Über metrische Gruppen

publié dans Studia Math. 3 (1931), p. 101–113.

Die vorliegende Arbeit hat zum Gegenstand einige Sätze betreffend Räume vom Typus (G); Räume dieser Art bilden einen Sonderfall der stetigen Gruppen. Wir nennen nämlich eine gegebene Gruppe X einen *Raum vom Typus* (G), wenn sie ein metrischer vollständiger Raum ist und dabei die folgenden Bedingungen erfüllt ($a_n, b_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $a, b \in X$):

1) Aus $a_n \to a$, $b_n \to b$ folgt $a_n b_n \to ab$;

2) aus $a_n \to a$ folgt $a_n^{-1} \to a^{-1}$ [1].

Es ist klar, dass der so erklärten Klasse von Räumen im Besonderen die Räume vom Typus (B) angehören, wenn man sie als Gruppen in Bezug auf die Addition betrachtet; diese Klasse enthält auch die unten erwähnten Räume vom Typus (F), wenn wir wieder in ihnen die Addition als Gruppenverknüpfung erklären.

Wir beweisen zuerst, dass jede Untergruppe eines Raumes vom Typus (G), welche in Bezug auf ihn die Bairesche Bedingung erfüllt, entweder eine Menge von erster Kategorie oder eine zugleich offene und abgeschlossene Menge ist. Aus der Bemerkung, dass in jedem metrischen Raum eine Borelsche Menge in Bezug auf ihn (und sogar in Bezug auf jede in ihm enthaltene Menge) die Bairesche Bedingung erfüllt, bekommen wir als eine spezielle Folgerung eine Verallgemeinerung der so genannten Resonanztheoreme, welche bisher nur im Falle der Räume vom Typus (B) bekannt waren, auf den Fall von allgemeinen zusammenhängenden Räumen vom Typus (G). Wir beweisen weiter, dass eine multiplikative in einem Raume vom Typus (G) erklärte und in Bezug auf ihn der Baireschen Bedingung genügende Operation – daher auch jede multiplikative Bairesche Operation – stetig ist; im Besonderen ist also eine Operation, die die Grenze einer Folge von stetigen multiplikativen Operationen darstellt, stetig. Endlich befassen wir uns mit dem Problem der Umkehrbarkeit der multiplikativen Operationen und beweisen in dieser Richtung den folgenden Satz: Wenn

(1) Vgl. F. Leja, *Sur la notion du groupe abstrait topologique*, Fundamenta Mathematicae 9 (1927), S. 37–44.

X, Y separable Räume vom Typus (G) sind und die stetige und multiplikative Operation $y = F(x)$ den Raum X auf den ganzen Raum Y eineindeutig abbildet, dann ist auch die zu $y = F(x)$ inverse Operation $x = F^{-1}(y)$ stetig. In nichtseparablen Räumen vom Typus (G) gilt ein entsprechender Satz im Allgemeinen nicht. Er behält seine Gültigkeit, wenn gewisse zusätzliche Bedingungen erfüllt sind. Es ist z. B. bekannt, dass er im Fall der Räume vom Typus (B) stattfindet; an einem anderen Ort werden wir den Beweis dieses Satzes für die allgemeineren Räume vom Typus (F) erbringen.

§ 1. Es bezeichne X einen Raum vom Typus (G). Wenn a ein Punkt dieses Raumes ist, so definiert die Operation $V(x) = ax$ (wie auch die Operation $H(x) = xa$) eine homöomorphe Abbildung des Raumes X auf sich selbst. Daher ist bei dieser Abbildung das Bild einer jeden abgeschlossenen (offenen) Menge wieder eine abgeschlossene (offene) Menge; daraus folgt ohne weiteres, dass bei einer solchen Abbildung eine nirgendsdichte Menge (eine Menge von erster Kategorie) in eine nirgendsdichte Menge (eine Menge von erster Kategorie) übergeht. Wir beweisen jetzt den folgenden

Hilfssatz 1. *Wenn eine Untergruppe X_0 des Raumes X innere Punkte enthält, so ist sie eine offene und zugleich abgeschlossene Menge* [2].

