Zur Theorie der linearen Dimension

publié en commun avec S. Mazur dans Studia Math. 4 (1933), p. 100–112.

Zwei lineare normierte Räume X und Y heissen *isomorph*, wenn es eine additive homöomorphe (kurz: isomorphe) Abbildung von X auf Y gibt; wir sagen, dass die Räume X und Y *von gleicher linearer Dimension* sind, wenn jeder von ihnen mit einem linearen Teile des anderen isomorph ist. Sind also die Räume X und Y isomorph, so sind sie auch von gleicher linearer Dimension; die Umkehrung davon gilt nicht allgemein; man hat nur als X den Hilbertschen Raum (l^2) und als Y den aus allen Punkten $y = \{\eta_n\} \in (l^2)$ derart, dass $\eta_{2n} = 0$ für fast alle n ist, bestehenden Raum zu wählen. Das Hauptergebnis des Folgenden ist ein Beispiel von zwei separablen, linearen, normierten und *vollständigen* Räumen d.h. von zwei separablen Räumen vom Typus (B), die von gleicher linearer Dimension, dabei aber nicht isomorph sind (1). Zuerst untersuchen wir den Raum (V) der Funktionen von endlicher Variation (2) und beweisen insbesondere, dass jede lineare separable Menge in diesem Raume mit einer linearen Menge im Raume (L) der integrierbaren Funktionen äquivalent ist; dabei nennen wir zwei lineare normierte Räume X und Y *äquivalent*, wenn es eine additive, die Norm erhaltende (kurz: äquivalente) Abbildung von X auf Y gibt (3). Dieser Satz erlaubt u. a. das vorhin erwähnte Beispiel anzugeben; übrigens sind vielleicht einige Folgerungen davon nicht nur vom Standpunkt der Theorie der Operationen von Interesse. Bezeichnet man für eine in einem Intervalle $\langle a, b\rangle$ definierte reelle Funktion $x(t)$ mit $V_a^b[x]$ die Variation von $x(t)$ in $\langle a, b\rangle$, so lautet eine dieser Folgerungen: Ist $\{x_n(t)\}$ eine Folge von in

(1) Die Frage, ob es Räume dieser Art gibt, hat Herr Banach aufgeworfen: S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932, S. 193–194 [ce volume, p. 176–177].

(2) Dieser Raum wurde schon von Herrn H. Hahn betrachtet: H. Hahn, *Über Folgen linearer Operationen*, Mh. Math. Phys. 32 (1922), S. 1–88, insb. S. 74–81.

(3) Ist $U(x)$ eine äquivalente Abbildung von X auf Y, so ist sie isometrisch und $U(0) = 0$; aber auch umgekehrt: S. Mazur et S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 194 (1932), S. 946–948. Vgl. l.c. (1), S. 166–168 [ce volume, p. 155–156]. Eine äquivalente Abbildung von X auf Y ist offenbar isomorph.

$\langle a, b\rangle$ erklärten reellen Funktionen und $V_a^b[x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k}] \leqslant N$ bei jedem System verschiedener Indexe $n_1, n_2, \ldots n_k$, mit konstantem N, so ist $\lim_{n\to\infty} V_a^b[x_n] = 0$ (4).

1. Zuerst mögen einige Eigenschaften des Raumes (V) bewiesen werden. Dieser Raum besteht aus allen in $\langle 0, 1\rangle$ definierten reellen Funktionen $x(t)$, die von endlicher Variation in diesem Intervalle sind – die Verknüpfungen erklären wir wie üblich und führen die Normierung ein: $\|x\| = |x(0)|+V_0^1[x]$; man erkennt leicht, dass er vom Typus (B) ist.

Offenbar gilt: Ist $x_n \in (V)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in (V)$ und $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$, so konvergiert die Folge der Funktionen $\{x_n(t)\}$ gleichmässig in $\langle 0, 1\rangle$ gegen die Funktion $x_0(t)$. Daraus folgt, dass der aus allen jenen Funktionen gebildete (lineare) Teil von (V), die in jedem Punkte einer gegebenen Punktmenge aus $\langle 0, 1\rangle$ stetig sind, abgeschlossen ist. Es wird ferner Gebrauch gemacht von der **Bemerkung**, dass die in $\langle 0, 1\rangle$ absolut stetigen reellen Funktionen auch eine in (V) abgeschlossene (lineare) Menge bilden.

Der Raum (V) ist nicht separabel, umsomehr ist ersichtlich jede in ihm gelegene Menge von der Mächtigkeit $< \mathfrak{c}$ nirgendsdicht; dabei besitzt die Menge der Punkte des Raumes (V) nur die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

1. *Jede lineare separable Menge im Raume (V) ist mit einer linearen Menge im Raume (L) äquivalent.*

Beweis. Wir merken uns zuerst: Ist $x \in (V)$, $\sigma(t)$ die Funktion der Sprünge von $x(t)$, so ist $\sigma \in (V)$ und, $\tau = x - \sigma$ gesetzt, $\tau(t)$ stetig in $\langle 0, 1\rangle$, $\|x\| = \|\sigma\|+\|\tau\|$; die Abbildung $S(x) = \sigma$, also auch $T(x) = \tau$, ist additiv.

