TRAVAUX DE STEFAN BANACH

Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier*

par

S. Banach et **H. Steinhaus**

Si $f(x)$ désigne une fonction sommable ainsi que son carré $f^2(x)$ au sens de M. Lebesgue et si $s_n(x)$ est la somme partielle d'indice n du développement de cette fonction en série de Fourier généralisée [1], on sait que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx = 0. \tag{1}$$

C'est ce que MM. F. Riesz et E. Fischer [2] ont démontré.

Tout naturellement la question se présente: la relation

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]dx = 0 \tag{2}$$

a-t-elle lieu, $f(x)$ étant une fonction sommable, fonction dont le carré n'est plus supposé sommable.

La question précédente peut encore se mettre sous la forme suivante: les séries de Fourier *convergent-elles en moyenne*, en définissant la convergence en moyenne comme l'indique la relation (2) [3].

---

* Commenté sur p. 311.

(1) H. Steinhaus, *Sur certaines propriétés des séries trigonométriques les plus générales et des séries de Fourier*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Série A, Juillet-Octobre 1916. M. Lebesgue emploie l'expression „généralisée" en un sens différent. Nous appelons ici une série *série généralisée* dans le cas où ses coefficients sont exprimés par les intégrales de Lebesgue.

(2) F. Riesz, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1917, p. 116.

(3) La suite des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ définies dans l'intervalle $[a, b]$ *converge en moyenne* vers la fonction $f(x)$ dans le même intervalle lorsque

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx = 0.$$

Nous nous proposons de résoudre cette question en démontrant que, contrairement à ce que l'on serait peut-être tenté de supposer tout d'abord, l'équation (2) n'a pas lieu en général.

Il faut remarquer que la relation (1) implique la relation (2) si l'on se restreint au domaine des f^2 sommables; en effet, l'inégalité de M. Schwarz donne dans ce cas:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)-s_n(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_0^{2\pi} [f(x)-s_n(x)]^2 dx \int_0^{2\pi} 1\,dx}\,.$$

Au contraire, (2) n'implique pas (1) et, si l'on sait seulement que $f(x)$ est une fontion sommable, l'intégrale (1) peut bien être dépourvue de sens.

Remarquons d'autre part que la convergence d'une série presque partout n'implique pas nécessairement la convergence en moyenne; l'inverse n'a pas lieu non plus. En effet 1° nous allons donner au § 1 l'exemple d'une fonction $f(x)$ dont la série de Fourier est convergente partout à l'exception du point $x=0$, sans que (2) soit vérifiée; 2° pour obtenir l'exemple d'une suite de fonctions convergente en moyenne et partout divergente, considérons, au lieu de l'intervalle $(0, 2\pi)$, la circonférence du cercle de rayon unité et portons sur cette circonférence successivement les arcs contigus de longueur $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ arcs que nous appelons $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ Posons:

$$\gamma_n(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{pour } x \text{ appartenant à } l_n, \\ 0 & \text{pour tout } x \text{ n'appartenant pas à } l_n. \end{cases}$$

On aura

$$\int_0^{2\pi} |\gamma^n(x)|\,dx = \frac{1}{n}$$

ce qui assure la convergence en moyenne de la suite $\{\gamma_n(x)\}$. On aura, d'autre part,

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n(x) = 1$$

pour tous les x, puisque la suite des intervalles l_n, étant divergente, recouvre le cercle une infinité de fois, en sorte que tout point x appartient à une infinité de différents l_n et que

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n(x) = 0$$

pour tous les x; en effet, toutes les fois que $\gamma_n(x)=1$, on a $\gamma_{n+1}(x)=0$.

On s'aperçoit ainsi que l'exemple dont nous nous occupons ici ne peut pas contribuer à résoudre le problème de la convergence de séries de Fourier et il ne peut être, réciproquement, déduit de raisonnements partant de cette convergence. La condition qui est nécessaire et suffisante afin qu'une série trigonométrique soit une série de Fourier consiste dans la convergence en moyenne des moyennes arithmétiques d'une telle série [1]. Cette condition ne peut pas être simplifiée par la considération de sommes partielles au lieu de leurs moyennes arithmétiques; c'est là encore une conséquence qui découle de l'exemple suivant.