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung gibt es eine offene Kugel $K_0 \subset X_0$; wir bezeichnen mit x_0 ihren Mittelpunkt und es sei $x_1 \in X_0$. Bei der Abbildung $V_1(x) = x_1 x_0^{-1} x$ ist der Punkt x_1 das Bild des Punktes x_0 und die Kugel K_0 geht in eine offene Menge über. Weil ausserdem bei dieser Abbildung die Untergruppe X_0 in sich selbst transformiert wird, so ist klar, dass x_1 ein innerer Punkt dieser Untergruppe ist; da x_1 ein beliebiger Punkt der Untergruppe X_0 bezeichnet, so bildet sie tatsächlich eine offene Menge. Man beweist ganz analog, dass die Menge $X - X_0$ offen ist. Wenn nämlich der Punkt x_2 der Menge $X - X_0$ angehört, so geht bei der Abbildung $V_2(x) = x_2 x_0^{-1} x$ der Punkt x_0 in den Punkt x_2 und die Kugel K_0 in eine offene Teilmenge von $X - X_0$ über.

Bemerkung 1. Wenn die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt sind und der Raum X zusammenhängend ist, so ist $X_0 = X$.

Hilfssatz 2. *Wenn X_0 eine Untergruppe von zweiter Kategorie des Raumes X ist, so ist sie von zweiter Kategorie in jedem Punkt ihrer abgeschlossenen Hülle.*

Beweis. Wenn eine Teilmenge eines metrischen Raumes in jedem ihrer Punkte von erster Kategorie ist, so ist sie eine Menge von erster Kategorie [3] Wegen der Voraussetzung gibt es also einen Punkt $x_0 \in X_0$, in welchem die Untergruppe X_0 von zweiter Kategorie ist. Es sei $x_1 \in X_0$ und es bezeichne

(2) Wenn eine Teilmenge eines metrischen Raumes zugleich offen und abgeschlossen ist, so ist sie ersichtlich die Summe gewisser Komponenten dieses Raumes.

(3) S. Banach [*31*] [cette édition, vol. I, p. 204–206].

K_1 eine beliebige offene Kugel mit dem Mittelpunkte x_1. Bei der Abbildung $V(x) = x_0 x_1^{-1} x$ geht der Punkt x_1 in x_0 und die Kugel K_1 in eine offene Menge G_1 über; daher ist die Menge $G_1 X_0$ von zweiter Kategorie. Da weiter bei der betrachteten Abbildung die Untergruppe X_0 in sich selbst transformiert wird, so ist ersichtlich die Menge $K_1 X_0$ auch von zweiter Kategorie. Die Untergruppe X_0 ist also in jedem ihrer Punkte von zweiter Kategorie, und infolgedessen auch in jedem Punkte ihrer abgeschlossenen Hülle.

Bemerkung 2. Wenn die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt sind und der Raum X zusammenhängend ist, so ist $\bar{X}_0 = X$. Es genügt zu bemerken, dass $\bar{X}_0$ eine Untergruppe des Raumes X ist, die innere Punkte enthält und die Bemerkung 1 zu berücksichtigen.

Hilfssatz 3. *Wenn X_0 eine echte Untergruppe des Raumes X ist, so ist die Menge $X - X_0$ in jedem Punkte ihrer abgeschlossenen Hülle von zweiter Kategorie.*

Beweis. Ist die Untergruppe X_0 von erster Kategorie, so ist der Satz trivial; wir können also voraussetzen, dass diese Untergruppe von zweiter Kategorie ist. Daraus folgt, dass X_0 in einem seiner Punkte x_0 von zweiter Kategorie ist; um den Hilfssatz zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, dass die Menge $X - X_0$ in jedem ihrer Punkte von zweiter Kategorie ist. Es sei $x_1 \in X - X_0$ und K_1 eine offene Kugel mit x_1 als Mittelpunkt. Bei der Abbildung $V(x) = x_0 x_1^{-1} x$ geht der Punkt x_1 in den Punkt x_0 und die Kugel K_1 in eine offene Menge G_1 über. Infolgedessen ist die Menge $G_1 X_0$ von zweiter Kategorie und da bei der betrachteten Abbildung die Untergruppe X_0 in einen Teil der Menge $X - X_0$ transformiert wird, ist die Menge $K_1(X - X_0)$ von zweiter Kategorie. Daraus folgt unmittelbar, dass die Menge $X - X_0$ im Punkt x_1 von zweiter Kategorie ist.

