de cette repartition de masses; soient X_k et Y_k les coordonnées du centre de gravité. On voit que, pour presque tous les v, ce centre de gravité tend vers le centre du cercle. Ce théorème a été démontré (avec d'autres très généraux) par M. M Hardy et Littlewood (1). Pour $n_i = i$, il résulte des recherches de M. Sierpiński (2) que seulement les multiples de 2π fournissent les vitesses exceptionnelles. Pour $n_i = i^2$ (et i^p, $p =$ nombre naturel $\geqslant 2$) M. Kley (3) a démontré que les vitesses exceptionnelles sont commensurables avec 2π.

(1) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of Diophantine approximation*, International Congress of Mathematicians, Cambridge 1912.
(2) Ce Bulletin, 1909, p. 725.
(3) Mathematische Annalen 1916.

Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$*

Le but de cette note est de démontrer que *toute fonction mesurable* $f(x)$, *satisfaisante à l'équation fonctionnelle*

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{1}$$

est continue (donc, d'après Cauchy, de la forme Ax). Notre démonstration sera fondée sur le théorème de M. Lusin concernant les fonctions mesurables.

Soit $f(x)$ une fonction mesurable (L), satisfaisant pour tous les nombres réels x et y à l'équation (1), et soit x_0 un nombre réel donné, ε — un nombre positif donné quelconque. Soit (a, b) un intervalle donné quelconque, entourant x. D'après le théorème de M. Lusin, il existe pour toute fonction mesurable $f(x)$ et pour tout nombre positif σ — en particulier pour $\sigma = (b-a)/3$ — une fonction $F(x)$, continue (pour tous les x réels) et telle que l'égalité

$$f(x) = F(x) \tag{2}$$

subsiste pour tous les nombres x de l'intervalle (a, b), sauf les nombres x formant un ensemble E de mesure $< \sigma$ (1).

La fonction $F(x)$ étant continue, il existe pour le nombre positif ε un nombre positif $\delta = \delta(\varepsilon) < \sigma$, tel que l'inégalité

$$|h| < \delta \tag{3}$$

entraîne pour les nombres x de (a, b), l'inégalité

$$|F(x+h)-F(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

* Commenté sur p. 314.

(1) Comptes Rendus 154, p. 1688. Cf. la note de W. Sierpiński, *Démonstration élémentaire du théorème de M. Lusin sur les fonctions mesurables*, Tohoku Mathematical Journal 10, August 1916. Les démonstrations du théorème de M. Lusin sont fondées sur l'axiome de M. Zermelo. (Voir à ce sujet la mémoire de W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse*, Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Série A, Avril 1918, p. 97). Cependant le théorème qui nous occupe peut être démontré sans l'aide de l'axiome du choix: voir les notes de W. Sierpiński, *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$* et *Sur les fonctions convexes mesurables*, Fund. Math. 50 (1919), p. 116 et p. 129.

Soit h un nombre réel donné quelconque, satisfaisant à l'inégalité (3).

L'égalité (2) subsistant pour tous les nombres x de (a, b), sauf les nombres de l'ensemble E de mesure $< \sigma$, nous concluons que l'égalité

$$(5) \qquad f(x+h) = F(x+h)$$

subsiste pour les nombres x de l'intervalle (a, b), sauf les nombres x d'un ensemble G de mesure $< \sigma+|h| < \sigma+\delta$.

L'ensemble des nombres x de (a, b), pour lesquels ne subsiste une au moins des formules (2) et (5), a donc une mesure $< m(E+G) < 2\sigma+ +\delta < 3\sigma < b-a$; il en résulte qu'il existe dans (a, b) un point x (dépendant de h) pour lequel subsistent à la fois les formules (2), (4) et (5). Or (4) donne, d'après (2) et (5):

$$(6) \qquad |f(x+h)-f(x)| < \varepsilon.$$

D'autre part, d'après (1) nous avons:

$$f(x+h) = f(x)+f(h) \quad \text{et} \quad f(x_0+h) = f(x_0)+f(h),$$

donc

$$f(x+h)-f(x) = f(x_0+h)-f(x_0);$$

l'inégalité (6) donne donc:

$$(7) \qquad |f(x_0+h)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré qu'il existe pour tout nombre réel x_0 et tout nombre positif ε un nombre positif δ, tel que l'inégalité (3) entraîne l'inégalité (7), ce qui démontre la continuité de la fonction $f(x)$, c. q. f. d.

Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie*

M. Lusin a démontré que l'ensemble de points où la dérivée d'une fonction continue $f(x)$ est $+\infty$ est de mesure nulle [1]. M. Ruziewicz m'a communiqué une idée comment on pourrait démontrer ce théorème pour toute fonction d'une variable réelle (mesurable ou non). Le but de cette Note est de démontrer un théorème, un peu plus général, que voici:

L'ensemble de points x, où la dérivée à droite $f'_+(x) = +\infty$, est de mesure nulle pour toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle.

Soit $f(x)$ une fonction donnée d'une variable réelle. Désignons par E l'ensemble de points x où la dérivée à droite, $f'_+(x)$, est $= +\infty$. Pour tout point x de E existe évidemment un nombre positif δ_x tel que pour tout nombre ξ intérieur à l'intervalle $(x, x-\delta_x)$ subsiste l'inégalité

$$(1) \qquad f(x) < f(\xi).$$

Désignons par E_n l'ensemble de ces points de E pour lesquels existe un nombre $\delta_n > 1/n$ tel que l'inégalité $x < \xi < x+\delta_x$ entraîne l'inégalité (1). (L'ensemble E_n est évidemment toujours contenu dans E_{n+1} et nous avons $E = E_1+E_2+E_3+\ldots$).

Si chacun des ensembles E_n avait une mesure nulle, notre théorème serait démontré. Admettons donc que l'ensemble E_k ne jouit pas de cette propriété (c'est-à-dire a une mesure positive ou bien est non mesurable). Dans ce cas il existe évidemment un intervalle $\Delta = (a, b)$ de longueur $< 1/k$ tel que l'ensemble ΔE_k (la portion de E_k contenue dans Δ) n'est pas de mesure nulle.

Soient x_1 et $x_2 > x_1$ deux points de l'ensemble ΔE_k. D'après la définition de l'ensemble E_k et la propriété de l'intervalle Δ, nous concluons que l'inégalité (1) subsiste pour $x = x_1$ et $\xi = x_2$, ce qui donne

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Il en résulte que la fonction $f(x)$ est croissante dans l'ensemble ΔE_k.

---

* Commenté sur p. 317.

[1] Comptes Rendus 154 (1912), p. 1688; Recueil de la Société Mathématique de Moscou (Matiematitschesky Sbornik) 28 (en russe). Cf. G.-C. Young, Comptes rendus 162 (1916), p. 909.