§ 1. Démonstration

Soit $\varphi(x)$ fonction continue définie par M. H. Lebesgue [2] telle que l'expression

$$s_n(0)-\varphi(0) \tag{3}$$

(où $s_n(x)$ désigne la somme partielle d'indice n du développment de $\varphi(x)$ en série de Fourier) ait pour

$$n = \bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_i, \ldots$$

les valeurs positives croissantes

$$\bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots, \bar{M}_i, \ldots \tag{4}$$

et que l'on ait

$$\lim_{i\to\infty} \bar{M}_i = +\infty.$$

Soit $\bar{\varepsilon}_i > 0$ la longueur d'un intervalle $0 \leqslant x \leqslant \bar{\varepsilon}_i < 2\pi$ dans lequel on a

$$s_{\bar{n}_i}-\varphi(x) = \varphi_{\bar{n}_i}(x) > \bar{M}_i - 1 \tag{5}$$

et que nous déterminons de proche en proche de manière que 1° l'équation (5), 2° l'inégalité

$$\bar{\varepsilon}_{i+1} \leqslant \bar{\varepsilon}_i \cdot \tfrac{1}{2}$$

ainsi que 3° la condition

$$\lim_{i\to\infty} \bar{\varepsilon}_i \sqrt{\bar{M}_i} = 0$$

soient satisfaites; $\varphi_{\bar{n}_i}$ étant continue, le choix d'une telle suite $\{\bar{\varepsilon}_i\}$ est possible.

(1) H. Steinhaus, *Niektóre własności szeregów trygonometrycznych* ..., Rozprawy Akadem. Um., Wydz. mat.-przyr., 56 A, 1916.

(2) H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris 1906, p. 85.

Déterminons une suite partielle $\{M_i\}$ extraite de $\{\overline{M}_i\}$, telle que la série

(6) $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_i}}$$

soit convergente et que l'on ait [1]

(7) $$\frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{M_i}} < \frac{1}{2}\sqrt{M_{i+1}}, \qquad \frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{M_i}} < \frac{1}{\varepsilon_{i+1}\sqrt{M_{i+1}}}.$$

On peut satisfaire à ces nouvelles conditions en procédant de proche en proche. Admettons par définition que:

(8) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \varepsilon_1 < x \leqslant 2\pi, \\ \dfrac{1}{\varepsilon_i \sqrt{M_i}} & \text{pour} \quad \varepsilon_{i+1} < x \leqslant \varepsilon_i, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

La fonction $f(x)$ est non négative; elle est intégrable (L) car la série qui sert à calculer $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, à savoir

(9) $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i \sqrt{M_i}}$$

et qui admet la série (6) comme majorante, est convergente. D'autre part, on a (φ_{n_i} étant définie par (5))

(10) $$\int_0^{2\pi} \varphi_{n_i}(x) f(x)\,dx = \int_0^{\varepsilon_i} \varphi_{n_i}(x) f(x)\,dx + \int_0^{2\pi} \varphi_{n_i}(x) f(x)\,dx,$$

$$\left| \int_{\varepsilon_i}^{2\pi} \varphi_{n_i}(x) f(x)\,dx \right| \leqslant \underset{\varepsilon_i < x \leqslant 2\pi}{\text{Maximum}} f(x) \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - s_{n_i}(x)|\,dx$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_{i-1}\sqrt{M_{i-1}}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n, \ldots)$$

pour i assez grand car, $\varphi^2(x)$ étant intégrable, l'inégalité de M. Schwarz montre que la limite de

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - s_{n_i}(x)|\,dx$$

est nulle pour $i \to \infty$; or les équations (5), (7), (8) donnent

$$\int_0^{\varepsilon_i} \varphi_{n_i}(x) f(x)\,dx \geqslant (M_i - 1) \cdot \frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{M_i}} \cdot \varepsilon_i = \frac{M_i - 1}{\sqrt{M_i}}$$

donc, d'après (10),

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{n_i}(x) f(x)\,dx \geqslant \frac{M_i - 1}{\sqrt{M_i}} - \frac{1}{\varepsilon_{i-1}\sqrt{M_{i-1}}} > \frac{M_i - 1}{\sqrt{M_i}} - \frac{1}{2}\sqrt{M_i} = \frac{\frac{1}{2}M_i - 1}{\sqrt{M_i}}.$$

La dernière expression tend avec i vers ∞ d'après (4); il s'en suit que l'on a

(11) $$\lim_{i\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_{n_i}(x)\,dx = \infty.$$

Désignons par $S_n(x)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier relative à $f(x)$; nous aurons

(12) $$\int_0^{2\pi} f(x)[s_n(x) - \varphi(x)]\,dx = \int_0^{2\pi} \varphi(x)[S_n(x) - f(x)]\,dx$$

car l'intégrale $\int_0^{2\pi} f\varphi\,dx$ existe, φ étant bornée, et l'égalité

$$\int_0^{2\pi} f(x) s_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \varphi(x) S_n(x)\,dx$$

est la conséquence d'un calcul facile qui s'applique à toutes les fonctions intégrables f, φ. L'égalité (12) nous donne:

(12a) $$\left| \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_{n_i}(x)\,dx \right| = \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x)[f(x) - S_{n_i}(x)]\,dx \right|$$

$$\leqslant \underset{0 \leqslant x \leqslant 2\pi}{\text{Maximum}}\, \varphi(x) \int_0^{2\pi} |f(x) - S_{n_i}(x)|\,dx.$$

En comparant ce résultat à (11) et en tenant compte de ce que φ est borné, on obtient

(13) $$\lim_{i\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_{n_i}(x)|\,dx = +\infty$$

ce qui démontre le théorème en question, $f(x)$ étant l'exemple cherché.

On voit facilement que la série de Fourier relative à $f(x)$ est convergente, à l'exception peut-être du point $x = 0$; on peut diviser, en effet, tout intervalle intérieur à $(0, 2\pi)$ en intervalles partiels en nombre fini en sorte que $f(x)$ soit constante dans tous les intervalles partiels.

[1] $\{\varepsilon_i\}$ désigne, ainsi que l'on le devine, la suite extraite de $\{\overline{\varepsilon}_i\}$ par le même choix d'indices qui a servi à extraire $\{M_i\}$ de $\{\overline{M}_i\}$.

§ 2. Deuxième démonstration

La fonction $f(x)$ construite au paragraphe précédent admet une intégrale riemanienne; c'est ce qui résulte de la convergence de la série (9); si l'on se contente d'une fonction sommable (L), on peut donner une autre démonstration du théorème précédent en s'appuyant sur le lemme suivant, démontré par M. Lebesgue [1] et rappelé par M. Burton Cramp [2]: „Pour que les fonctions sommables de la suite $\{\bar{\varphi}_n\}$ aient la propriété d'annuler la limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\bar{\varphi}_n(x)\,dx \tag{14}$$

quelle que soit la fonction sommable $f(x)$, il faut et il suffit que l'on ait pour presque tous les x

$$\bar{\varphi}_n(x) < M \quad \text{si} \quad n > n_M \tag{15}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\beta \bar{\varphi}_n(x)\,dx = 0 \tag{16}$$

pour tous les intervalles $[\alpha, \beta]$ appartenant à $[a, b]$".

Ce lemme s'applique au cas considéré. Conservons en effet les notations du § 1 et posons $\bar{\varphi}_i(x) = \varphi_{n_i}(x)$; dès lors la condition nécessaire (15) n'est pas remplie à cause de (4). Cette remarque faite, nous quittons le cours de la première démonstration et nous déduisons du lemme rappelé tout à l'heure l'existence d'une fonction $f(x)$ qui n'annule pas la limite (14). Reprenons la première démonstration pour y emprunter les égalités (12) et l'inégalité (12a); comme la limite (14) n'est pas nulle, il est évident, grâce à ces relations, que la limite de

$$\int_0^{2\pi} |f(x)-S_{n_i}(x)|\,dx$$

n'est pas nulle, c. q. f. d.

§ 3. La formule de Parseval

Le lemme de M. Lebesgue étant admis, nous pouvons considérer une autre question liée au problème traité plus haut, à savoir la question

---

[1] Annales de la Faculté de Toulouse, 3.1 (1909), p. 25-117.

[2] *Lebesgue integrals containing a parameter; with applications*, Transactions of the American Mathematical Society 15.1 (1914).

de la validité de la formule de Parseval. Cette formule est la suivante:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)\,dx = 2\pi\Big\{a_0\alpha_0+\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)\Big\} \tag{17}$$

les a_n, b_n étant les coefficients de Fourier relatifs à $f(x)$ et les α_n, β_n les mêmes coefficients relatifs à $\varphi(x)$.

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction bornée et $f(x)$ une fonction sommable. La formule de Parseval équivaut à la relation suivante:

$$\lim\int_0^{2\pi} f(x)\,[\varphi(x)-s_n(x)]\,dx = 0 \tag{18}$$

ainsi que le montre un calcul facile. Le lemme de M. Lebesgue nous enseigne que, $s_n(x)$ (et par là $\varphi-s_n(x)$) n'étant pas bornée, une fonction sommable $f(x)$ existe qui met en défaut (18). D'autre part, si

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma^\delta \big(\varphi(x)-s_n(x)\big)\,dx = 0 \tag{A}$$

pour tout $[\gamma, \delta]$ appartenant à $[0, 2\pi]$ et

$$|\varphi(x)-s_n(x)| < M, \tag{B}$$

pour tout n entier positif et $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, la validité de (18) est à l'abri du doute. La condition (A) étant toujours réalisée, si φ est une fonction sommable et bornée, on n'a qu'à s'occuper de (B) et l'on obtient le résultat suivant:

Pour que la fomule de Parseval soit valable pour toutes les fonctions sommables f multipliées par une fonction bornée donnée φ, il faut et il suffit que les sommes partielles de la série de Fourier relative à φ soient bornées en leur ensemble.