Sei nun X ein linearer separabler Teil von (V) und die abzählbare Menge der Elemente x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ aus X dicht in X; sei ferner $\tau_n = T(x_n)$. Sind die a_n positive Zahlen, für die $\sum_{n=1}^{\infty} a_n V_0^1[\tau_n]$ mit einer Summe $1-a < 1$ konvergiert, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n V_0^s[\tau_n]$ in $\langle 0, 1\rangle$ gleichmässig konvergent und, da jede Funktion $V_0^s[\tau_n]$ in diesem Intervalle stetig ist, so ist es auch $\varphi(s) = as + \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_0^s[\tau_n]$; dabei wächst $\varphi(s)$ stets und $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Bezeichnet man mit $\psi(t)$ die zu $\varphi(s)$ inverse Funktion, so ist ebenso $\psi(t)$ stets wachsend und $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$.

Wir wollen uns jetzt überzeugen, dass für $x \in (V)$, $\tau = T(x)$, die Funktion $\varrho(t) = \tau(\psi(t))$ in $\langle 0, 1\rangle$ absolut stetig ist. Zum Beweise sei $0 \leqslant t' < t'' \leqslant 1$, $s' = \psi(t')$, $s'' = \psi(t'')$ und $\varrho_m(t) = \tau_m(\psi(t))$, wo m ein beliebiger Index ist. Da $s' < s''$, so ist $|\varrho_m(t'')-\varrho_m(t')| = |\tau_m(s'')-\tau_m(s')| \leqslant V_{s'}^{s''}[\tau_m]$; aus $\varphi(s'')-\varphi(s')$

(4) Die wichtigsten Resultate dieser Arbeit wurden in der Note: S. Banach et S. Mazur [42] [ce volume, p. 431–433], ohne Beweise angegeben. Wegen Terminologie und Bezeichnungen siehe das unter (1) zitierte Buch. Mit $\langle a, b\rangle$ bzw. (a, b) bezeichnen wir stets die Menge der Zahlen, die den Bedingungen $a \leqslant t \leqslant b$ bzw. $a < t < b$ genügen.

$= a(s''-s')+\sum_{n=1}^{\infty} a_n V_{s'}^{s''}[\tau_n]$ folgt aber $\varphi(s'')-\varphi(s') > a_m V_{s'}^{s''}[\tau_m]$, d.h. $V_{s'}^{s''}[\tau_m] < a_m^{-1}[\varphi(s'')-\varphi(s')]$, also zufolge $\varphi(s') = t'$, $\varphi(s'') = t''$, erhält man $|\varrho_m(t'')-\varrho_m(t')| < a_m^{-1}(t''-t')$; $\varrho_m(t)$ genügt der Lipschitzschen Bedingung und ist somit absolut stetig. Laut Voraussetzung gibt es eine Indizesfolge $\{n_k\}$ so, dass $\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x\| = 0$, also $\lim_{k\to\infty}\|\tau_{n_k}-\tau\| = 0$ und mithin auch ersichtlich $\lim_{k\to\infty}\|\varrho_{n_k}-\varrho\| = 0$; weil nach dem Vorangehenden die $\varrho_{n_k}(t)$ absolut stetig sind, so besitzt $\varrho(t)$ dieselbe Eigenschaft.

Jede der Funktionen $x_n(t)$ hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte; folglich gibt es in $\langle 0,1\rangle$ eine abzählbare Menge Z derart, dass in jedem Punkte der Menge $\langle 0,1\rangle - Z$ sämtliche $x_n(t)$ stetig sind. Weil dabei die Elemente x_n in X dicht liegen, so ist sogar jede der Menge X angehörende Funktion in den Punkten $t\in\langle 0,1\rangle - Z$ stetig. Wir ordnen nun die Punkte von Z in eine Folge $\{t_n\}$.

Sei $x\in X$, $\tau = T(x)$ und $\varrho(t) = \tau(\psi(t))$. Die Funktion $\omega(t) = \varrho(4t)$ ist in $\langle 0,\frac14\rangle$ absolut stetig; sie besitzt also in den Punkten einer Menge $A\subset\langle 0,\frac14\rangle$ mit dem Masse $\frac14$ eine endliche Ableitung; setz man dabei $y(t) = \omega'(t)$ für $t\in A$, $= 0$ für $t\in\langle 0,\frac14\rangle - A$, so ist die so in $\langle 0,\frac14\rangle$ erklärte Funktion integrierbar und

$$\int_0^{1/4} |y(t)|\,dt = V_0^{1/4}[\omega].$$

Wir dehnen jetzt die Definition von $y(t)$ auf das ganze Intervall $\langle 0,1\rangle$ aus durch die Festsetzung:

$$y(t) = \begin{cases} 4\tau(0) & \text{für } \frac14 < t \leqslant \frac12, \\ 2^{2n+2}[x(t_n)-x(t_n-0)] & \text{für } 1-\dfrac{1}{2^{2n+1}} < t \leqslant 1-\dfrac{1}{2^{2n+2}}, \\ 2^{2n+3}[x(t_n+0)-x(t_n)] & \text{für } 1-\dfrac{1}{2^{2n+2}} < t \leqslant 1-\dfrac{1}{2^{2n+3}}, \\ 0 & \text{für } t = 1 \ (^5). \end{cases}$$

