COMMENTAIRES

— et H. Steinhaus, *Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier,* Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Série A, 1918, p. 87-96.*

C'est la première publication de Banach, parue lorsqu'il était encore étudiant. Deux ans plus tôt, Hahn publia (voir Hahn [1]) un travail dans lequel il établit, entre autres, l'existence d'une fonction intégrable dont la série de Fourier ne converge pas vers elle dans la métrique de l'espace L^1. Ce résultat mit en évidence la différence essentielle entre la façon dont se comportent les séries de Fourier dans l'espace L^1 et celle dont elles se comportent dans les espaces L^p où $p>1$, vu le théorème de Riesz et Fischer pour $p=2$ et les théorèmes analogues pour d'autres $p>1$ (voir Zygmund [6], volume I, p. 266). Le résultat de Hahn fut inconnu à Banach et Steinhaus dans des conditions d'alors (c'était le temps de la première guerre mondiale); or le théorème qu'ils démontrèrent dans leur travail va plus loin: ils y construisirent une fonction intégrable au sens de Lebesgue et dont la série de Fourier converge vers elle presque partout sans être convergente dans L^1. Il résulte donc du théorème classique de Banach et Steinhaus (voir [*19*]) que l'ensemble des fonctions dont les séries de Fourier divergent dans L^1 est résiduel dans cet espace. Ici, ces auteurs construisirent aussi un exemple de fonction qui n'est pas à carré intégrable, mais dont la série de Fourier est convergente dans L^1. On y trouve en outre des conséquences se rapportant à d'autres problèmes de ce genre, à savoir un exemple de deux fonctions, $f \in L^1$ et g bornée, pour lesquelles l'égalité de Parseval concernant l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt$$

est en défaut (un pareil exemple est contenu également dans le travail précité de Hahn) et une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité

* Voir p. 31

de Parseval soit satisfaite par une fonction $f \in L^1$ quelconque lorsque la fonction bornée g est fixée d'avance.

Les recherches proches de celles du travail commenté concernaient la divergence d'intégrales singulières, en particulier liées à des systèmes orthogonaux. Les travaux sur les suites d'opérations linéaires, comme l'ouvrage classique de Banach et Steinhaus [*19*] et celui de Banach [*17*], peuvent être regardés comme des généralisations des mêmes idées.

Z. Zahorski

Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales, Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Série A, 1919, p. 66-72*.

Ce travail contient une généralisation de la propriété élémentaire du système trigonométrique, à savoir que la moyenne arithmétique de n premières fonctions du système (dans leur ordre naturel) tend à 0 partout sauf aux points $2k\pi$ où $k = 0, 1, 2, \ldots$ lorsque n croît à ∞. Banach établit un théorème analogue pour une suite arbitraire de fonctions d'une variable, orthogonale et normée dans un segment $a \leqslant x \leqslant b$; d'après une remarque de Steinhaus, citée dans ce travail, l'hypothèse que le système est complet n'est pas nécessaire. Les fonctions en question étant supposées arbitraires, ce théorème de Banach n'affirme évidemment que la convergence des moyennes vers 0 presque partout; on peut parvenir à la convergence vers 0 partout par une modification des fonctions qui n'est pas essentielle (dans un ensemble de mesure nulle).

Le résultat est bien plus profond que la propriété mentionnée du système trigonométrique et s'appuie sur le théorème de Hobson d'après lequel les fonctions φ_n formant un système orthonormal et la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon} a_n^2$ étant convergente pour un $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ converge presque partout. Banach n'a pas remarqué que son théorème se laisse déduire de celui de Hobson d'une manière plus simple en appliquant le théorème de Kronecker d'après lequel la série

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi_n(x)$$

* Voir p. 40.

convergeant presque partout (par suite de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+0,1}$), on a

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{1}\varphi_1(x) + 2 \cdot \frac{1}{2}\varphi_2(x) + \ldots + n \cdot \frac{1}{n}\varphi_n(x)}{n} \to 0 \text{ presque partout.}$$

Plus tard, le théorème de Hobson fut généralisé: Rademacher démontra que le facteur n^{ε} peut y être remplacé par $\log^2 n$, facteur qui, comme le prouva Menchoff (voir Menchoff [1]), ne se laisse pas, en général, réduire davantage car quelle que soit la suite $w(n)$ pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w(n)}{\log^2 n} = 0,$$

il existe un système orthonormal de fonctions $\varphi_n(x)$ bornées dans leur ensemble et telles qu'une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ diverge presque partout, tandis que la série $\sum_{n=1}^{\infty} w(n) a_n^2$ est convergente.

