Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen

publié en commun avec S. Mazur dans Studia Math. 4 (1933), p. 90–94.

Wir beweisen in dieser Note, dass wenn die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume vom Typus (B) erklärter Funktionale eine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist, so ist sie sogar abgeschlossen; dies bildet eine Verschärfung eines Resultates der Herren S. Mazur und L. Sternbach, laut dessen die Menge R nicht genau eine F_σ-Menge sein kann (1). Als eine leichte Folgerung aus dem obigen Satze ergibt sich, für jeden unendlichvieldimensionalen Raum vom Typus (B), die Existenz einer linearen Menge die zwar eine $F_{\sigma\delta}$- aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist. Wir fügen noch gewisse Verallgemeinerungen des oben formulierten Satzes an und geben im Zusammenhang damit einige Beispiele (2).

1. Seien X, Y zwei Räume vom Typus (B) und $\{F_n(x)\}$ eine Folge von linearen in X erklärten Operationen mit den Werten aus Y; wir bezeichnen mit R die Konvergenzmenge der Folge $\{F_n(x)\}$. Ferner sei x_0 ein Punkt aus R, r_0 eine positive Zahl und S_0 die Menge der $x\in R$, für welche $|x-x_0|\leqslant r_0$, $|F_n(x)-F_n(x_0)|\leqslant r_0$ $(n = 1,2,\ldots)$. Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Hilfssatz 1. *Ist R eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, so ist S_0 von zweiter Kategorie in ihrer abgeschlossenen Hülle $\bar{S}_0$, $\bar{S}_0-S_0$ ist dabei von erster Kategorie in $\bar{S}_0$.*

Beweis. Sei $R = R_1+R_2+\ldots$, wo jede der Mengen R_n eine G_δ-Menge ist. Setzt man $|x|^* =$ obere Grenze $(|x|, |F_1(x)|, |F_2(x)|, \ldots)$ für $x\in R$, so wird R bei dieser Normierung zu einem Raume vom Typus (B); wir bezeichnen ihn mit R^*. Aus $R^* = R_1+R_2+\ldots$ folgt, dass eine der Mengen R_n, etwa R_{n_0}, von zweiter Kategorie in R^* und umsomehr in einer Kugel dieses Raumes dicht ist; sei x_0^* ihr Mittelpunkt und r_0^* ihr Radius. Mit Z_0 bezeichnen wir die Menge der Elemente der Form $\dfrac{r_0}{r_0^*}x+x_0-x_0^*$, wo $x\in R_{n_0}$; es ist

(1) S. Mazur und L. Sternbach, *Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen*, Studia Mathematica 4 (1933), S. 54–65, insb. S. 61.

(2) Vgl. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932, S. 235 [ce volume, p. 207].

$Z_0\subset R$. Wie leicht einzusehen, ist die Menge Z_0 dicht in der Kugel vom Mittelpunkt x_0 und Radius r_0, d. h. in der Menge S_0. Die Menge $R_0 = Z_0S_0$ ist also dicht in S_0 im Raume R^*; wegen $|x|\leqslant|x|^*$ für $x\in R$, folgt daraus sofort, dass R_0 in S_0 auch im Raume X dicht ist. Wir beschränken uns nun auf die Betrachtung des ursprünglichen Raumes X. Da nach Voraussetzung R_{n_0} eine G_δ-Menge ist, so besitzt die mit ihr homothetische Menge Z_0 dieselbe Eigenschaft; in Anbetracht dessen, dass die Menge R_0 den Durchschnitt der Menge Z_0 und der abgeschlossenen, aus allen $x\in X$, für die $|x-x_0|\leqslant r_0$ und stets $|F_n(x)-F_n(x_0)|\leqslant r_0$ gilt, bestehenden Menge bildet, folgern wir, dass auch R_0 eine G_δ-Menge ist. R_0 ist dicht in S_0, also auch in $\bar{S}_0$; als eine in der abgeschlossenen Menge $\bar{S}_0$ dichte G_δ-Menge ist R_0 von zweiter und dabei $\bar{S}_0-R_0$ von erster Kategorie in $\bar{S}_0$; wegen $R_0\subset S_0$ ist mithin auch $\bar{S}-S_0$ von erster Kategorie in $\bar{S}_0$, w. z. b. w.

Wir sagen, dass die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E) besitzt, wenn es Punkte $z_m\in R$ $(m = 1,2,\ldots)$ und $z_0\in X-R$ gibt mit $\lim\limits_{m\to\infty} z_m = z_0$, $|F_n(z_m)|\leqslant 1$ $(n, m = 1,2,\ldots)$.