Bemerkung 3. Bei den Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 ist $\overline{X - X_0} = X$, wenn der Raum X zusammenhängend ist. Im entgegengesetzten Fall würde die Menge X_0 innere Punkte enthalten und kraft der Bemerkung 1 wäre $X_0 = X$, entgegen der Voraussetzung.

Satz 1. *Wenn X_0 eine Untergruppe des Raumes X ist, die in Bezug auf ihn der Baireschen Bedingung genügt, so ist sie entweder von erster Kategorie oder zugleich offen und abgeschlossen.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass X_0 eine Menge von zweiter Kategorie ist; es enthält daher die Untergruppe $\bar{X}_0$ innere Punkte und auf Grund des Hilfssatzes 1 ist sie eine offene Menge. Wenn x_0 einen Punkt der Untergruppe X_0 bezeichnet, in welchem sie von zweiter Kategorie ist, so ist sie es auch in Bezug auf $\bar{X}_0$. Da aber $\bar{X}_0$ einen Raum vom Typus (G) bildet, so folgern wir aus dem Hilfssatz 2, dass X_0 in jedem Punkt der Untergruppe $\bar{X}_0$ von zweiter Kategorie in Bezug auf sie und also auch in Bezug auf den Raum X ist. Nehmen wir an, dass $X_0 \neq \bar{X}_0$ ist; aus dem Hilfssatz 3 folgt, dass dann die Menge $\bar{X}_0 - X_0$ in jedem Punkt der Menge $\overline{\bar{X}_0 - X_0}$ von zweiter Kategorie zu $\bar{X}_0$ und daher auch zu X ist. Auf diese Weise haben wir gezeigt, dass die Untergruppe X_0 in jedem Punkt der offenen Menge $\bar{X}_0$ von zweiter Kategorie zugleich mit ihrer Komplementärmenge ist; das steht aber im Widerspruch damit, dass die Untergruppe X_0 in Bezug auf den Raum X der Baireschen Bedingung genügt. Es muss also $X_0 = \bar{X}_0$ sein, was zusammen mit dem Vorigen zeigt, dass X_0 eine zugleich offene und abgeschlossene Menge ist.

Bemerkung 4. Wenn der Raum X zusammenhängend ist und die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind, so ist die Untergruppe X_0 entweder von erster Kategorie oder mit dem Raum X identisch. Dies folgt unmittelbar aus der Bemerkung 1.

Bemerkung 5. Eine Suslinsche Teilmenge eines metrischen Raumes genügt in Bezug auf ihn (und sogar in Bezug auf jede in ihm enthaltene Menge) der Baireschen Bedingung(4).

Es seien X, Y beliebige Räume vom Typus (G) und $y = F(x)$ eine Operation (Funktion), welche im Raume X erklärt ist und deren Werte Elemente des Raumes Y sind. Wir sagen, dass die Operation $y = F(x)$ *multiplikativ* ist, wenn für beliebige Elemente x_1, x_2 aus X die Relation $F(x_1 x_2) = F(x_1) F(x_2)$ gilt; eine multiplikative und stetige Operation nennen wir *potenzartig*(*). Ein *Funktional* ist eine Operation mit reellen Werten.

Setzen wir voraus, dass im Raume X eine Folge potenzartiger Operationen $\{F_n(x)\}$ erklärt ist, deren jede den Raum X auf einen Teil des Raumes Y abbildet. Es bezeichne X_0 die Konvergenzmenge der Folge $\{F_n(x)\}$, d. h. die Menge aller Punkte des Raumes X, in denen diese Folge von Operationen konvergent ist. Nach einem bekannten Satz ist die Menge X_0 eine Borelsche Menge und zwar ein $F_{\sigma,\delta}$; das folgt übrigens unmittelbar aus der Identität

$$X_0 = \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{p,q=s}^{\infty} X_{p,q,r},$$

wo $X_{p,q,r}$ $(p, q, r = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller dieser Punkte x des Raumes X

(4) Für den Fall der Borelschen Teilmengen ist dieser Satz in der unter (3) zitierten Arbeit, Par. 4, enthalten. In voller Allgemeinheit wurde er von Herrn Szpilrajn ausgesprochen: E. Szpilrajn, *O mierzalności i warunku Baire'a*, Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa 1929/1930, S. 297–303, insb. S. 300. Den Beweis kann man übrigens genau so wie im Fall der Euklidischen Räume führen: O. Nikodym, *Sur une propriété de l'opération A*, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), S. 149–154; er bietet keine Schwierigkeiten, wenn wir nur den in der unter (3) zitierten Note enthaltenen Hauptsatz berücksichtigen.