L'application du théorème de Rademacher au lieu de celui de Hobson permet d'améliorer le résultat de Banach en remplaçant $1/n$ dans $(*)$ par exemple par $n^{1/2}(\log n^{3/2+\varepsilon})$ (voir Kaczmarz et Steinhaus [1], p. 165). En particulier, lorsqu'on prend pour les fonctions $\varphi_n(x)$ celles de Rademacher, le théorème de Banach a pour conséquence celui de Borel sur la répartition des signes: sauf dans un ensemble de mesure nulle, la densité des chiffres 0 et 1 est la même dans le développement binaire d'un nombre réel quelconque. L'interprétation probabiliste de ce résultat donne le théorème de Cantelli: le gain moyen au jeu de pile ou face après n parties (les probabilités étant supposées constantes, égales à $\frac{1}{2}$ et indépendantes) tend à 0 avec la probabilité 1 lorsque n tend à ∞.

D'ailleurs, le théorème de Borel, celui de Cantelli et le cas particulier de celui de Banach pour le système de Rademacher sont équivalents (voir Kaczmarz et Steinhaus [1], p. 129).

Plus récemment, les généralisations du théorème en question de Banach furent appliquées dans la théorie des méthodes de limitation (voir Zeller [1]).

Des résultats analogues à ceux qui viennent d'être discutés peuvent être déduits également par un choix convenable des coefficients de la série et par l'application subséquente du théorème de Kronecker en s'appuyant sur le résultat de Zygmund (voir Zygmund [1]) concernant la convergence presque partout de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,[\delta_n^{(r)}(x) - \delta_{n-1}^{(r)}(x)]^2$$

où $\delta_n^{(r)}$ sont les moyennes de Cesàro d'ordre $r > \frac{1}{2}$ des sommes partielles d'une série orthogonale d'une fonction quelconque à carré intégrable, résultat qui n'est pas en rapport direct avec le théorème de Banach.

Z. Zahorski

Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Fundamenta Mathematicae 1 (1920), p. 123 et 124*.

Les fonctions réelles définies pour tout x réel et qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{1}$$

portent d'ordinaire le nom de *fonctions additives*. Cauchy montra déjà en 1821 (voir Cauchy [1]) que toute fonction additive satisfait à l'équation

$$f(rx) = rf(x) \tag{2}$$

pour tout x réel et tout r rationnel. En y ajoutant la continuité de f, il en résulte aussitôt que cette fonction est linéaire:

$$f(x) = xf(1).$$

Remarquons que (1) et (2) entraînent pour toute fonction f additive l'égalité

$$f\Big(\sum_{k=1}^{N} r_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} r_k f(x_k) \tag{3}$$

où N est fini et r_k est un nombre rationnel arbitraire. La question s'impose s'il existe des fonctions additives qui ne sont pas linéaires. Hamel s'occupa de cette question dans son travail [1] où il démontra (d'ailleurs par des moyens non effectifs, à savoir en admettant la possibilité de bien ordonner le continu numérique) l'existence de telles fonctions et établit une méthode pour les construire. Cette méthode consistait à construire d'abord une base de nombres réels (dite dès lors *base de Hamel*), c'est-à-dire un ensemble de ces nombres tel que tout x réel puisse être représenté d'une façon univoque sous la forme d'une somme finie

$$x = \sum_{k=1}^{N} r_k x_k \tag{4}$$

* Voir p. 47.

où r_k sont rationnels et x_k appartiennent à cette base. Alors, en se donnant arbitrairement une fonction $f(x)$ définie pour les x de la base de Hamel et en prolongeant cette fonction à l'aide de (3) et (4) à tous les autres x réels, la fonction ainsi formée résulte additive. On obtient par cette voie toutes les fonctions additives et il est clair qu'il y a parmi elles des fonctions non-linéaires.

