

Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales*

§ 1. THÉORÈME. Soit $\{f_n(t)\}$ une suite complète de fonctions orthogonales et normées par rapport à l'intervalle $a \leq t \leq b$; autrement dit, une suite dont les termes satisfont à la condition

$$(1) \quad \int_a^b f_i(t)f_k(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = k \\ 0 & \text{pour } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n, \dots),$$

sans qu'il soit possible de trouver une fonction $f_0(t)$ telle que la condition (1) soit remplie pour tous les entiers $k \geq 0$. On aura

$$(2) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(t) \rightarrow 0 \quad (\text{pour } n \rightarrow \infty)$$

pour presque tous les t de l'intervalle $\langle a, b \rangle$.

Explication. Il s'agit de fonctions qui sont intégrables ainsi que leurs carrés dans $\langle a, b \rangle$ au sens de M. Lebesgue. „Presque tous les t de l'intervalle“ signifie que les t appartenant à $\langle a, b \rangle$ et n'ayant pas la propriété (2) forment un ensemble de mesure lebesgienne nulle.

Démonstration. Écrivons

$$(3) \quad s_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(t),$$

$$\Delta_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t) = \frac{-\sum_{k=1}^n f_k(t) + n f_{n+1}(t)}{n(n+1)};$$

je dis que la suite $\{\Delta_n\}$ a la propriété d'orthogonalité; en effet, pour $n > m$, on a (tenant compte de (1))

* Commenté sur p. 312.

$$\begin{aligned} & \int_a^b \Delta_n(t) \Delta_m(t) dt \\ &= \frac{1}{(n^2+n)(m^2+m)} \int_a^b \left[n f_{n+1} - \sum_{i=1}^n f_i \right] \left[m f_{m+1} - \sum_{k=1}^m f_k \right] dt \\ &= \frac{1}{(n^2+n)(m^2+m)} \left[\int_a^b \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f_i f_k dt - n \int_a^b \sum_{k=1}^m f_{n+1} f_k dt - \right. \\ & \quad \left. - m \int_a^b \sum_{i=1}^n f_{m+1} f_i dt + mn \int_a^b f_{n+1} f_{m+1} dt \right] \\ &= \frac{1}{(n^2+n)(m^2+m)} [m \cdot 0 - m \cdot 1 + 0] = 0. \end{aligned}$$

Considérons le cas $m = n$; nous obtiendrons:

$$\int_a^b \Delta_n^2(t) dt = \frac{1}{(n^2+n)^2} [n - n \cdot 0 - n \cdot 0 + n^2 \cdot 1] = \frac{1}{n^2+n}.$$

En définissant

$$(4) \quad \Gamma_n(t) = \sqrt{n(n+1)} \Delta_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

nous aurons donc une suite $\{\Gamma_n\}$ de fonctions orthogonales et normées. Pour démontrer qu'elle est aussi complète, supposons que $\Gamma_0(t)$ soit une fonction intégrable avec son carré et telle que l'on ait:

$$(5) \quad \int_a^b \Gamma_0(t) \Gamma_n(t) dt = 0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \text{ in inf.}$$

et par suite

$$(6) \quad \int_a^b \Gamma_0(t) \Delta_n(t) dt = 0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \text{ in inf.};$$

en désignant par a_n l'intégrale

$$\int_a^b \Gamma_0(t) f_n(t) dt$$

et en tenant compte de (3) on déduit de (6):

$$\int_a^b \Gamma_0(t) \frac{n f_{n+1} - \sum_{k=1}^n f_k}{n(n+1)} dt = \frac{n a_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k}{n(n+1)} = 0,$$

donc

$$(7) \quad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Pour $n = 1$ (7) donne

$$a_1 = a_2$$

et l'hypothèse $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ et (7) impliquent

$$a_{n+1} = a_n,$$

donc, par induction,

$$(8) \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots \quad \text{in inf.}$$

Or, les a_n étant les coefficients du développement de $\Gamma_0(t)$ suivant le système orthogonal, normé et complet $\{f_n\}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \int_a^b \Gamma_0^2(t) dt$$

donc, vu (8),

$$a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots \text{ in inf.}),$$

$$(9) \quad \int_a^b \Gamma_0^2(t) dt = 0.$$

Nous voyons que (5) implique (9) ce qui prouve que la suite $\{\Gamma_n\}$ est complète. Développons $-f_1(t)$ suivant $\{\Gamma_n\}$; nous aurons:

$$(10) \quad \int_a^b (-f_1) \Gamma_n dt \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \int_a^b f_1 \left[\sum_{k=1}^n f_k - n f_{n+1} \right] dt = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = a_n$$

d'après (3) et (4), a_n étant une abbréviation pour $1/\sqrt{n(n+1)}$.