(*) Anmerkung bei der Korrektur: Diese Benennung hat Herr Steinhaus vorgeschlagen.

bezeichnet, für die die Ungleichung

$$(F_p(x), F_q(x)) \leqslant 1/r$$

stattfindet. Unter Berücksichtigung der Bemerkung 5 folgt nun aus dem Satz 1, da die Menge X_0 offenbar eine Untergruppe des Raumes X bildet, der

SATZ 2. *Die Konvergenzmenge einer Folge potenzartiger, im Raume X erklärter Operationen bildet eine Untergruppe dieses Raumes, die entweder von erster Kategorie oder zugleich offen und abgeschlossen ist.*

Bemerkung 6. Wenn unter den Voraussetzungen des letzten Satzes der Raum X zusammenhängend ist, so ist die Konvergenzmenge der betrachteten Folge entweder eine Untergruppe des Raumes X von erster Kategorie oder mit diesem Raum identisch. Dies folgt aus dem Satz 2 und der Bemerkung 1.

Nehmen wir jetzt an, dass $\{F_{p,q}(x)\}$ eine Doppelfolge von potenzartigen, im Raume X erklärten Operationen ist und dabei die Werte der Operation $F_{p,q}(x)$ einem Raume Y_p $(p = 1, 2, \ldots)$ vom Typus (G) angehören. Aus der Bemerkung 6 ergibt sich sofort der folgende

SATZ 3. *Wenn eine Doppelfolgepotenzartiger, im Raume X erklärter Operationen $\{F_{p,q}(x)\}$ die Eigenschaft besitzt, dass bei jedem natürlichen p ein Punkt x_p im Raume X existiert, in welchem die Folge $F_{p,1}(x), F_{p,2}(x), \ldots$ divergiert, und der Raum X zusammenhängend ist, so ist die Menge aller Punkte dieses Raumes, in denen mindestens eine der Folgen $F_{p,1}(x), F_{p,2}(x), \ldots$ $(p = 1, 2, \ldots)$ konvergiert, von erster Kategorie.*

Man kann also im Besonderen, unter den Voraussetzungen des obigen Satzes, im Raume X einen Punkt x_0 so wählen, dass jede der Folgen $F_{p,1}(x), F_{p,2}(x_0), \ldots$ $(p = 1, 2, \ldots)$ divergent ist; diese Folgerung bildet eine Verallgemeinerung des zweiten Resonanztheorems auf den Fall von allgemeinen zusammenhängenden Räumen von Typus (G)([5]).

Es sei, wie oben, $\{F_n(x)\}$ eine Folge potenzartiger im Raume X erklärter Operationen, deren jede den Raum X auf einen Teil des Raumes Y abbildet. Bezeichnen wir mit X_0 die Menge aller Punkte x des Raumes X, in denen die Folge $\{F_n(x)\}$ beschränkt, d. h.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (F_n(x), 1) < +\infty$$

ist. X_0 bildet eine Borelsche Menge, ein F_σ; es ist nämlich

$$X_0 = \sum_{p=1}^{\infty} X_p,$$

wo X_p $(p = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller Punkte x des Raumes X bezeichnet, wo

$$(F_n(x), 1) \leqslant p \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist. Wenn nun die Menge X_0 eine Untergruppe des Raumes X bildet, so muss sie, nach dem Satz 1 und der Bemerkung 5, von erster Kategorie oder zugleich offen und abgeschlossen sein; insbesondere also gilt der

SATZ 4. *Die Menge aller Punkte, in denen eine Folge von potenzartigen, im Raume X erklärten Funktionalen beschränkt ist, bildet eine Untergruppe dieses Raumes, die entweder von erster Kategorie oder zugleich offen und abgeschlossen ist.*

Bemerkung 7. Wenn die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt sind und der Raum X zusammenhängend ist, so ist die Menge aller Punkte, in denen die betrachtete Folge beschränkt ist, entweder eine Untergruppe des Raumes X von erster Kategorie oder mit diesem Raum identisch.

