Définissons maintenant dans l'intervalle $\Delta = (a, b)$ la fonction $\varphi(x)$ comme borne supérieure de tous les nombres $f(\xi)$ pour $a \leqslant \xi \leqslant x$; $\varphi(x)$ sera évidemment une fonction non décroissante dans (a, b), donc aura, comme l'on sait, presque partout une dérivée finie. L'ensemble $\mathcal{N}$, où la fonction $\varphi(x)$ ne possède pas de dérivée finie, est donc de mesure nulle.

On voit sans peine que pour tout point x de l'ensemble ΔE_k qui est limite d'une suite décroissante de points de cet ensemble, nous avons $\overline{\varphi'_+}(x) = +\infty$ (puisque $f'_+(x) = +\infty$ et $\varphi(t) = f(t)$ dans ΔE_k). Il en résulte que l'ensemble ΔE_k, sauf peut-être un nombre fini ou une infinité dénombrable de points (qui ne sont pas points d'accumulation de droite de ΔE_k) est contenu dans l'ensemble $\mathcal{N}$. Par conséquent ΔE_k est de mesure nulle, ce qui implique une contradiction. Notre théorème est ainsi démontré.

Sur les solutions d'une équation fonctionnelle de J. Cl. Maxwell

par

S. Banach et S. Ruziewicz

En examinant la loi de la distribution des vitesses des molécules d'un gaz J. Cl. Maxwell est arrivé à considérer une équation fonctionnelle de la forme

$$f(u)f(v)f(w) = \varphi(u^2+v^2+w^2); \tag{1}$$

il s'agit de déterminer les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ d'une variable réelle de sorte que l'équation (1) subsiste pour tous les u, v, w réels. Nous ne nous arrêterons pas à considérer le raisonnement par lequel Maxwell arrive à cette équation; nous nous occuperons seulement de sa résolution qui présente quelque intérêt au point de vue mathématique. La méthode classique de la résolution de l'équation (1) consiste en ce que l'on fait certaines hypothèses sur la nature de la fonction f (on admet par exemple qu'elle soit dérivable); on réduit ainsi la question à la résolution d'une équation différentielle.

Le but de cette Note est de déduire, à l'aide d'une méthode élémentaire, *toutes* les résolutions de l'équation (1).

Dans l'équation fonctionnelle (1) nous pouvons avoir:

$$\varphi(x) = 0 \text{ pour tous les } x \geqslant 0. \tag{2}$$

Nous avons dans ce cas

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

pour tous les x réels.

En effet, si nous avions $f(x_0) \neq 0$, nous aurions

$$[f(x_0)]^3 = \varphi(3x_0^2) \neq 0,$$

contrairement à (2).

Le système des fonctions (2) et (3) fournit une résolution continue de l'équation (1).

Supposons maintenant qu'on n'ait pas constamment $\varphi(x) = 0$. On a alors

$$\varphi(0) \neq 0.$$

En effet, pour un x_0, nous avons

$$\varphi(x_0) \neq 0.$$

En posant $u = 0$, $v = 0$, $w = \sqrt{x_0}$ (1), nous trouvons

$$[f(0)]^2 f(w) = \varphi(x_0) \neq 0,$$

donc

(4) $$f(0) \neq 0$$

et

$$[f(0)]^3 = \varphi(0) \neq 0.$$

Posons

$$\varphi(0) = a.$$

Distinguons deux cas:

α) on a constamment $\varphi(x) = 0$ pour $x > 0$;

β) il existe un $x_0 > 0$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$.

Le cas α) n'offre aucune difficulté. Dans ce cas nous avons:

$$[f(0)]^3 = a,$$

donc

$$f(0) = \sqrt[3]{a}.$$

Si $x \neq 0$, on a

$$f(x)[f(0)]^2 = \varphi(x^2) = 0,$$

d'où, d'après (4),

$$f(x) = 0 \text{ pour tous les } x \neq 0.$$

Les fonctions

$$f(0) = \sqrt[3]{a}, \quad f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0,$$

et

$$\varphi(0) = a, \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

satisfont à l'équation (1) et fournissent une nouvelle solution (discontinue) de cette équation fonctionnelle (2).

Considérons maintenant le cas β). Dans ce cas on a constamment $\varphi(x) \neq 0$; en effet, si l'on avait

(5) $$\varphi(\xi) = 0 \quad \text{pour un } \xi > 0,$$

on aurait

$$[f(0)]^2 f(\sqrt{\xi}) = \varphi(\xi) = 0.$$

(1) Nous ne considérerons dans cette Note que les radicaux arithmétiques.