Die auf diese Weise in $\langle 0,1\rangle$ definierte Funktion $y(t)$ ist integrierbar, also $y\in(L)$, und $\|y\| = \|x\|$. Denn es ist

$$\|y\| = \int_0^1 |y(t)|\,dt = \int_0^{1/4} |y(t)|\,dt + |\tau(0)| + \sum_{n=1}^{\infty}[|x(t_n)-x(t_n-0)|+|x(t_n+0)-x(t_n)|];$$

aus

$$\int_0^{1/4} |y(t)|\,dt = V_0^{1/4}[\omega] = V_0^1[\varrho] = V_0^1[\tau]$$

(5) Ist $t_n = 0$ bzw. 1, so ist unter $x(t_n-0)$ bzw. $x(t_n+0)$ einfach $x(t_n)$ zu verstehen.

folgt

$$\int_0^{1/4} |y(t)|\,dt + |\tau(0)| = \|\tau\|;$$

andererseits, da alle Unstetigkeitspunkte von $x(t)$ unter den t_n vorkommen, ist – wie bekannt –

$$\sum_{n=1}^{\infty}[|x(t_n)-x(t_n-0)|+|x(t_n+0)-x(t_n)|] = V_0^1[\sigma], \text{ d.h. } = \|\sigma\|.$$

Ordnen wir nun jedem $x\in X$ das Element $y\in(L)$ zu, so ist dadurch offenbar eine additive Abbildung von X auf einen linearen Teil des Raumes (L) definiert; da sie ausserdem, wie wir gezeigt haben, die Norm erhält, ist sie äquivalent; damit ist aber die Behauptung bewiesen.

Aus dem obigen Satze ergibt sich sofort: Jede separable Menge im Raume (V) ist mit einer Menge im Raume (L) isometrisch. Es bilden nämlich die linearen Kombinationen der Elemente aus einer separablen Menge stets eine zugleich lineare wie auch separable Menge.

In Ergänzung von 1 zeigen wir: Der Raum (L) ist mit einer linearen Menge im Raume (V) äquivalent. In der Tat sei $x\in(L)$ und setzen wir $y(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ in $\langle 0,1\rangle$; dann ist $y(t)$ absolut stetig, also $y\in(V)$, und

$$\|y\| = \int_0^1 |x(s)|\,ds = \|x\|;$$

so erhalten wir eine äquivalente Abbildung $U(x) = y$ von (L) auf eine lineare Menge im Raume (V). Die Bildmenge von (L) besteht übrigens aus allen in $\langle 0,1\rangle$ absolut stetigen Funktionen $y(t)$ mit $y(0) = 0$.

Sei X ein linearer und normierter Raum. Ist die lineare Menge $X_0\subset X$ abgeschlossen, so ist sie schon schwachabgeschlossen (6); daraus folgt unmittelbar, dass wenn der Raum X schwachvollständig ist, so ist es auch jede in ihm gelegene lineare abgeschlossene Menge. Umgekehrt, ist nur jede im Raume X gelegene lineare, abgeschlossene und separable Menge schwachvollständig, so besitzt diese Eigenschaft der Raum X selbst. (In der Tat sei $x_n\in X$ $(n = 1,2,\ldots)$ und die Folge $\{x_n\}$ schwachkonvergent; es bezeichne X_0 die abgeschlossene Hülle der Menge, die aus allen linearen Kombinationen der Elemente x_n besteht. Als lineare, abgeschlossene und separable Menge ist sodann X_0 schwachvollständig, also konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen ein Element $x_0\in X_0$ schwach). Sei weiter $U(x)$ eine lineare Abbildung von X auf einen linearen normierten Raum Y; ist $x_n\in X$ $(n = 1,2,\ldots)$ und die Folge $\{x_n\}$ (gegen $x_0\in X_0$) schwachkonvergent, so ist die Folge $\{U(x_n)\}$ (gegen $U(x_0)$) schwachkonvergent. Infolgedessen gilt:

(6) L.c. (1), S. 134 [ce volume, p. 129]; vgl. auch: S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Mathematica 4 (1933), S. 70–84, insb. S. 80.

Ist der Raum X schwachvollständig, so ist es auch jeder mit X isomorphe (insbesondere also äquivalente) Raum Y.

Unter Berücksichtigung der obigen einfachen Tatsachen folgern wir aus 1, da der Raum (L) schwachvollständig ist (7), den Satz

2. *Der Raum* (V) *ist schwachvollständig.*

Hierin ist enthalten, dass der zum Raume (C) der stetigen Funktionen konjugierte Raum $(\bar{C})$ auch schwachvollständig ist, weil er mit einer linearen Menge in (V) äquivalent ist. In der Tat, es bestehe die lineare Menge $Y \subset (V)$ aus allen denjenigen Funktionen $y(t)$, die in $(0, 1)$ rechtsseitig stetig sind und der Bedingung $y(0) = 0$ genügen. Sei $F(x)$ ein lineares Funktional in (C). Nach einem Satze von Herrn F. Riesz gibt es einen und nur einen Punkt $y \in Y$, so dass $F(x) = \int_0^1 x(t)\,dy(t)$ für $x \in (C)$; dabei ist $\|F\| = \|y\|$, und die Menge aller den $F \in (\bar{C})$ auf diese Weise zugeordneten $y \in Y$ mit Y identisch (8). Diese Zuordnung stellt also eine äquivalente Abbildung von $(\bar{C})$ auf Y dar.