Les fonctions additives continues étant nécessairement linéaires, il était naturel de continuer l'étude des fonctions additives en vue de trouver des conditions aussi faibles que possibles qui suffiraient pour conclure, en leur assujettissant une fonction additive, qu'elle est continue (ou — ce qui revient au même — linéaire). En d'autres mots, il s'agissait d'étudier les propriétés pathologiques des fonctions additives discontinues. Certaines investigations sur les fondements de la mécanique (essais de bien fonder la loi du parallélogramme des forces; voir Voss [1]) contribuèrent également à déclencher ces recherches. En voici les principaux résultats: chacune des cinq conditions qui suivent suffit pour la continuité d'une fonction additive.

(a) Que cette fonction soit bornée, ne fût-ce que dans un intervalle et ne fût-ce que d'un côté (Darboux [1]).

(b) Qu'elle n'ait, ne fût-ce que dans un intervalle, aucune valeur appartenant à un certain intervalle (Hamel [1], où ce résultat a la forme de constatation que le diagramme d'une fonction additive discontinue est dense dans le plan).

(c) Qu'elle soit mesurable L (Fréchet [1], Banach [3], Sierpiński [1], Kac [1], Alexiewicz et Orlicz [1]).

(d) Qu'elle ait une majorante mesurable L (Sierpiński [2]).

(e) Qu'elle n'ait, ne fût-ce que dans un ensemble de mesure positive, aucune valeur appartenant à un certain intervalle (Ostrowski [1], Kestelman [1]).

Les implications entre les conditions (a)-(e) se laissent représenter par le schéma

$$\begin{matrix} (a) \to (b) \searrow \\ \\ (c) \to (d) \nearrow \end{matrix} (e).$$

Suffisantes sont aussi les conditions que deviennent (c) et (d) en y remplaçant la mesurabilité par la propriété de Baire (Sierpiński [2], Braun, Kuratowski et Szpilrajn [1], p. 240).

On peut considérer comme appartenant au même ordre d'idées les travaux de Jones [1] et [2] consacrés à l'étude des diagrammes de fonctions additives discontinues au point de vue de leur connexité.

Si l'équation (1) est satisfaite sauf au plus pour un ensemble de couples (x, y) de mesure (plane) nulle et la fonction f est mesurable, elle coïncide presque partout avec une fonction linéaire (voir par exemple Jensen [1]). Si l'équation (1) est satisfaite sauf au plus pour un ensemble de couples (x, y) dans lesquels x ou y appartient à un ensemble de mesure (linéaire) nulle, cette équation est satisfaite partout (voir Hartman [1]). Si enfin l'équation (1) est satisfaite sauf au plus pour un ensemble de couples (x, y) de mesure (plane) nulle, la fonction f coïncide presque partout avec une fonction satisfaisant partout à cette équation (voir de Bruijn [1]). C'est la solution d'un problème de P. Erdös.

Le travail de Banach commenté ici eut pour son but la démonstration de la suffisance de (c). Comme le montre la bibliographie des travaux précités, les démonstrations de la suffisance de cette condition furent données également par d'autres auteurs et à des époques différentes. La brève et élégante démonstration de Banach utilise le théorème de Lusin sur les fonctions mesurables d'après lequel il existe, pour toute fonction mesurable, une fonction continue qui coïncide avec elle sauf dans un ensemble de points de mesure aussi petite que l'on veut.

Notons encore une généralisation des fonctions additives due à Jensen. Il appela *convexes* les fonctions f définies dans un intervalle ouvert quelconque et assujetties à la relation

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{5}$$

Il montra que toute fonction continue et convexe dans ce sens est convexe au sens ordinaire, c'est-à-dire que tout arc de son diagramme se trouve au-dessous de la corde tendue sur cet arc (voir Jensen [1], p. 180). Or toute fonction additive discontinue est convexe au sens de Jensen sans l'être au sens ordinaire.

Tout comme dans le cas de fonctions additives, on peut demander dans celui de fonctions assujetties à la condition (5) quelles sont les conditions qui en assurent la continuité, donc aussi la convexité au sens ordinaire. On en trouva plusieurs (en général les mêmes que pour les fonctions additives) qui, au fur et à mesure des progrès dans les recherches, furent de plus en plus affaiblies. Sans en citer ici toute la bibliographie du sujet, mentionnons les travaux d'Ostrowski [1] et [2] qui contiennent des résultats généraux embrassant d'autres, connus antérieurement.