Hilfssatz 2. *Besitzt die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E), so ist S_0 von erster Kategorie in $\bar{S}_0$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass S_0 mit der Menge aller $x\in R$, für die $|x|\leqslant 1$, $|F_n(x)|\leqslant 1$ $(n = 1,2,\ldots)$ gilt, identisch ist. Nehmen wir an, dass S_0 von zweiter Kategorie in $\bar{S}_0$ ist. Bei natürlichen p,q sei S_{pq} die Menge der $x\in X$, für die $|x|\leqslant 1$, $|F_n(x)|\leqslant 1$ $(n = 1,2,\ldots)$ und $|F_i(x)-F_k(x)|\leqslant 1/q$ $(i,k = p,p+1,\ldots)$; offenbar ist $S_0 = (S_{11}+S_{21}+\ldots)(S_{12}+S_{22}+\ldots)\ldots$ Daraus folgt, dass $\bar{S}_0(S_{1q}+S_{2q}+\ldots)$ von zweiter Kategorie in $\bar{S}_0$ ist, also – da die Mengen $\bar{S}_0S_{pq}$ abgeschlossen in $\bar{S}_0$ sind –, dass für ein natürliches p_q die Menge $W_q = \bar{S}_0S_{p_qq}$ einen Punkt x_q enthält, der ein innerer Punkt von W_q in $\bar{S}_0$ ist; wie leicht einzusehen ist $\frac{1}{2}x_q$ auch ein innerer Punkt von W_q in $\bar{S}_0$ $(q = 1,2,\ldots)$. Nach Voraussetzung besitzt die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E); es gibt also Punkte $z_m\in R$ $(m = 1,2,\ldots)$ und $z_0\in X-R$, so dass $\lim\limits_{m\to\infty} z_m = z_0$, $|F_n(z_m)|\leqslant 1$ $(n,m = 1,2,\ldots)$; man kann annehmen, dass stets $|z_m|\leqslant\frac{1}{4}$, $|F_n(z_m)|\leqslant\frac{1}{4}$. Wir setzen $z_{qmr} = \frac{1}{2}x_q+z_m-z_r$, $z_{qm} = \frac{1}{2}x_q+z_m-z_0$ $(q,m,r = 1,2,\ldots)$; wegen $|x_q|\leqslant 1$, $|F_n(x_q)|\leqslant 1$ $(q,n = 1,2,\ldots)$ ist stets $|z_{qmr}|\leqslant 1$, $|F_n(z_{qmr})|\leqslant 1$ und da ausserdem $z_{qmr}\in R$, so ist $z_{qmr}\in S_0$; aus $z_{qm} = \lim\limits_{r\to\infty} z_{qmr}$ folgt nun $z_{qm}\in\bar{S}$ $(q,m = 1,2,\ldots)$. Da $\lim\limits_{m\to\infty} z_{qm} = \frac{1}{2}x_q$ und $\frac{1}{2}x_q$ ein innerer Punkt von W_q in $\bar{S}_0$ ist, gibt es eine natürliche Zahl m_q, so dass $z_{qm_q}\in W_q$ $(q = 1,2,\ldots)$. Es ist stets $z_0 = \frac{1}{2}x_q+z_{m_q}-z_{qm_q}$ und folglich

$$|F_i(z_0)-F_k(z_0)|\leqslant\tfrac{1}{2}|F_i(x_q)-F_k(x_q)|+|F_i(z_{m_q})-F_k(z_{m_q})|+|F_i(z_{qm_q})-F_k(z_{qm_q})|;$$

aus $x_q\in W_q$ folgt $|F_i(x_q)-F_k(x_q)|\leqslant 1/q$, ebenso ergibt sich aus $z_{qm_q}\in W_p$ die Ungleichung $|F_i(z_{qm_q})-F_k(z_{qm_q})|\leqslant 1/q$ $(i,k = p_q, p_q+1,\ldots; q = 1,2,\ldots)$. Wir haben also

$$|F_i(z_0)-F_k(z_0)| \leqslant \frac{3}{2q}+|F_i(z_{m_q})-F_k(z_{m_q})|$$
$$(i, k = p_q, p_q+1, \ldots;\ q = 1, 2, \ldots);$$

wegen $z_{m_q} \in R$ folgt hieraus sofort

$$\lim_{n\to\infty} [\underset{i,k=n,n+1,\ldots}{\text{obere Grenze}} |F_i(z_0)-F_k(z_0)|] \leqslant \frac{3}{2q} \qquad (q = 1, 2, \ldots),$$

was schliesslich $z_0 \in R$ ergibt, in Widerspruch mit dem Vorangehenden.