§ 4. Exemple d'une fonction dont le carré n'est pas sommable et dont la série de Fourier est convergente en moyenne

L'exemple donné au § 1 suggère la question suivante: la convergence en moyenne n'est-elle pas une propriété caractéristique des séries de Fourier relatives aux fonctions sommables avec leurs carrés? Il est facile de démontrer qu'il n'en est pas ainsi. C'est ce qui résulte de l'exemple suivant:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{(\log n)^{1+\varrho}} \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi,\ \varrho>0). \tag{19}$$

La série (19) est convergente dans le domaine indiqué par les inégalités ci-dessus; en effet, c'est une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro (¹) en décroissant. Considérons l'expression

$$(20)\qquad R_{p,p+q}=\sum_{n=p}^{n=p+q}\frac{\cos nx}{(\log n)^{1+\varrho}}$$

$$=\sum_{i=0}^{i=q-1}\left\{\left[\frac{1}{\{\log(p+i)\}^{1+\varrho}}-\frac{1}{\log(p+i+1)^{1+\varrho}}\right]\sum_{n=p}^{n=p+i}\cos nx\right\}+$$

$$+\frac{1}{\{\log(p+q)\}^{1+\varrho}}\sum_{n=p}^{n=p+q}\cos nx$$

obtenue par une „sommation d'Abel". On en tire

$$(21)\qquad \int_0^{2\pi}|R_{p,p+q}|dx\leqslant\sum_{i=0}^{i=q-1}\frac{1+\varrho}{\{\log(p+i+Q_i)\}^{2+\varrho}(p+i+Q_i)}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{n=p}^{n=p+i}\cos nx\Big|\,dx+\frac{1}{\{\log(p+q)\}^{1+\varrho}}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{n=p}^{n=p+q}\cos nx\Big|\,dx$$

en appliquant le théorème de Rolle aux différences [ ] de (20) et en désignant par Q_i des nombres contenus entre 0 et 1. Or

$$(22)\qquad \int_0^{2\pi}\Big|\sum_{n=p}^{n=p+q}\cos nx\Big|\,dx\leqslant c_1\log(p+q)\ (^2);$$

il s'en suit

$$(23)\qquad \int_0^{2\pi}R_{p,p+q}dx\leqslant\sum_{i=0}^{i=q-1}\frac{c_1(1+\varrho)}{\{\log(p+i+Q_i)\}^{1+\varrho}(p+i+Q_i)}+\frac{c_1}{\{\log(p+q)\}^{\varrho}}$$

$$\leqslant\frac{c_1}{\{\log p\}^{\varrho}}+\sum_{i=p}^{\infty}\frac{c_2}{i(\log i)^{1+\varrho}}\leqslant\frac{c_3}{(\log p)^{\varrho}},$$

c_1, c_2, c_3 désignant des constantes par rapport à p, q.

De (23) il résulte que la série (19) est convergente en moyenne; on en conclut qu'elle est une série de Fourier, $\varphi(x)$ étant la fonction limite vers laquelle (19) converge en moyenne (³). On démontre immédiatement que les coefficients de Fourier relatifs à φ sont respectivement égaux aux coefficients de la série (19). D'autre part, la série (19) ne dérive pas d'une fonction à carré sommable, car la somme des carrés des coefficients

$$\sum\frac{1}{(\log n)^{2+2\varrho}}$$

est divergente; $\varphi^2(x)$ n'est donc pas sommable (¹).

Nous aurions pu choisir une autre expression plus simple, ainsi que par exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}},$$

mais l'exemple précédent a l'avantage de faire mieux ressortir le rôle des constantes de M. Lebesgue

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{\sin x}\right|dx$$

dont l'ordre de grandeur est $\log n$.

(¹) H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris 1906, p. 42.
(²) T. H. Gronwall, *Über die Lebesgue'schen Konstanten*, Mathematische Annalen 72 (1912), p. 244-261.
(³) Pour l'existence de cette fonction voir H. Steinhaus, l. c., p. 35-38.

(¹) F. Rieß, loc. cit.