Eine Verschärfung des letzten Resultates liefert der Satz

3. *Der Raum* $(\bar{C})$ *ist mit dem Raume* (V) *äquivalent.*

Beweis. Es bleibt uns noch übrig zu beweisen: Der Raum (V) ist mit der Menge Y äquivalent. Sei $x \in (V)$, $\sigma(t)$ die Funktion der Sprünge von $x(t)$, $\tau = x - \sigma$; nehmen wir ferner an, dass die abzählbare Menge der Punkte t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ aus $(0, 1)$ alle in $(0, 1)$ liegenden Unstetigkeitspunkte von $x(t)$ enthält. Wir definieren die Funktion $\sigma^*(t)$ in $\langle 0, 1\rangle$ durch:

$$\begin{aligned}
\sigma^*(0) &= 0;\\
\sigma^*(t) &= [x(+0)-x(0)] + \sum_{t_n \leqslant 2t} [x(t_n)-x(t_n-0)] \quad \text{für} \quad 0 < t < \tfrac{1}{2};\\
\sigma^*(\tfrac{1}{2}) &= \sigma^*(\tfrac{1}{2}-0) + [x(1)-x(1-0)];\\
\sigma^*(t) &= \sigma^*(\tfrac{1}{2}) + \sum_{t_n \leqslant 2t-1} [x(t_n+0)-x(t_n)] \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} < t < 1;\\
\sigma^*(1) &= \sigma^*(1-0) + \tau(0).
\end{aligned}$$

Setzt man noch

$$\tau^*(t) = \tau(t) - \tau(0), \qquad y(t) = \sigma^*(t) + \tau^*(t) \quad \text{in} \quad \langle 0, 1\rangle,$$

so ist – was ohne Schwierigkeit folgt – $y \in Y$ und $\sigma^*(t)$ bildet die Funktion

(7) L.c. (1), S. 141–142 [ce volume, p. 134–135].

(8) F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 149 (1909), S. 974–977. Vgl. hierzu l.c. (1), S. 59–61 [ce volume, p. 67–69]. Man erhält eine den geforderten Bedingungen genügende Funktion $y(t)$ folgenderweise: wir erweitern das Funktional $F(x)$, ohne seine Norm zu ändern, zu einem im Raume (M) der messbaren beschränkten Funktionen definierten linearen Funktional und setzen: $y(t) = F(x_t)$, wo $x_t(s) = 1$ für $0 \leqslant s \leqslant t$, $0 < t \leqslant 1$; $x_t(s) = 0$ für $t < s \leqslant 1$, $0 < t \leqslant 1$; $x_0(s) = 0$ für $0 \leqslant s \leqslant 1$.

der Sprünge von $y(t)$; mithin gilt $\|y\| = \|\sigma^*\| + \|\tau^*\|$, und da

$$\|\sigma^*\| = V_0^1[\sigma^*] = V_0^1[\sigma] + |\tau(0)| = \|\sigma\| + |\tau(0)|, \quad \|\tau^*\| = V_0^1[\tau] = \|\tau\| - |\tau(0)|,$$

so ist $\|y\| = \|\sigma\| + \|\tau\| = \|x\|$. Ordnen wir nun jedem $x \in (V)$ das oben erklärte $y \in Y$ zu, so ist dadurch eine äquivalente Abbildung von (V) auf einen linearen Teil von Y gegeben; wir überlassen dem Leser den einfachen Beweis, dass dabei die Bildmenge von (V) aus allen Punkten von Y besteht.

Bemerken wir noch, dass ebenso leicht folgt: Ist (V_0) der aus allen jenen Funktionen $x(t)$ gebildete Teil von (V), für die $x(0) = 0$, so ist (V_0) mit (V) äquivalent.