Aus dem Satz 4 und der Bemerkung 1 folgt endlich der

SATZ 5. *Wenn eine Doppelfolge von potenzartigen, im Raume X erklärten Funktionalen $\{F_{p,q}(x)\}$ so beschaffen ist, dass bei jedem natürlichen p ein Punkt x_p im Raume X existiert, in welchem die Folge $F_{p,1}(x), F_{p,2}(x), \ldots$ nicht beschränkt ist, und der Raum X zusammenhängend ist, so ist die Menge aller Punkte dieses Raumes, in denen mindestens eine der Folgen $F_{p,1}(x)$, $F_{p,2}(x), \ldots$ $(p = 1, 2, \ldots)$ beschränkt ist, von erster Kategorie.*

Man kann also, unter den Voraussetzungen dieses Satzes, einen Punkt x_0 im Raume X so wählen, dass $\overline{\lim_{q\to\infty}} |F_{p,q}(x_0)| = +\infty$ $(p = 1, 2, \ldots)$ ist; dieses Ergebniss bildet eine Verallgemeinerung des ersten Resonanztheorems über Funktionale([6]) auf den Fall von Räumen vom Typus (G).

§ 2. Es bezeichne X einen Raum vom Typus (G) und $y = F(x)$ eine in ihm erklärte multiplikative Operation, deren Werte Elemente eines Raumes Y vom Typus (G) sind. Setzen wir voraus, dass die Operation $y = F(x)$ in einem Punkte a stetig ist und es bezeichne b einen beliebigen anderen, dem Raume X angehörigen Punkt. Wenn die Punktfolge $\{b_n\}$ gegen b konvergent ist, so konvergiert die Folge $\{b_n b^{-1} a\}$ gegen a; infolgedessen haben wir $F(b_n b^{-1} a) \to F(a)$ und da stets $F(b_n b^{-1} a) = F(b_n)[F(b)]^{-1} F(a)$ ist, so muss $F(b_n) \to F(b)$ sein. Auf diese Weise erhält man den folgenden

HILFSSATZ 4. *Eine multiplikative, im Raume X erklärte und in einem Punkte dieses Raumes stetige Operation ist potenzartig.*

Wir beweisen nun den

SATZ 6. *Eine multiplikative, im Raume X erklärte und in Bezug auf ihn der Baireschen Bedingung genügende Operation $y = F(x)$ ist potenzartig.*

([5]) S. Banach et H. Steinhaus [*19*] [ce volume, p. 365–374], insb. S. 55 [ce volume, p. 369].

([6]) Die unter ([5]) zitierte Arbeit, insb. S. 54 [ce volume, p. 369].

Beweis. Wegen der Voraussetzung enthält der Raum X eine Teilmenge A, die von erster Kategorie ist und die folgende Eigenschaft besitzt: Betrachtet man die Operation $y = F(x)$ in der Menge $X-A$, so ist sie dort überall stetig. Es sei $\{b_n\}$ eine gegen 1 konvergente Punktfolge und bezeichnen wir mit B_p die Menge aller dieser Punkte x, für die $b_p x \in A$ ist $(p = 1, 2, \ldots)$. Jede der Mengen B_p ist in dem Bilde von A bei der Abbildung $V_p(x) = b_p^{-1} x$ enthalten und also von erster Kategorie; infolgedessen ist die Menge $B = \sum_{p=1}^{\infty} B_p$ auch von erster Kategorie und $(X-A)-B \neq 0$. Es sei $a \in (X-A)-B$; wir haben $a \in X-A$, $b_n a \in X-A$ $(p = 1, 2, \ldots)$ und, da die Folge $\{b_p a\}$ gegen a konvergiert, $F(b_p a) \to F(a)$. Aus den Gleichungen $F(b_p a) = F(b_p) F(a)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ folgt nun die Beziehung $F(b_p) \to 1$; die Operation $y = F(x)$ ist im Punkte 1 stetig und, nach dem Hilfssatze 4, potenzartig.