(2) Dans l'équation (1) généralisée pour n variables on a $a > 0$ si n est pair.

d'où, d'après (4):

$$f(\sqrt{\xi}) = 0.$$

On en déduit, pour tout y réel:

$$f(0) f(\sqrt{\xi}) f(y) = \varphi(\xi + y^2) = 0,$$

c'est-à-dire

(5a) $$\varphi(x) = 0 \text{ pour tous les } x \geqslant \xi.$$

Envisageons la borne inférieure ξ_0 de tous les $x \geqslant 0$ pour lesquels $\varphi(x) = 0$. Cette borne inférieure ne peut être nulle, d'après l'hypothèse β) et d'après la remarque que (5) entraîne (5a). Nous avons donc:

(6) $$\begin{cases} \varphi(x) \neq 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < \xi_0, \\ \varphi(x) = 0 & \text{pour} \quad x > \xi_0. \end{cases}$$

Posons

(7) $$u_0 = \sqrt{\frac{\xi_0}{2}},$$

(8) $$k = \sqrt{\xi_0} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{4};$$

nous aurons

$$f\left(u_0 - \frac{k}{2}\right) f(u_0 + k) f(0) = \varphi\left(\left(u_0 - \frac{k}{2}\right)^2 + (u_0 + k)^2\right).$$

Or d'après (7) et (8) on a les inégalités

(9) $$\left(u_0 - \frac{k}{2}\right)^2 + (u_0 + k)^2 = \xi_0 \frac{39 - 2\sqrt{2}}{32} > \xi_0,$$

(10) $$\left(u_0 - \frac{k}{2}\right)^2 = \xi_0 \left(\frac{5\sqrt{2} - 2}{8}\right)^2 < \xi_0,$$

(11) $$(u_0 + k)^2 = \xi_0 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)^2 < \xi_0.$$

D'après (6) et (9) on a

$$f\left(u_0 - \frac{k}{2}\right) f(u_0 + k) f(0) = 0,$$

d'où, d'après (4), il résulte soit

$$f\left(u_0 - \frac{k}{2}\right) = 0,$$

ce qui donnerait

$$0 = f\left(u_0 - \frac{k}{2}\right)[f(0)]^2 = \varphi\left(\left(u_0 - \frac{k}{2}\right)^2\right),$$

ce qui est impossible, d'après (10) et (6), soit

$$f(u_0+k) = 0,$$

d'où, en s'appuyant sur (11) et (6), on aboutirait de même à une contradiction.

On a donc dans le cas β):

(12) $$\varphi(x) \neq 0 \text{ pour tous les } x \geqslant 0,$$

ce qui entraîne

(13) $$f(x) \neq 0 \text{ pour tous les } x \text{ réels.}$$

Dans le cas β) nous distinguerons à leur tour deux cas [1]:

$$\beta_1) \quad f(0) > 0, \qquad \beta_2) \quad f(0) < 0.$$

Dans le cas β_1) nous avons

$$f(0)\left[f\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right]^2 = \varphi(x),$$

ce qui démontre, d'après (13), qu'on a

(14) $$\varphi(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0.$$

On a alors

(15) $$f(x) > 0 \text{ pour les } x \text{ réels,}$$

puisque autrement on aurait pour un x_0

$$[f(0)]^2 f(x_0) = \varphi(x_0^2) \leqslant 0,$$

contrairement à (14).

On prouverait de même que, dans le cas β_2)

$$\varphi(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0$$

et

$$f(x) < 0 \text{ pour tous les } x \text{ réels.}$$

Posons

(16) $$f(x) = F(x),$$

(17) $$\varphi(x) = \Phi(x).$$

L'équation (1) donne

$$F(u)F(v)F(w) = \Phi(u^2+v^2+w^2);$$

[1] Cf. la remarque précédente.

en prenant les logarithmes réels, ce qui est possible d'après (12), (13), (16) et (17), et en posant

(18) $$\lg F(x) = \psi(x),$$

(19) $$\lg \Phi(x) = \chi(x),$$

nous obtenons

(20) $$\psi(u)+\psi(v)+\psi(w) = \chi(u^2+v^2+w^2).$$

En posant

$$u = v = w = 0,$$

on a

$$\psi(0) = \tfrac{1}{3}\chi(0);$$

or, en posant

$$v = w = 0,$$

on a

$$\psi(u)+2\psi(0) = \chi(u^2),$$

d'où

(21) $$\psi(u) = \chi(u^2) - \tfrac{2}{3}\chi(0).$$

En substituant (21) dans (20), on obtient

(22) $$\chi(u^2)+\chi(v^2)+\chi(w^2)-2\chi(0) = \chi(u^2+v^2+w^2).$$

Posons

$$u^2 = U, \quad v^2 = V, \quad w^2 = W,$$

(23) $$\chi(x)-\chi(0) = H(x);$$

l'équation (21) devient alors

(24) $$H(U)+H(V)+H(W) = H(U+V+W) \text{ [1]}.$$

Admettons que nous ayons une fonction quelconque satisfaisant à l'équation (24). En vertu de (23), (21), (18) et (19) on a donc