2. Es wird jetzt gezeigt, dass es separable Räume vom Typus (B) gibt, die von gleicher linearer Dimension, nicht aber isomorph sind. Zu diesem Zwecke sei Y_0 ein separabler Raum vom Typus (B), mit der Eigenschaft, dass der zu ihm konjugierte Raum $\bar{Y}_0$ nicht schwachvollständig ist; das nächstliegende Beispiel ist der Raum (l) der absolut konvergenten Reihen, für den $(\bar{l})$ mit dem Raume (m) der beschränkten Folgen äquivalent ist. Wir behaupten nun, dass die Räume (C) und $(C) \times Y_0$ das Verlangte leisten. Sind X, Y lineare, normierte Räume, so bezeichnet dabei $X \times Y$ den linearen normierten Raum, zu dem die Menge aller geordneten Paare (x, y), mit $x \in X$, $y \in Y$, wird, wenn man die Verknüpfungen und die Normierung folgenderart definiert ($x, x', x'' \in X$; $y, y', y'' \in Y$; t eine reelle Zahl): $(x', y') + (x'', y'') = (x'+x'', y'+y'')$, $t(x, y) = (tx, ty)$, $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. (C) ist trivialerweise mit dem linearen, aus den Elementen $(x, 0)$, mit $x \in (C)$, bestehenden Teile von $(C) \times Y_0$ äquivalent; anderseits ist, nach einem von uns bewiesenen Satze, jeder lineare, normierte und separable Raum – insbesondere also $(C) \times Y_0$ – mit einem linearen Teile von (C) äquivalent (9). Bleibt noch zu beweisen, dass (C) und $(C) \times Y_0$ nicht isomorph sind; anderenfalls wären die zu ihnen konjugierten Räume $(\bar{C})$ und $\overline{(C) \times Y_0}$, mithin auch $(\bar{C})$ und $(\bar{C}) \times \bar{Y}_0$, isomorph (10). $(\bar{C})$ ist nun schwachvollständig, $\bar{Y}_0$ dagegen nach Annahme, und somit auch $(\bar{C}) \times \bar{Y}_0$, nicht; folglich kann $(\bar{C}) \times \bar{Y}_0$ mit keinem linearen Teile von $(\bar{C})$ isomorph sein.

Sind X, Y lineare, normierte Räume, so sagen wir, dass X *von kleinerer* (bzw. *grösserer*) *linearer Dimension* als Y ist, wenn X (bzw. Y) mit einem linearen Teile von Y (bzw. X), dabei aber Y (bzw. X) mit keinem vom X (bzw. Y) isomorph ist. Bei dieser Ausdrucksweise gilt also

4.1. *Die Räume* (C) *und* $(C) \times (l)$ *sind von gleicher linearer Dimension;* $\overline{(C)}$ *ist von kleinerer linearer Dimension als* $\overline{(C) \times (l)}$.

Betrachten wir nun die Räume (l) und (L). (l) ist mit einem linearen

(9) L.c. (1), S. 185–187 [ce volume, p. 169–171].

(10) Sind die linearen, normierten Räume X und Y isomorph (bzw. äquivalent), so sind es auch $\bar{X}$ und $\bar{Y}$; l.c. (1), S. 188 [ce volume, p. 171]. Ausserdem ist stets $\overline{X \times Y}$ mit $\bar{X} \times \bar{Y}$ isomorph; l.c. (1), S. 192 [ce volume, p. 175].

Teile von (L) äquivalent; um dies einzusehen, genügt es jedem $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \in (l)$ das auf folgende Weise erklärte $y \in (L)$ zuzuordnen:

$$y(t) = 2^n \xi_n \text{ für } 1-\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant t < 1-\frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad y(1) = 0.$$

(L) kann dabei mit keiner linearen Menge im Raume (l) isomorph sein; in der Tat, in (l) ist jede schwachkonvergente Punktfolge schon konvergent, im Räume (L) dagegen findet das, wie bekannt, nicht statt[11]. Der Raum (l) ist demnach von kleinerer linearer Dimension als (L). Die zu den Räumen (l) und (L) konjugierten Räume sind mit den Räumen (m) und (M) äquivalent. (m) ist mit einem linearen Teile von (M) äquivalent; es genügt wieder jedem $x = \{\xi_n\} \in (m)$ das folgenderweise definierte $y \in (M)$ zuzuordnen:

$$y(t) = \xi_n \text{ für } 1-\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant t < 1-\frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad y(1) = 0.$$

Es gilt weiter der Satz

a) *Ist X ein linearer, normierter und separabler Raum, so ist X wie auch $\bar{X}$ mit einem linearen Teile von (m) äquivalent.*

Erstens: Wir greifen aus der Menge H der linearen in X erklärten Funktionale mit der Norm $\leqslant 1$ eine abzählbare Menge der Funktionale $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ heraus, die schwachdicht in H ist, und ordnen dann jedem $x \in X$ das folgenderweise erklärte $y = \{\eta_n\} \in (m)$ zu: $\eta_n = F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$[12]. Man erhält so eine äquivalente Abbildung von X auf einen linearen Teil von (m). Zweitens: Wir nehmen eine abzählbare Menge der Elemente $x_n (n = 1, 2, \ldots)$ aus der Einheitskugel K von X, die dicht in K ist, und ordnen nun jedem in X erklärten linearen Funktional $F(x)$ das so definierte $y = \{\eta_n\} \in (m)$ zu: $\eta_n = F(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Diese Zuordnung ist auch eine äquivalente Abbildung von $\bar{X}$ auf einem linearen Teil von (m).

Aus a) folgt jetzt ohne weiteres:

4.2. *Der Raum (l) ist von kleinerer linearer Dimension als (L); $\overline{(l)}$ und $\overline{(L)}$ sind von gleicher linearer Dimension.*

Analog beweist man, bei Beachtung dessen, dass $\overline{(C)}$ schwachvollständig ist, den Satz

4.3. *Der Raum (l) ist von kleinerer linearer Dimension als (C); $\overline{(l)}$ ist von grösserer linearer Dimension als $\overline{(C)}$.*

---

(11) L.c. (1), S. 137–139 [ce volume, p. 131–133].