Remarquons enfin que les problèmes de l'étude des fonctions additives se transmettent aux espaces abstraits (voir le livre de Banach [*38*], p. 23, 54 et 78).

H. Fast

Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 173 (1921), p. 457-459*.

Ce travail contient une simple démonstration de la généralisation du théorème important de la théorie des fonctions d'une variable réelle d'après lequel l'ensemble des points où la dérivée unilatérale est infinie est de mesure nulle. La généralisation en question porte sur les fonctions arbitraires (même sans l'hypothèse de leur mesurabilité); elle est donc la plus vaste possible. Banach réduisit le problème à son analogue sur les fonctions monotones et commit une erreur, d'ailleurs sans importance essentielle: la fonction définie comme borne supérieure d'une autre fonction sur le segment $[a, x]$ avec x variable doit y être définie comme sa borne inférieure sur le segment $[x, b]$.

Plus tard, Saks [1] démontra un théorème embrassant celui de Banach et généralisant à la fois aux fonctions arbitraires les théorèmes de Denjoy [1] et de G. C. Young [1].

Z. Zahorski

Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables, Fundamenta Mathematicae 3 (1922), p. 128-132**.

C'est un travail sur les propriétés fondamentales des dérivées de Dini et qui décida de la direction des recherches ultérieures sur les propriétés des dérivées. Le théorème d'après lequel les dérivées de Dini des fonctions de classe α de Baire sont de classe $\alpha+2$ fut complété d'une manière essentielle par Zahorski, qui démontra en 1942 que la dérivée supérieure d'une fonction quelconque, même non-mesurable, est de classe 2. Ce résultat fait partie de son travail d'agrégation de 1947 (non publié). Le même résultat fut trouvé aussi par Hájek (voir Hájek [1]); le problème posé par lui, à savoir si la classe de la dérivée supérieure se laisse abaisser pour les fonctions continues, fut résolu négativement par Staniszewska (voir Staniszewska [1]): il existe des fonctions satisfaisant même à la condition de Lipschitz et dont ni la dérivée supérieure, ni inférieure n'est une fonction de classe 1.

Z. Zahorski

* Voir p. 49.
** Voir p. 58.

An example of an orthogonal development whose sum is everywhere different from the developed function, Proceedings of the London Mathematical Society 2 (21) (1922), p. 95-97*.

C'est un simple exemple d'une singularité intéressante, basé sur l'existence d'un système orthogonal, normal et complet dans L^2, mais incomplet dans L^1. En ajoutant des constantes convenablement choisies aux fonctions $\sin x$ et $\cos x$, une fonction intégrable positive arbitraire étant donnée, on obtient un système dans lequel tous les coefficients du développement de cette fonction sont nuls. En orthogonalisant ce système, on parvient au système requis, composé de certains polynômes trigonométriques.

Le développement ultérieur du problème conduisit à un résultat plus général, connu sous le nom du théorème de Banach et Fichtenholz (voir Fichtenholz [2] et Saks [4], p. 174-178). D'après ce théorème, quelle que soit la fonction f intégrable dans un ensemble E mesurable et situé dans l'espace euclidien à k dimensions, il existe un système de fonctions continues φ_n, orthogonal dans E et tel que toute fonction orthogonale à toutes les fonctions φ_n est de la forme $c \cdot f$) où c est une constante. Par un choix convenable de la fonction f, ce théorème permet de former des systèmes orthogonaux qui sont complets dans certaines classes choisies de fonctions sans l'être dans des classes plus vastes contenant la fonction f. La démonstration procède par une construction plus générale du système de fonctions φ_n.

On trouve des généralisations directes de l'idée de Banach dans les travaux d'Orlicz [1] et [2]. Dans le second de ces travaux, l'auteur déduit du théorème de Banach une conséquence d'après laquelle, dans tout espace fonctionnel X assujetti à certaines conditions, il existe un tel système orthonormal que le développement d'une certaine fonction $f \in X$ suivant ce système diverge presque partout. Cela met en relief le rôle que le travail de Banach joue dans divers domaines de la théorie des séries orthogonales, même si éloignés en apparence que celui des problèmes concernant la convergence presque partout de ces séries.