Wir beweisen jetzt den

SATZ. *Ist die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Funktionale $\{F_n(x)\}$ eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, so ist sie abgeschlossen.*

Beweis. Angenommen, es sei R nicht abgeschlossen; nach einem Satze der Herren S. Mazur und L. Sternbach besitzt dann die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E)(3). Behalten wir die vorige Bezeichnungsweise bei, so ist nach dem Hilfssatze 2 die Menge S_0 von erster Kategorie in $\bar{S}_0$; also nach dem Hilfssatze 1 kann R nicht eine $G_{\delta\sigma}$-Menge sein, entgegen der Voraussetzung.

2. Der im vorigen Abschnitte gegebene Satz behält seine Gültigkeit, wenn $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer Operationen ist, deren Werte einem Raume Y vom Typus (B) von folgender Eigenschaft angehören: ist $y_n \in Y, |y_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so gibt es eine reelle Zahlenfolge $\{t_n\}$, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ divergiert und dabei ihre Teilsummenfolge beschränkt ist. Der Beweis verbleibt übrigens ohne Änderung, da bei den in Rede stehenden Voraussetzungen die Folge $\{F_n(x)\}$ noch die Eigenschaft (E) besitzt(4).

Aus den Hilfssätzen 1 und 2 folgt noch die

Bemerkung. *Ist die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Operationen $\{F_n(x)\}$, mit Werten aus einem ebensolchen Raume Y, eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, so ist sie schon eine F_σ-Menge.* — In der Tat sei R_p die Menge der $x \in R$, für welche stets $|F_n(x)| \leqslant p$ $(p = 1, 2, \ldots)$; offenbar ist $R = R_1+R_2+\ldots$ Wir behaupten, dass jede der Mengen R_p abgeschlossen ist. Anderenfalls gibt es nämlich Punkte $z_m^* \in R_p$ $(m = 1, 2, \ldots)$ und $z_0^* \in X-R_p$, so dass $\lim_{m\to\infty} z_m^* = z_0^*$. Es ist $|F_n(z_m^*)| \leqslant p$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$, also auch stets $|F_n(z_0^*)| \leqslant p$; folglich $z_0^* \in X-R$. Setzt man $z_m = \frac{1}{p} z_m^*$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $z_0 = \frac{1}{p} z_0^*$, so ist $z_m \in R$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $z_0 \in X-$

(3) Siehe die unter (1) zitierte Arbeit, S. 60.
(4) Siehe die unter (1) zitierte Arbeit, S. 62.

$-R$, $\lim_{m\to\infty} z_m = z_0$ und $|F_n(z_m)| \leqslant 1$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$; die Folge $\{F_n(x)\}$ besitzt also die Eigenschaft (E). Von da aus folgt alles wie beim Beweise von Satz 1.

3. Wir bringen jetzt einige Anwendungen der vorigen Sätze. Zuerst zeigen wir, dass es *in jedem unendlichviel-dimensionalen Raume X vom Typus (B) eine lineaire Menge R gibt, die zwar eine $F_{\sigma\delta}$- aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist.* Sei $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer in X erklärter Funktionale derart, dass die Konvergenzmenge R dieser Folge nicht abgeschlossen ist(5). Als Konvergenzmenge einer Folge stetiger Funktionen ist R eine $F_{\sigma\delta}$-Menge; aus dem im vorigen Abschnitte bewiesenen Satze folgt aber, dass R keine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist. Z. B. bildet also die Menge R aller Punkte $x = \{\xi_n\}$ des Hilbertschen Raumes (l^2), für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ konvergiert, eine $F_{\sigma\delta}$- aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$-Menge. Betrachten wir jetzt im Raume X der stetigen Funktionen von der Periode 1 die Menge R, die aus allen stetig-differenzierbaren Funktionen besteht. Setzt man $F_n(x) = n[x(t+1/n)-x(t)]$ für $x \in X$, $(n = 1, 2, \ldots)$, so sind $F_n(x)$ lineare Operationen in X, mit den wieder diesem Raume angehörenden Werten, und R ist mit der Konvergenzmenge der Folge $\{F_n(x)\}$ identisch. R ist eine $F_{\sigma\delta}$- aber keine $G_{\delta\sigma}$-Menge, da ersichtlich die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E) besitzt. *Die Menge der stetig-differenzierbaren Funktionen von der Periode 1 ist im Raume aller stetigen Funktionen von der Periode 1 eine $F_{\sigma\delta}$- dabei aber keine $G_{\delta\sigma}$-Menge.*

(5) S. Mazur und L. Sternbach, *Über die Borelschen linearen Mengen*, Studia Mathematica 4 (1933), S. 48–53, insb. S. 48.

(Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1933)