(12) L.c. (1), S. 124 [ce volume, p. 121], théorème 4.

Die Sätze 4.1–4.3 zeigen, dass es im Allgemeinen keine Beziehungen zwischen den linearen Dimensionen zweier separabler Räume X, Y vom Typus (B) und den der zu ihnen konjugierten Räume $\bar{X}, \bar{Y}$ gibt.

Wie aus den Beweisen folgt, können die Sätze 4.1–4.3 noch etwas verschärft werden. Man kann z.B. den Satz 4.1 durch den folgenden ersetzen:

4.1*. Jeder der Räume (C), $(C)\times(l)$ ist mit einem linearen Teile des anderen äquivalent, $\overline{(C)}$ ist es mit einem linearen Teile von $\overline{(C)\times(l)}$, $\overline{(C)\times(l)}$ ist mit keinem linearen Teile von $\overline{(C)}$ isomorph.

3. Wir bringen jetzt einige Anwendungen des Satzes 2 auf die Theorie der reellen Funktionen. Sei X ein schwachvollständiger Raum vom Typus (B). Ist $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $\|x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k}\| \leqslant N$ für beliebige verschiedene Indizes $n_1, n_2, \ldots n_k$, mit konstantem N, so ist, nach einem Satze von Herrn W. Orlicz, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ [13]. Wegen 2 folgt daraus insbesondere

5. *Ist $\{x_n(t)\}$ eine Folge von in $\langle a, b\rangle$ erklärten reellen Funktionen und $V_a^b[x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k}] \leqslant N$ bei jedem System verschiedener Indexe $n_1, n_2, \ldots \ldots, n_k$, mit konstantem N, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} V_a^b[x_n] = 0$.*

Wir können ja ohne weiteres annehmen: $a = 0, b = 1, x_n(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dann ist stets $x_n \in (V)$ und $\|x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k}\| \leqslant N$ für beliebige verschiedene Indizes $n_1, n_2, \ldots n_k$; aus dem oben zitierten Satze entnehmen wir somit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Wir benötigen weiter den Hilfssatz

b) *Sei X ein linearer, normierter Raum, mit der Eigenschaft, dass $\bar{X}$ schwachvollständig ist. Wenn $\{F_n(x)\}$ eine Folge von linearen in X erklärten Funktionalen ist und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ für jedes $x \in X$ absolut konvergiert, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \|F_n\| = 0$* [14].

Wir setzen $F_{nm}(x) = F_n(x)$ für $m \leqslant n$, $= 0$ für $m > n$ und $U_n(x) = \{F_{nm}(x)\}$ $(m, n = 1, 2, \ldots; x \in X)$. Die so in X erklärten Operationen $U_n(x)$ sind linear, wenn man sie als Operationen mit den dem Raume (l) angehörenden Werten betrachtet. Da dabei die Folge $\{U_n(x)\}$ im Raume X konvergiert, gibt es eine Konstante N, so dass $\|U_n(x)\| \leqslant N$ für $\|x\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, also auch

---

(13) Dann ist sogar die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ unbedingt konvergent; ist umgekehrt diese Reihe unbedingt konvergent, so gibt es eine Konstante N, so dass $\|x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k}\| \leqslant N$ für beliebige verschiedene Indizes $n_1, n_2, \ldots, n_k$: W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II*, Studia Mathematica 1 (1928), S. 241–255, insb. S. 244–247. Vgl. l.c. (1), S. 240–241 [ce volume, p. 211].

(14) Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ im Raume $\bar{X}$ unbedingt konvergent; umgekehrt folgt aus der letzten Tatsache, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ für jedes $x \in X$ absolut konvergiert.

$\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(x)| \leqslant N$ für $\|x\| \leqslant 1$. Für beliebige verschiedene Indizes $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ist somit $|F_{n_1}(x)+F_{n_2}(x)+\ldots+F_{n_k}(x)| \leqslant N$ für $\|x\| \leqslant 1$ und also $\|F_{n_1}+F_{n_2}+\ldots+F_{n_k}\| \leqslant N$; wegen der Schwachvollständigkeit von X ergibt sich daraus $\lim_{n\to\infty} \|F_n\| = 0$, w.z.b.w.

Unter Berufung auf b) folgt leicht

6. *Sei $\{y_n(t)\}$ eine Folge von in $\langle a, b\rangle$ erklärten reellen Funktionen von endlicher Variation in diesem Intervalle und ohne äussere Sprungstellen*[15]. *Ist für jede in $\langle a, b\rangle$ erklärte reelle stetige Funktion $x(t)$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b x(t)\,dy_n(t)$ absolut konvergent, so ist $\lim_{n\to\infty} V_a^b[y_n] = 0$.*

Beweis. Es genügt dies wieder für $a = 0, b = 1$ nachzuweisen. Sei $F_n(x) = \int_0^1 x(t)\,dy_n(t)$ für $x \in (C)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Der Raum $\overline{(C)}$ ist schwachvollständig und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ im Raume (C) absolut konvergent; wegen b) gilt also $\lim_{n\to\infty} \|F_n\| = 0$, und, da stets $\|F_n\| = V_0^1[y_n]$, so ist damit der Beweis beendet[16].