Z. Zahorski

Sur le problème de la mesure, Fundamenta Mathematicae 4, (1923), p. 7-33**.

Ce travail apporta la célèbre solution du problème de la mesure simplement additive et invariante sur la droite et sur le plan, c'est-à-dire la construction de la mesure dite *de Banach* ou *universelle*.

On savait depuis la publication [1] de Hausdorff qu'une telle mesure n'existe pas dans l'espace E^n pour $n > 2$ ni sur la sphère S^n pour $n > 1$. Ces faits sont rappelés au début du travail commenté. Le problème de Ruziewicz qui y est mentionné reste ouvert jusqu'à présent, de même que le problème assez voisin dû à Marczewski: existe-t-il une mesure invariante, définie pour tous les ensembles bornés à propriété de Baire situés dans E^n ou S^n et qui soit un prolongement de la mesure de Jordan? Marczewski aperçut que la méthode de Banach permet de définir dans E^1, E^2 et sur S^1 des mesures universelles invariantes, coïncidant avec celle de Jordan et s'annulant pour les ensembles de I^re catégorie de Baire, ce qui résout les problèmes de Ruziewicz et de Marczewski pour ces espaces. Tarski montra (voir Tarski [4], p. 65) que s'il existe dans E^n pour un $n > 2$ ou dans S^n pour un $n > 1$ une mesure satisfaisant aux conditions de Ruziewicz (ou de Marczewski respectivement), elle s'annule nécessairement pour les ensembles de mesure lebesguienne nulle (ou de I^re catégorie respectivement).

Le travail commenté donna naissance à une longue série de travaux apportant des généralisations des mesures universelles dans diverses directions et des applications de ces mesures. En voici une revue succinte:

Le problème représentatif est le suivant: en admettant que

(1) G est un groupe de transformations d'un ensemble S, $\boldsymbol{B}$ est un anneau G-invariant de sous-ensembles de S (c'est-à-dire tel que $A, B \in \boldsymbol{B}$ et $g \in G$ entraînent $A \cup B \in \boldsymbol{B}$, $A \setminus B \in \boldsymbol{B}$, et $g(A) \in \boldsymbol{B}$) et $\boldsymbol{B}_0$ est un sous-anneau G-invariant de $\boldsymbol{B}$ tel que, pour tout $A \in \boldsymbol{B}$, il existe un $A_0 \in \boldsymbol{B}_0$ contenant A;

(2) m_0 est une mesure G-invariante dans $\boldsymbol{B}_0$ (c'est-à-dire telle que $m_0(A) = m_0(g(A))$ pour tout $A \in \boldsymbol{B}_0$ et tout $g \in G$),

trouver des conditions suffisantes pour que

(*) il existe une mesure G-invariante m dans $\boldsymbol{B}$ et telle que $m(A) = m_0(A)$ pour tout $A \in \boldsymbol{B}_0$.

Il y a sur ce sujet des résultats de deux genres, dont les premiers concernent les conditions suffisantes imposées au groupe G seul et les seconds — celles portant sur le système $(G, S, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_0, m_0)$ tout entier.

Premier genre. L'existence d'une mesure invariante à droite (à gauche) dans la classe de tous les sous-ensembles de G, ce qui entraîne déjà l'existence d'une pareille mesure invariante des deux côtés, est une condition suffisante. Cette condition est évidemment le cas particulier de (*) pour $S = G, \boldsymbol{B} =$ classe de tous les sous-ensembles de $G, \boldsymbol{B}_0 = \{\emptyset, G\}$, $g(A) = \{ga : a \in A\}$, $m_0(\emptyset) = 0$ et $m_0(G) = 1$. Soit MB (lisez: ayant une mesure de Banach) la classe de ces groupes.

* Voir p. 63.
** Voir p. 66.