La série

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma_n(t)$$

est convergente pour presque tous les t de $\langle a, b \rangle$ en vertu d'un théorème de M. E. W. Hobson suivant lequel une série de la forme (11), où les Γ_n sont des fonctions orthogonales et normées, est convergente presque partout dans $\langle a, b \rangle$ pourvu qu'il existe un $\varepsilon > 0$ rendant convergente la série numérique

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^\varepsilon a_n^2(t);$$

(¹) E. W. Hobson, *On the convergence of series of orthogonal functions*, Proceedings of the London Mathematical Society 2.12, Part 4 (1912), p. 297-308. Le théorème moins général de Jerosch-Weyl (voir loc. cit.) suffirait pour notre but.

dans le cas actuel tout $\varepsilon < 1$ satisfait à la condition de M. Hobson. Or, d'après (10), la série (11) est le développement de $-f_1(t)$ suivant un système $\{\Gamma_n\}$ que nous avons reconnu comme orthogonal, normé et complet, et par conséquent elle ne saurait être convergente vers une autre limite que $-f_1(t)$. Il s'ensuit que

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma_n(t) = -f_1(t)$$

presque partout dans $\langle a, b \rangle$. (4), (10) et (13) donnent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t) = -f_1(t).$$

Si l'on tient compte de (3), on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(t) - s_1(t)] = -f_1(t),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = 0,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(t) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

pour presque tous les t de $\langle a, b \rangle$, c. q. f. d.

§ 2. Ayant pris connaissance de ce qui précède, M. Steinhaus a remarqué que l'on peut généraliser le théorème et simplifier son énoncé et sa démonstration en levant la restriction d'après laquelle la suite $\{f_n\}$ des fonctions orthogonales et normées doit être *complète*. Cette restriction est formulée dans l'énoncé du théorème dans les termes „sans ... $k \geq 0$ “, qui suivent l'hypothèse (1) et précèdent la thèse (2). Le théorème généralisé affirme donc que (1) implique (2) pour presque tous les t de $\langle a, b \rangle$. Comme cette généralisation est importante pour les applications du § 3, nous allons l'exposer.

Démonstration du théorème généralisé. Nous reprenons la démonstration primitive avec les formules (3) et (4) et nous démontrons que les fonctions $\Gamma_n(t)$ sont orthogonales et normées. Nous quittons maintenant la voie de la première démonstration pour la rejoindre au point où l'on introduit la série (11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma_n(t) \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Nous nous servons du théorème de M. Hobson pour prouver que cette série est convergente presque partout dans $\langle a, b \rangle$. Nous ne pouvons

plus affirmer que sa somme soit $-f_1(t)$; appelons la $\varphi(t)$. (13) sera donc à remplacer par

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma_n(t) = \varphi(t),$$

ce qui conduit à

$$(14) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(t) \rightarrow f_1(t) + \varphi(t) \quad (\text{presque partout});$$

or, l'inégalité de Schwarz donne (tenant compte de (1)):

$$\int_a^b \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k \right| dt \leq \sqrt{\int_a^b 1 \cdot dt \cdot \int_a^b \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n f_k \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{b-a}{n}}$$

et par là

$$(15) \quad \int_a^b \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k \right| dt \rightarrow 0.$$

Un lemme connu de la théorie d'intégration ⁽¹⁾ donne avec (14) et (15):

$$\int_a^b |f_1(t) + \varphi(t)| dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k \right| dt = 0,$$

done

$$f_1(t) + \varphi(t) = 0$$

presque partout dans $\langle a, b \rangle$ et, à cause de (14),

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(t) \rightarrow 0$$

pour presque tous les t de $\langle a, b \rangle$, c. q. f. d.

§ 3. Applications. 1. Considérons la suite $\{f_n\}$ de fonctions orthogonales et normées dans $\langle 0, 1 \rangle$, définies comme il suit:

$$f_n(t) = (-1)^k \text{ pour } \frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

$$f_n(1) = -1 \quad (n = 1, 2, \dots \text{ in. inf.}).$$

Soit β un nombre irrationnel, $0 < \beta < 1$, et

$$0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots \quad (\beta_n = 0 \text{ où } 1)$$

son développement dyadique; on aura

$$f_n(\beta) = (-1)^{\beta_n},$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{\beta_n} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [(-1)^{\beta_n} - 1] = 1 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \beta_k.$$

La valeur moyenne des $f_n(\beta)$ tendant d'après le § 2 vers zéro pour presque tous les β de $\langle 0, 1 \rangle$, il s'ensuit

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta_k \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

pour presque tous les β irrationnels de $\langle 0, 1 \rangle$. La partie entière de β n'ayant aucune influence sur la limite précédente et les β rationnels formant un ensemble de mesure nulle, on obtient le résultat de M. Borel que voici: pour presque tous les nombres nonnégatifs, le nombre des chiffres 1 du développement dyadique est asymptotiquement égal au nombre des chiffres 0 ⁽¹⁾.