4. Seien X, Y lineare, normierte Räume und es bezeichne X_0 eine lineare Teilmenge von X. Ist $U_0(x)$ eine lineare Abbildung von X_0 auf einen linearen Teil von Y, so heisst jede lineare Abbildung $U(x)$ von X auf einen linearen Teil von Y, für die $U(x) = U_0(x)$ bei $x \in X_0$ ist, eine *lineare Erweiterung* von U_0 auf X.

Ist Y ein 1-dimensionaler Raum oder, was auf dasselbe hinauskommt, $U_0(x)$ ein lineares Funktional, so gibt es bekanntlich eine lineare Erweiterung von U_0 auf X, dabei sogar eine mit derselben Norm. Demnach gibt es stets eine lineare Erweiterung von U_0 auf X, wenn nur X ein endlichviel-dimensionaler Raum ist; denn bilden $y_1, y_2, \ldots, y_n$ eine Basis in Y, so ist $U_0(x) = F_1(x)y_1+F_2(x)y_2+\ldots+F_n(x)y_n$ für $x \in X_0$, wo $F_1, F_2, \ldots, F_n$ lineare Funktionale in X_0 bezeichnen. Hingegen: daraus, dass Y ein n-dimensionaler Raum mit $n \geqslant 2$ ist, folgt nicht die Existenz einer linearen Erweiterung von U_0 auf X mit derselben Norm. In der Tat, betrachten wir im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raume einen konvexen beschränkten Körper K mit 0 als Mittelpunkt, und setzen wir voraus, dass es eine durch 0 gehende Hyperebene H gibt, mit der Eigenschaft, dass keine parallele Projektion von K in H mit dem Durchschnitt L von K und H übereinstimmt. Mit X bezeichnen wir den durch K bestimmten $(n+1)$-dimensionalen Minkowskischen Raum, mit Y den durch L bestimmten n-dimensionalen Minkowskischen Raum; als X_0 wählen wir H und setzen $U_0(x) = x$

(15) Ist $y(t)$ eine in $\langle a, b\rangle$ erklärte reelle Funktion von endlicher Variation in diesem Intervalle, so nennen wir jeden Punkt t_0 von $\langle a, b\rangle$, in dem nicht $\varliminf_{t\to t_0} y(t) \leqslant y(t_0) \leqslant \varlimsup_{t\to t_0} y(t)$ ist, eine äussere Sprungstelle von $y(t)$.

(16) Sei $y \in (V)$ und $F(x) = \int_0^1 x(t)\,dy(t)$ für $x \in (C)$. Damit die Norm des Funktionals $F(x)$ gleich $V_0^1[y]$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Funktion $y(t)$ keine äussere Sprungstellen besitze. Vgl. die unter (8) zitierte Note des Herrn F. Riesz.

für $x \in X_0$. Ist schliesslich Y ein unendlichviel-dimensionaler Raum, so gibt es im allgemeinen keine lineare Erweiterung von U_0 auf X. Sei nämlich X_0 dicht in $X, X_0 \neq X$ und wählen wir als den Raum Y die lineare Menge X_0; setzt man $U_0(x) = x$ für $x \in X_0$, so gibt es offenbar keine lineare Erweiterung von U_0 auf X.

Wir werden nun zeigen, dass es im allgemeinen, sogar in dem Falle, wo X, Y separable Räume von Typus (B) sind, keine lineare Erweiterung von U_0 auf X gibt[17].

Sind X, Y lineare und normierte Räume, so sagen wir, dass Y ein *lineares Bild* von X ist, wenn es eine lineare Abbildung von X auf Y gibt. Aus bekanten Sätzen über lineare Gleichungen folgt sofort[18]:

c) *Ist Y ein lineares Bild von X, so ist $\bar{Y}$ mit einem linearen Teile von $\bar{X}$ isomorph.*

d) *Ist X mit einem linearen Teile von Y isomorph, so ist $\bar{X}$ ein lineares Bild von $\bar{Y}$.*

Sei Y_0 ein separabler Raum vom Typus (B), mit der Eigenschaft, dass $\bar{Y}_0$ nicht schwachvollständig ist. Dann ist Y_0 kein lineares Bild von (C); dies ergibt sich wegen der Schwachvollständigkeit von $\overline{(C)}$ unmittelbar aus c). Es bezeichne X_0 eine mit Y_0 isomorphe lineare Menge im Raume (C) und setzen wir $U_0(x) = x$ für $x \in X_0$; als Y wählen wir X_0. X, Y sind separable Räume vom Typus (B) und $U_0(x)$ bildet die lineare Menge $X_0 \subset X$ auf Y linear ab; es gibt dabei keine lineare Erweiterung von U_0 auf X. Anderenfalls wäre nämlich X_0, mithin auch Y_0, ein lineares Bild von (C), was gegen die Voraussetzung verstösst[19].