Bemerkung 8. Eine in einem metrischen Raume erklärte Bairesche Funktion, deren Werte einem metrischen Raume angehören, genügt in Bezug auf ihn (und sogar in Bezug auf jede in ihm enthaltene Menge) der Baireschen Bedingung(7).

Aus dem Satz 6 und der Bemerkung 8 folgt, dass eine im Raume X erklärte multiplikative Bairesche Operation potenzartig ist; speziell gilt der

Satz 7. *Eine im Raume X erklärte Operation, die die Grenze einer Folge von stetigen und multiplikativen, in diesem Raume erklärten Operationen darstellt, ist potenzartig.*

§ 3. Es seien X, Y zwei Räume vom Typus (G) und $y = F(x)$ eine potenzartige, im Raume X erklärte Operation, die ihn auf den ganzen Raum Y eineindeutig abbildet. Die zu $y = F(x)$ inverse Operation $x = F^{-1}(y)$ ist multiplikativ; dass sie unstetig sein kann, lehrt das folgende einfache Beispiel:

Wir betrachten die Gruppe X der reellen Zahlen in Bezug auf die Addition und definieren als Entfernung je zweier verschiedenen Elemente dieser Gruppe die Zahl 1; X bildet offenbar einen Raum vom Typus (G). Wir bezeichnen weiter mit Y den Raum vom Typus (G), den die Menge der reellen Zahlen bei der Addition als Gruppenverknüpfung und der üblichen Entfernungsdefinition bildet. Setzt man im Raume X $y = x$, so bildet die so in diesem Raume erklärte potenzartige Operation ihn auf den ganzen Raum Y eineindeutig ab; die zu ihr inverse Operation ist aber ersichtlich überall unstetig.

Wir werden jetzt zeigen, dass wenn nur der Raum X separabel ist (dann muss der Raum Y als stetiges Bild von X separabel sein), so ist die zu $y = F(x)$ inverse Operation $x = F^{-1}(y)$ potenzartig; wir schicken eine Bemerkung voraus:

(7) Die unter (3) zitierte Arbeit, insb. S. 397 [cette édition, vol. I, p. 206].

Bemerkung 9. Eine Teilmenge eines metrischen Raumes Y, die das stetige Bild einer Suslinschen Teilmenge eines vollständigen und separablen metrischen Raumes X ist, ist eine Suslinsche Menge(8).

Nach dieser Bemerkung beweisen wir den

Satz 8. *Wenn eine potenzartige, in einem separablen Raume X vom Typus (G) erklärte Operation $y = F(x)$ ihn auf den ganzen Raum Y vom Typus (G) abbildet, $\{y_n\}$ eine Folge von Elementen des Raumes Y ist, die gegen ein Element y_0 dieses Raumes konvergiert und x_0 das Urbild des Elementes y_0 bezeichnet, so gibt es im Raume X eine gegen x_0 konvergente Elementfolge $\{x_n\}$ von dieser Eigenschaft, dass sets $F(x_n) = y_n$ ist.*

Beweis. Ohne der Allgemeinheit des Beweises zu schaden, können wir voraussetzen, dass $x_0 = y_0 = 1$ ist. Es sei m eine natürliche Zahl. Man kann um jeden Punkt des Raumes X eine offene Kugel K so schlagen, dass für $a, b \in K$ stets $(ab^{-1}, 1) < 1/m$ wird. Da der Raum X separabel ist, so kann das System aller dieser Kugeln ohne Änderung seiner Summe durch ein abzählbares Teilsystem $K_1, K_2, \ldots$ ersetzt werden; wir haben also

$$(1) \qquad (ab^{-1}, 1) < 1/m \quad \text{für} \quad a, b \in K_n \ (n = 1, 2, \ldots)$$

und dabei

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} K_n = X.$$

Es bezeichne $F(K_n)$ das Bild der Kugel K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bei der Abbildung $y = F(x)$ des Raumes X auf den Raum Y. Wegen (2) und der Voraussetzung erschöpft die Menge $\sum_{n=1}^{\infty} F(K_n)$ den ganzen Raum Y; mindestens eine der Mengen $F(K_n)$ muss daher von zweiter Kategorie sein. Setzen wir voraus, dass die Menge $F(K_p)$ diese Eigenschaft aufweist; folglich ist sie von zweiter Kategorie in jedem Punkte einer offenen Kugel L. Weil aber, auf Grund der Bemerkungen 5 und 9, die Menge $F(K_p)$ als stetiges Bild der offenen Kugel K_p in Bezug auf den Raum Y der Baireschen Bedingung genügt, so können wir sogar annehmen, dass die Menge $L - F(K_p)$ von erster Kategorie ist. Es existiert – wie leicht zu sehen ist – eine offene Kugel L_0 und eine natürliche Zahl n_0, so beschaffen, dass