On sait que la classe MB

(i) contient tous les groupes abéliens (résultat contenu implicitement dans le travail commenté; cf. aussi von Neumann [1]) et tous les groupes finis (ce qui est trivial),

(ii) est close par rapport aux opérations de passage aux sous-groupes, d'homomorphisme, d'extension d'un groupe de classe MB par un groupe de la même classe et de somme ascendante (voir von Neumann [1] et Følner [1]).

En particulier, MB contient tous les groupes résolubles (voir von Neumann [1]) sans contenir aucun groupe libre non-abélien, donc aussi aucun de leurs sur-groupes (voir von Neumann [1] et la littérature citée dans le commentaire au travail [*13*]). En désignant donc par K la plus petite classe satisfaisant à (i) et (ii), et par L la classe des groupes dépourvus de sous-groupes libres non-abéliens, on a

$$K \subset \mathrm{MB} \subset L.$$

On ignore si $\mathrm{MB} = K$, $\mathrm{MB} = L$, voire si $K = L$. On peut montrer que la réponse négative au problème de Burnside (existence d'un groupe infini à un nombre fini de générateurs et dont tous les éléments distincts de l'unité soient d'ordre p premier) entraînerait l'inégalité $K \neq L$. Une belle caractérisation de la classe MB fut trouvée par Følner (voir Hulanicki [1]): $G \in \mathrm{MB}$ équivaut à l'existence, pour tout sous-ensemble fini A de G et tout $\varepsilon > 0$, d'un sous-ensemble fini E de G satisfaisant pour tout $a \in A$ à l'inégalité

$$\overline{\overline{E \setminus aE}} < \varepsilon \overline{\overline{E}}.$$

On en déduit facilement (i), (ii) et même la propriété suivante de la classe MB: tout groupe dont les sous-groupes ayant un nombre fini de générateurs appartiennent à MB appartient lui-même à cette classe.

Les groupes de la classe MB satisfont à diverses conditions plus générales que (*). Au point de vue formel, la plus générale en est celle du théorème de Hahn et Banach sur la possibilité de prolonger toute fonctionnelle linéaire invariante par rapport à un groupe de la classe MB de transformations linéaires, de façon qu'elle soit invariante et conserve une majorante invariante convexe donné d'avance.La démonstration de ce théorème est une conséquence presque évidente (cf. Agnew et Morse [1] pour les groupes résolubles) du théorème classique de Hahn et Banach, car on peut rendre invariant un prolongement quelconque au moyen de l'intégration suivant un groupe de la classe MB par rapport à une mesure de Banach. Le théorème de Markoff et Kakutani (voir Dunford et Schwartz [1], p. 456) est vrai pour tous les groupes de la classe MB et seulement pour eux. Plusieurs travaux furent consacrés à des généralisations de ces théorèmes dans lesquelles on considérait des semigroupes d'opérateurs linéaires au lieu des groupes (voir Day [1] et Silverman [1]). On y trouve également des conditions assez éloignées l'une de l'autre en apparence et pourtant équivalentes (cf. Day [1]). Les travaux [1] de Day, [1] de Deleeuw et Glicksberg et [1] de Silverman contiennent diverses applications de ces recherches.

La généralisation suivante de (*) pour les groupes de la classe MB résulte de la généralisation précitée du théorème de Hahn et Banach (voir [*36*]): en remplaçant l'hypothèse (2) par

(2') a est une fonction réelle donnée, définie dans le groupe G et telle que $m_0\big(g(A)\big) = a(g)\cdot m_0(A)$ pour tout $A \in \boldsymbol{B}_0$ et tout $g \in G$,

on a pour les groupes $G \in \mathrm{MB}$

(*') l'existence d'un prolongement m de la mesure m_0 dans $\boldsymbol{B}$ tel que $m\big(g(A)\big) = a(g)\cdot m(A)$ pour tout $A \in \boldsymbol{B}$ et tout $g \in G$.

Pour l'établir, on n'a qu'à considérer l'espace linéaire L des fonctions définies dans S tendu sur les fonctions caractéristiques des ensembles appartenant à $\boldsymbol{B}$, puis de définir l'action du groupe G sur l'espace L par la formule

$$g(f)(s) = \frac{1}{a(g)} f\big(g(s)\big)$$

où $g \in G$ et $s \in S$, et enfin d'appliquer la généralisation précitée du théorème de Hahn et Banach.