2. La suite $\{n_i\}$ des nombres naturels différents entre eux étant donnée,

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n_i v \right]$$

est une suite de fonctions orthogonales et normées dans l'intervalle $0 \leq v \leq 2\pi$. Il s'ensuit que

$$X_k = \sum_{i=1}^k \cos n_i v \rightarrow 0$$

avec $1/k$ pour presque tous les v . De même

$$Y_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sin n_i v \rightarrow 0$$

pour presque tous les v . Considérons un point se mouvant suivant sur la circonférence du cercle

$$x^2 + y^2 = 1$$

dans le sens positif, avec une vitesse constante v ; considérons les positions qu'il occupe aux époques

$$n_1, n_2, \dots, n_k;$$

nous supposons qu'il se trouve à $x = 1, y = 0$ à l'époque 0. Attribuons la même masse μ aux points ainsi obtenus et calculons le centre de gravité

⁽¹⁾ Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 420.

⁽¹⁾ Cf. p. ex. H. Steinhaus, *Niektóre własności szeregów trygonometrycznych i szeregów Fouriera*; Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Um. w Krakowie, T. LVI, Ser. A., pp. 12-13; [184]-[185].

de cette repartition de masses; soient X_k et Y_k les coordonnées du centre de gravité. On voit que, pour presque tous les v , ce centre de gravité tend vers le centre du cercle. Ce théorème a été démontré (avec d'autres très généraux) par M. M. Hardy et Littlewood⁽¹⁾. Pour $n_i = i$, il résulte des recherches de M. Sierpiński⁽²⁾ que seulement les multiples de 2π fournissent les vitesses exceptionnelles. Pour $n_i = i^2$ (et i^p , $p =$ nombre naturel ≥ 2) M. Kley⁽³⁾ a démontré que les vitesses exceptionnelles sont commensurables avec 2π .

(1) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of Diophantine approximation*, International Congress of Mathematicians, Cambridge 1912.

(2) Ce Bulletin, 1909, p. 725.

(3) Mathematische Annalen 1916.

Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *

Le but de cette note est de démontrer que toute fonction mesurable $f(x)$, satisfaisante à l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

est continue (donc, d'après Cauchy, de la forme Δx). Notre démonstration sera fondée sur le théorème de M. Lusin concernant les fonctions mesurables.

Soit $f(x)$ une fonction mesurable (L), satisfaisant pour tous les nombres réels x et y à l'équation (1), et soit x_0 un nombre réel donné, ε — un nombre positif donné quelconque. Soit (a, b) un intervalle donné quelconque, entourant x_0 . D'après le théorème de M. Lusin, il existe pour toute fonction mesurable $f(x)$ et pour tout nombre positif σ — en particulier pour $\sigma = (b-a)/3$ — une fonction $F(x)$, continue (pour tous les x réels) et telle que l'égalité

$$(2) \quad f(x) = F(x)$$

subsiste pour tous les nombres x de l'intervalle (a, b) , sauf les nombres x formant un ensemble E de mesure $< \sigma$ ⁽¹⁾.

La fonction $F(x)$ étant continue, il existe pour le nombre positif ε un nombre positif $\delta = \delta(\varepsilon) < \sigma$, tel que l'inégalité

$$(3) \quad |h| < \delta$$

entraîne pour les nombres x de (a, b) , l'inégalité

$$(4) \quad |F(x+h) - F(x)| < \varepsilon.$$

* Commenté sur p. 314.

(1) Comptes Rendus 154, p. 1688. Cf. la note de W. Sierpiński, *Démonstration élémentaire du théorème de M. Lusin sur les fonctions mesurables*, Tohoku Mathematical Journal 10, August 1916. Les démonstrations du théorème de M. Lusin sont fondées sur l'axiome de M. Zermelo. (Voir à ce sujet la mémoire de W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse*, Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Série A, Avril 1918, p. 97). Cependant le théorème qui nous occupe peut être démontré sans l'aide de l'axiome du choix: voir les notes de W. Sierpiński, *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et Sur les fonctions convexes mesurables*, Fund. Math. 50 (1919), p. 116 et p. 129.