$$(3) \qquad y_n y \in L \ (n = n_0+1, n_0+2, \ldots) \quad \text{für} \quad y \in L_0$$

ist. Anderenfalls gäbe es nämlich eine Elementfolge $\{\eta_n\}$ und eine wachsende Folge natürlicher Zahlen $\{k_n\}$, so dass sets $y_{k_n} \eta_n \notin L$ und dabei $\eta_n \to y_0$ wäre.

(8) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 2 Auflage (1927), S. 209.

Da die Folge $\{y_n\}$ gegen 1 konvergiert, so würde aus $\eta_n \to y_0$ die Relation $y_{k_n}\eta_n \to y_0$ folgen, die mit $y_{k_n}\eta_n \notin L$ $(n = 1, 2, \ldots)$ unvereinbar ist.

Es sei L_n das Bild der Menge $L_0 F(K_p)$ bei der Abbildung $V_n(y) = y_n y$ des Raumes Y auf sich selbst $(n = 1, 2, \ldots)$; da die Menge $L_0 F(K_p)$ von zweiter Kategorie ist, so besitzt jede der Mengen L_n dieselbe Eigenschaft. Ausserdem haben wir nach (3) $L_n \subset L$ und infolgedessen

$$L_n = L_n F(K_p) + L_n [L - F(K_p)] \quad (n = n_0+1, n_0+2, \ldots).$$

Die Menge $L - F(K_p)$ ist von erster Kategorie; aus den letzten Gleichungen folgt nun, dass die Mengen $L_n F(K_p)$ von zweiter Kategorie und also nicht leer sind $(n = n_0+1, n_0+2, \ldots)$. Bezeichnet man mit η_n einen beliebigen Punkt der Menge $L_n F(K_p)$, so ist, wie aus der Definition der Mengen L_n sofort folgt,

(4) $$\eta_n, \bar{\eta}_n = y_n^{-1}\eta_n \in F(K_p) \quad (n = n_0+1, n_0+2, \ldots).$$

Es seien $\xi_n, \bar{\xi}_n$ die in K_p gelegenen Urbilder von $\eta_n, \bar{\eta}_n$, also

(5) $$F(\xi_n) = \eta_n, \quad F(\bar{\xi}_n) = \bar{\eta}_n, \quad \xi_n, \bar{\xi}_n \in K_p$$

und setzen wir

(6) $$x_{m,n} = \xi_n \bar{\xi}_n^{-1} \quad (n = n_0+1, n_0+2, \ldots).$$

Nach (4), (5) und (6) bestehen, für alle natürliche $n > n_0$, die Gleichungen $F(x_{m,n}) = F(\xi_n)[F(\bar{\xi}_n)]^{-1} = \eta_n \bar{\eta}_n^{-1} = \eta_n (y_n^{-1}\eta_n)^{-1} = y_n$, d.h.

(7) $$F(x_{m,n}) = y_n;$$

man kann dabei ersichtlich noch die Elemente $x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,n_0}$ im Raume X so wählen, dass die obige Beziehung auch für $n = 1, 2, \ldots, n_0$ gültig wird. Für $n = n_0+1, n_0+2, \ldots$ ist, wegen (1), (5) und (6), $(x_{m,n}, 1) < 1/m$ und demnach

(8) $$\varlimsup_{n\to\infty} (x_{m,n}, 1) \leqslant 1/m.$$

Auf diese Weise haben wir, bei jedem natürlichen m, eine Folge $\{x_{m,n}\}$ von Elementen des Raumes X definiert, für die die Relationen (7), (8) stattfinden. Die Konstruktion der Elementfolge $\{x_n\}$ mit den im Satze verlangten Eigenschaften bietet jetzt keine Schwierigkeiten; sie wird dem Leser überlassen.

