int_0^1 x_{n+1}\, \bar{x}_{n+1}\, dt = \|x_{n+1}\| = \|a\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\|,$$

also wegen (2)

$$\bar{a}\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n+1} > \|a\| - \varepsilon.$$

Hieraus folgt $\|\bar{a}\| \geqslant \|a\|$, also schliesslich

(3) $$\|\bar{a}\| = \|a\|.$$

Nach Satz I gibt es nun ein $\bar{x}$, wofür

$$|\bar{a}\bar{x}^{n+1}| > \|\bar{a}\| - \varepsilon, \qquad \|\bar{x}\| = 1,$$

d.h., mit Rücksicht auf (1), (3),

$$\left|\int_0^1 (a\bar{x}^n)\,\bar{x}\,dt\right| > \|a\| - \varepsilon$$

gilt. Setzt man

$$\eta = \operatorname{sign} \int_0^1 (a\bar{x}^n)\,\bar{x}\,dt,$$

so ergibt sich

$$\int_0^1 \left[\bar{x} - \frac{\eta}{\|a\|} a\bar{x}^n\right]^2 dt = 1 + \frac{1}{\|a\|^2} \int_0^1 (a\bar{x}^n)^2\, dt - 2\frac{1}{\|a\|} \left|\int_0^1 (a\bar{x}^n)\,\bar{x}\,dt\right|$$
$$\leqslant 1 + 1 - 2\left[1 - \frac{\varepsilon}{\|a\|}\right] = \frac{2\varepsilon}{\|a\|}.$$

Für $\lambda = \eta/\|a\|$ ist also

$$\int_0^1 [\bar{x} - \lambda a\bar{x}^n]^2\, dt = \|\bar{x} - \lambda a\bar{x}^n\|^2 < \frac{2\varepsilon}{\|a\|}.$$

Satz III. *Ist ax^n ein vollstetiges symmetrisches homogenes Polynom n-ten Grades in (L^2), so gibt es ein Element x und eine Zahl λ ($\|x\| = 1, |\lambda| = 1/\|a\|$), so dass*

$$x - \lambda a x^n = 0.$$

Beweis. Nach Satz II existiert eine Folge $\{x_i\}$, für welche

$$\|x_i\| = 1 \ (i = 1, 2 \ldots), \qquad \lim_{i\to\infty} \|x_i - \lambda a x_i^n\| = 0$$

ist. Da das Polynom a vollstetig ist, gibt es eine Teilfolge $\{x_{i_k}\}$, so dass die Folge $\{a x_{i_k}^n\}$ konvergiert. Für $x = \lim_{k\to\infty} a x_{i_k}^n$ ist offenbar

$$x = \lambda a x^n.$$

(Reçu par la Rédaction le 10. 12. 1936)