Soit h un nombre réel donné quelconque, satisfaisant à l'inégalité (3).

L'égalité (2) subsistant pour tous les nombres x de (a, b), sauf les nombres de l'ensemble E de mesure $<\sigma$, nous concluons que l'égalité

$$f(x+h)=F(x+h) \tag{5}$$

subsiste pour les nombres x de l'intervalle (a, b), sauf les nombres x d'un ensemble G de mesure $<\sigma+|h|<\sigma+\delta$.

L'ensemble des nombres x de (a, b), pour lesquels ne subsiste une au moins des formules (2) et (5), a donc une mesure $<m(E+G)<2\sigma+$ $+\delta<3\sigma<b-a$; il en résulte qu'il existe dans (a, b) un point x (dépendant de h) pour lequel subsistent à la fois les formules (2), (4) et (5). Or (4) donne, d'après (2) et (5):

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon. \tag{6}$$

D'autre part, d'après (1) nous avons:

$$f(x+h)=f(x)+f(h) \quad \text{et} \quad f(x_0+h)=f(x_0)+f(h),$$

donc

$$f(x+h)-f(x)=f(x_0+h)-f(x_0);$$

l'inégalité (6) donne donc:

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{7}$$

Nous avons donc démontré qu'il existe pour tout nombre réel x_0 et tout nombre positif ε un nombre positif δ, tel que l'inégalité (3) entraîne l'inégalité (7), ce qui démontre la continuité de la fonction $f(x)$, c. q. f. d.

Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie*

M. Lusin a démontré que l'ensemble de points où la dérivée d'une fonction continue $f(x)$ est $+\infty$ est de mesure nulle [1]. M. Ruziewicz m'a communiqué une idée comment on pourrait démontrer ce théorème pour toute fonction d'une variable réelle (mesurable ou non). Le but de cette Note est de démontrer un théorème, un peu plus général, que voici:

L'ensemble de points x, où la dérivée à droite $f'_+(x)=+\infty$, est de mesure nulle pour toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle.

Soit $f(x)$ une fonction donnée d'une variable réelle. Désignons par E l'ensemble de points x où la dérivée à droite, $f'_+(x)$, est $=+\infty$. Pour tout point x de E existe évidemment un nombre positif δ_x tel que pour tout nombre ξ intérieur à l'intervalle $(x, x-\delta_x)$ subsiste l'inégalité

$$f(x)<f(\xi). \tag{1}$$

Désignons par E_n l'ensemble de ces points de E pour lesquels existe un nombre $\delta_n>1/n$ tel que l'inégalité $x<\xi<x+\delta_x$ entraîne l'inégalité (1). (L'ensemble E_n est évidemment toujours contenu dans E_{n+1} et nous avons $E=E_1+E_2+E_3+\ldots$).

Si chacun des ensembles E_n avait une mesure nulle, notre théorème serait démontré. Admettons donc que l'ensemble E_k ne jouit pas de cette propriété (c'est-à-dire a une mesure positive ou bien est non mesurable). Dans ce cas il existe évidemment un intervalle $\varDelta=(a, b)$ de longueur $<1/k$ tel que l'ensemble $\varDelta E_k$ (la portion de E_k contenue dans $\varDelta$) n'est pas de mesure nulle.

Soient x_1 et $x_2>x_1$ deux points de l'ensemble $\varDelta E_k$. D'après la définition de l'ensemble E_k et la propriété de l'intervalle $\varDelta$, nous concluons que l'inégalité (1) subsiste pour $x=x_1$ et $\xi=x_2$, ce qui donne

$$f(x_1)<f(x_2).$$

Il en résulte que la fonction $f(x)$ est croissante dans l'ensemble $\varDelta E_k$.

---

* Commenté sur p. 317.

[1] Comptes Rendus 154 (1912), p. 1688; Recueil de la Société Mathématique de Moscou (Matiematitschesky Sbornik) 28 (en russe). Cf. G.-C. Young, Comptes rendus 162 (1916), p. 909.

Définissons maintenant dans l'intervalle $\Delta = (a, b)$ la fonction $\varphi(x)$ comme borne supérieure de tous les nombres $f(\xi)$ pour $a \leqslant \xi \leqslant x$; $\varphi(x)$ sera évidemment une fonction non décroissante dans (a, b), donc aura, comme l'on sait, presque partout une dérivée finie. L'ensemble $\mathscr{N}$, où la fonction $\varphi(x)$ ne possède pas de dérivée finie, est donc de mesure nulle.

On voit sans peine que pour tout point x de l'ensemble ΔE_k qui est limite d'une suite décroissante de points de cet ensemble, nous avons $\overline{\varphi'_+}(x) = +\infty$ (puisque $f'_+(x) = +\infty$ et $\varphi(t) = f(t)$ dans ΔE_k). Il en résulte que l'ensemble ΔE_k, sauf peut-être un nombre fini ou une infinité dénombrable de points (qui ne sont pas points d'accumulation de droite de ΔE_k) est contenu dans l'ensemble $\mathscr{N}$. Par conséquent ΔE_k est de mesure nulle, ce qui implique une contradiction. Notre théorème est ainsi démontré.

Sur les solutions d'une équation fonctionnelle de J. Cl. Maxwell

par

S. Banach et S. Ruziewicz

En examinant la loi de la distribution des vitesses des molécules d'un gaz J. Cl. Maxwell est arrivé à considérer une équation fonctionnelle de la forme

$$f(u)f(v)f(w) = \varphi(u^2+v^2+w^2); \tag{1}$$

il s'agit de déterminer les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ d'une variable réelle de sorte que l'équation (1) subsiste pour tous les u, v, w réels. Nous ne nous arrêterons pas à considérer le raisonnement par lequel Maxwell arrive à cette équation; nous nous occuperons seulement de sa résolution qui présente quelque intérêt au point de vue mathématique. La méthode classique de la résolution de l'équation (1) consiste en ce que l'on fait certaines hypothèses sur la nature de la fonction f (on admet par exemple qu'elle soit dérivable); on réduit ainsi la question à la résolution d'une équation différentielle.

Le but de cette Note est de déduire, à l'aide d'une méthode élémentaire, *toutes* les résolutions de l'équation (1).

Dans l'équation fonctionnelle (1) nous pouvons avoir:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{pour tous les } x \geqslant 0. \tag{2}$$

Nous avons dans ce cas

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

pour tous les x réels.

En effet, si nous avions $f(x_0) \neq 0$, nous aurions

$$[f(x_0)]^3 = \varphi(3x_0^2) \neq 0,$$

contrairement à (2).

Le système des fonctions (2) et (3) fournit une résolution continue de l'équation (1).