Bemerkung 10. Unter den Voraussetzungen des lezten Satzes geht bei der Abbildung $y = F(x)$ des Raumes X auf den Raum Y eine jede offene Menge in eine offene Menge. Der Beweis ist unmittelbar.

Als eine leichte Folgerung des Satzes 8 bekommen wir den

Satz 9. *Wenn eine potenzartige, in einem separablen Raume X vom Typus (G) erklärte Operation $y = F(x)$ ihn auf den ganzen Raum Y eineindeutig abbildet, so ist die zu $y = F(x)$ inverse Operation $x = F^{-1}(y)$ potenzartig.*

Man kann nun ohne besondere Schwierigkeiten zeigen, dass die Bemerkung gilt:

Bemerkung 11. Wenn X ein Raum vom Typus (G) ist, so sind die folgenden Eigenschaften dieses Raumes äquivalent:

(α) Wenn $y = F(x)$ eine potenzartige, im Raume X erklärte Operation ist, die ihn auf einen Raum Y vom Typus (G) eineindeutig abbildet, so ist die Umkehroperation $x = F^{-1}(y)$ potenzartig.

(β) Wenn durch eine Entfernungsdefinition der Raum X wieder zu einem Raume vom Typus (G) wird und – indem wir mit $(a, b)^*$ die neue Entfernung je zweier Elemente a, b dieses Raumes bezeichnen – aus $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in X$, $x_n \to x_0$ stets $(x_n, x_0)^* \to 0$ folgt, so auch umgekehrt.

Nach dem Satz 9 besitzt der Raum X die Eigenschaft (α), wenn er nur separabel ist; wegen der letzten Bemerkung kommt ihm dann auch die Eigenschaft (β) zu. Wir fügen hier noch einen Satz an:

Satz 10. *Wenn $y = F(x)$ eine multiplikative, in einem separablen Raume X vom Typus (G) erklärte Operation ist, deren Werte einem separablen Raume Y vom Typus (G) angehören und aus $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $x_n \to x_0$, $F(x_n) \to y_0$ stets $y_0 = F(x_0)$ folgt, so ist die Operation $y = F(x)$ potenzartig.*

Der Beweis verläuft folgenderweise. Wir bezeichnen mit $(a, b)^*$, $(a, b)^{**}$ die Entfernung je zweier Elemente a, b des Raumes X bzw. Y und erklären im Raume X noch einen anderen Distanzbegriff durch die Festsetzung

$$(a, b) = (a, b)^* + (F(a), F(b))^{**}.$$

Durch diese Entfernungsdefinition wird der Raum X auch zu einem separablen Raume vom Typus (G); die Vollständigkeit folgt unmittelbar, wenn wir die Eigenschaften der Operation $y = F(x)$ berücksichtigen. Wir betrachten nun den so erklärten Distanzbegriff als fundamental. Da aus $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in X$ und $x_n \to x_0$, d.h. $(x_n, x_0) \to 0$, stets $(x_n, x_0)^* \to 0$ folgt, so auch, nach dem Satz 9 und der Bemerkung 11, umgekehrt; dies ist aber mit der Stetigkeit der Operation $y = F(x)$ gleichbedeutend.

Wir wissen schon, dass im Fall des Satzes 9 die Voraussetzung, nach der der Raum X separabel ist, nicht entbehrt werden kann; in nichtseparablen Räumen vom Typus (G) gilt im Allgemeinen dieser Satz nicht. Es ist aber gut bekannt, dass er z.B. für Räume vom Typus (B) stets gilt (9); wir werden an einem anderen Ort zeigen, dass er auch für die allgemeineren Räume vom Typus (F) seine Gültigkeit behält. Dabei nennen wir einen gegebenen linearen Raum X einen *Raum vom Typus* (F), wenn er ein vollständiger metrischer Raum ist und die folgenden Eigenschaften besitzt ($a_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a, b \in X$, t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ und t reelle Zahlen):

1) $(a, b) = (a - b, 0)$;
2) aus $a_n \to a$ folgt $ta_n \to ta$;
3) aus $t_n \to t$ folgt $t_n a \to ta$.

(9) S. Banach [23] [ce volume, p. 381–395] insb. Théorème 7; siehe auch: J. Schauder, *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. 2 (1930), S. 1–6. [*Oeuvres*, Warszawa 1978, S. 162–167.]