$$F(x) = e^{H(x^2)+\frac{1}{3}\chi(0)} = Ae^{H(x^2)},$$

$$\Phi(x) = e^{H(x)+\chi(0)} = A^3 e^{H(x)},$$

d'où, moyennant (16) et (17):

(25) $$f(x) = \pm Ae^{H(x^2)}, \quad \varphi(x) = \pm A^3 e^{H(x)},$$

les signes dans les deux formules étant tous les deux positifs ou tous les deux négatifs [2].

[1] L'équation (24) a été déduite pour $U, V, W \geqslant 0$; si l'on pose $H(-x) = -H(x)$, l'équation (24) subsiste pour tous les U, V, W, réels.

[2] Pour un nombre pair de variables on a évidemment $f(x) = F(x)$, $\varphi(x) = \Phi(x)$.

Donc, pour que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfassent à l'équation (1) dans le cas β), elles doivent être de la forme (25), A étant un nombre réel indépendant de x et $H(x)$ une fonction satisfaisant à l'équation (24), c'est-à-dire une fonction additive.

D'autre part, on vérifie sans peine que les fonctions de cette forme satisfont effectivement à l'équation (1).

On sait que, dans les hypothèses beaucoup moins probables que celle de la dérivabilité de la fonction $H(x)$ (ce qui est nécessaire pour que $e^{H(x)}$ ait une dérivée) p. ex. dans la condition que $H(x)$ soit bornée, ou qu'elle soit continue au moins dans un point, ou qu'elle soit mesurable au sens de M. Lebesgue, l'équation fonctionnelle (24) admet une résolution unique qui est une fonction linéaire

$$H(x) = ax \text{ [1]}$$

d'où

$$f(x) = Ae^{ax^2}, \quad \varphi(x) = A^3 e^{ax}.$$

Or, comme l'a démontré M. Hamel, l'équation (24) a une infinité de résolutions discontinues. D'après les propriétés les plus simples de la fonction exponentielle et d'après la définition des fonctions mesurables, les fonctions $H(x)$ et $e^{H(x)}$ sont en même temps mesurables ou non.

En résumant les résultats obtenus, nous arrivons aux théorèmes suivants:

1) *Toutes les résolutions continues de l'équation* (1) *sont de la forme*

$$f(x) = Ae^{ax^2}, \quad \varphi(x) = A^3 e^{ax},$$

où A et a sont des constantes réelles quelconques.

2) *L'équation* (1) *admet une solution unique qui est discontinue et mesurable:*

$$f(0) = a, \quad f(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad x \neq 0,$$

$$\varphi(0) = a^3, \; \varphi(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad x \neq 0.$$

3) *L'équation* (1) *admet une infinité de solutions non mesurables de la forme*

$$f(x) = Ae^{H(x^2)}, \quad \varphi(x) = A^3 e^{H(x)},$$

où $H(x)$ est une fonction additive non linéaire.

4) *Les fonctions énumérées dans les théorèmes* 1), 2) *et* 3) *présentent toutes les solutions de l'equation* (1).

Observons qu'on pourrait résoudre d'une manière analogue l'équation fonctionnelle de la forme

$$\text{(I)} \qquad f(u_1)f(u_2)\ldots f(u_n) = \varphi(u_1^k + u_2^k + \ldots + u_n^k),$$

[1] V. p. c. Fundamenta Mathematicae 1, p. 116 et p. 123.

où n et k sont deux nombres naturels donnés quelconques. Les résultats seraient analogues.

Dans le type de l'équation (I) rentre l'équation fonctionnelle

$$f(u)f(v) = f(u+v)$$

étudiée par Cauchy.

Remarquons enfin qu'en introduisant de légères modifications on pourrait discuter l'équation

$$f(u)f(v)f(w) = \varphi(u^2+v^2+w^2),$$

pour

$$u^2+v^2+w^2 \leqslant 1,$$

d'où l'on déduirait sans peine les résolutions de l'équation

$$f(u)f(v)f(w) = k$$

pour

$$u^2+v^2+w^2 = 1.$$

Nous traiterons en une Note ultérieure les équations de cette forme.