Aus d) folgt noch eine interessante Eigenschaft des Raumes (V). Wir gehen von der folgenden Bemerkung aus:

e) *Jeder lineare, normierte und separable Raum Y ist ein lineares Bild von (l).*

Sei die abzählbare Menge der Punkte y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ aus der Einheitskugel K von Y dicht in K; für $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \in (l)$ setzen wir $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n y_n$. Die Abbildung $U(x)$ von (l) auf einen linearen Teil von Y ist linear; aus

(17) Dies bildet die Antwort auf eine von Herren Banach gestellte Frage: l.c. (1), S. 234 [ce volume, p. 206].

(18) L.c. (1), S. 148 [ce volume, p. 140], théorème 4 und théorème 3.

(19) Der Umstand, dass es in (C) lineare abgeschlossene Mengen gibt, welche keine linearen Bilder von (C) sind, hat zur Folge: von den l.c. (1), 244–245 [ce volume, p. 213–214], angegebenen isomorphen Eigenschaften stehen dem Raume (C) (mithin auch dem mit (C) isomorphen Raume (C^p) der p-fach stetig differenzierbaren Funktionen) die mit 7, 8 und 9 bezeichneten nicht zu. Folglich weisen die Räume (m) und (M) die Eigenschaft 7 nicht auf; dabei ist die Eigenschaft 7 nicht nur isomorph sondern sogar dimensional, denn besitzt sie ein Raum X, so besitzt sie auch jede lineare, abgeschlossene Teilmenge von X.

einem Satze von Herrn J. Schauder folgt unmittelbar, dass die Bildmenge von (l) mit Y identisch ist [20].

Jetzt können wir den Satz beweisen:

7. *Ist Y ein linearer, normierter und separabler Raum, so ist Y wie auch $\bar{Y}$ ein lineares Bild von (V).*

Beweis. Da Y mit einem linearen Teile von (C) isomorph — sogar äquivalent — ist, so ist wegen d) der Raum $\bar{Y}$ ein lineares Bild von $(\bar{C})$; nach dem Satze 3 ist mithin $\bar{Y}$ ein lineares Bild von (V). Berücksichtigt man noch e), so ist nun mehr zu zeigen: (l) ist ein lineares Bild von (V). Zum Beweise ordnen wir jedem $x \in (V)$ das durch die Formeln $\eta_n = x(1/n) - x(1/n-0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ definierte $y = \{\eta_n\} \in (l)$ zu; dadurch ist eine lineare Abbildung von (V) auf (l) gegeben.

[20] J. Schauder, *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Mathematica 2 (1930), S. 1–6, insb. S. 3–5 [*Oeuvres*, Warszawa 1978, S. 162–167].

(*Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1933*)

Sur la dimension linéaire des espaces fonctionnels

Note [1] de MM. S. Banach et S. Mazur, présenté par M. Elie Cartan (publié dans Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 196 (1933), p. 86–88).

Deux espaces normés X et Y s'appèllent *isomorphes*, lorsqu'il existe une opération additive $y = u(x)$ qui transforme X en Y d'une façon biunivoque et bicontinue; nous dirons que les espaces X et Y sont de *dimension linéaire égale*, lorsque chacun d'eux est isomorphe avec un sous-espace linéaire de l'autre [2]. Nous donnons ici un exemple de deux espaces séparables du type $(\mathscr{B})$ (c'est-à-dire linéaires normés et complets) qui sont de dimension linéaire égale sans être isomorphes; la question posée dans le livre cité plus haut, p. 193–194, se trouve donc résolue par la positive.

Soit $(\mathscr{W})$ l'espace des fonctions à variation bornée, c'est-à-dire l'espace du type $(\mathscr{B})$, que constitue l'ensemble de toutes les fonctions $x(t)$ à variation bornée dans $\langle 0, 1\rangle$ et telles que $x(0) = 0$, avec les définitions habituelles des opérations fondamentales, lorsqu'on définit la norme pour tout $x \in (\mathscr{W})$ par la formule $\|x\| =$ variation $x(t)$; désignons par $\mathscr{L}$ l'espace des fonctions sommables dans $\langle 0, 1\rangle$. En appelant deux espaces linéaires normés X et Y *équivalents* lorsqu'il existe une opération additive $y = U(x)$, qui transforme X en Y de façon que $\|y\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$ [3], on a le

Théorème fondamental. *Tout sous-espace linéaire séparable de l'espace $(\mathscr{W})$ est équivalent à un sous-espace linéaire de l'espace $(\mathscr{L})$.*

Il en résulte, en vertu d'un théorème de M. W. Orlicz [4], le

Théorème I. *Soit $\{z_n(t)\}$ une suite de fonctions à variation bornée dans*

[1] Séance du 27 décembre 1932.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chapitres XI, XII, Warszawa 1932 [ce volume, p. 154–186].

[3] Les espaces équivalents sont isométriques; la réciproque est aussi vraie. Voir S. Mazur et S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, Comptes Rendus 194 (1932), p. 946–948.

[4] W. Orlicz [*Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II*]. Studia Mathematica 1 (1929) [p. 241–255], p. 247.