Voici des corollaires faciles, analogues aux théorèmes du travail commenté et qui résultent des thèses (*), (*') et de l'appartenance à MB du groupe des similitudes du plan (car il est résoluble):

Il existe des mesures m de Banach dans l'anneau des sous-ensembles bornés du plan, qui sont des prolongements de la mesure de Lebesgue ou bien qui satisfont à la condition de Ruziewicz ou celle de Marczewski citée p. 319 et qui sont telles que

$$m(aX+b) = |a|^2\cdot m(X) \quad \text{où} \quad aX+b = \{ax+b : x \in X\},$$

a et b étant des nombres complexes quelconques.

Il existe aussi une mesure m bornée, définie dans le corps de tous les sous-ensembles du plan et telle que $m(aX+b) = m(X)$ pour tout $a \neq 0$.

On peut de même prolonger les mesures t-dimensionnelles de Hausdorff (où $0 < t \leqslant 2$) définies sur le plan en conservant la condition $m(aX+b) = |a|^t\cdot m(X)$ et les mesures généralisées de Hausdorff en conservant la condition $m(aX+b) = m(X)$ pour $|a| = 1$. Une autre application est à trouver dans le travail d'Agnew et Morse [1].

Second genre. Des conditions suffisantes portant sur le système $(G, S, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_0, m)$ tout entier sont dues à von Neumann (voir von Neumann [1]) et à Tarski (voir Tarski [4] et [9], théorèmes 16.12 et 16.13). Les théorèmes 14.13 (i) et 16.8 (iii) de Tarski (voir Tarski [9]) concernant 16.5 (ii) entraînent le corollaire qui suit.

En admettant que

1° il existe un $A_0 \epsilon \boldsymbol{B}_0$ tel que $m_0(A_0) > 0$, la mesure m_0 étant assujettie à (2), et que la mesure m_0 est déterminée d'une manière univoque par sa valeur $m_0(A_0)$,

2° $\boldsymbol{B}$ est un anneau d'ensembles dénombrablement multiplicatif (c'est-à-dire tel que $A_i \epsilon \boldsymbol{B}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ entraîne $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \epsilon \boldsymbol{B}$) et il existe pour tout $A \epsilon \boldsymbol{B}$ un $g \epsilon G$ tel que $A \cap g(A) = \emptyset$,

la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait (*) est qu'il n'existe pas de $A \epsilon \boldsymbol{B}_0$ contenant A_0 et susceptible d'une décomposition paradoxale dans $\boldsymbol{B}$ par rapport à G (c'est-à-dire tel que $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n = P \cup Q$, $P = P_1 \cup \ldots \cup P_n$, $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, $A_i \cap A_j = P_i \cap P_j = Q_i \cap Q_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $A_i = f_i(P_i) = g_i(Q_i) \epsilon \boldsymbol{B}$ pour un $f_i \epsilon G$ et un $f_i, g_i \epsilon G$ où $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, n$).

Ce corollaire montre que le problème précité de Marczewski équivaut à un autre problème posée par lui et concernant les décompositions paradoxales en sommandes ayant la propriété de Baire (cf. le commentaire au travail [*13*] de Banach, ce volume, p. 323).

Ryll-Nardzewski [2] établit une série intéressante de théorèmes équivalents d'une manière effective (à savoir sans l'axiome du choix) au théorème de Hahn et Banach. Ces théorèmes sont apparemment plus faibles que l'axiome du choix et même que le théorème de Tychonoff sur la compacité du produit cartésien d'espaces de Hausdorff compacts. Plusieurs conséquences du théorème de Hahn et Banach furent démontrées par voie effective par Morse. D'autres résultats sur les mesures universelles et décompositions paradoxales sont à trouver dans les travaux de Dekker [4], Hadwiger [1], Hadwiger et Kirsch [1], Hadwiger et Nef [1], Kirsch [1], Nef [1], von Neumann [1], Sierpiński [18] et [24], Tarski [4], [5] et [9]; voir aussi la littérature dans le commentaire au travail [*13*] de Banach, p. 323.

Quant au problème de l'existence des mesures universelles dénombrablement additives, sa nature est tout à fait différente. Il y a des résultats importants sur l'impossibilité de telles mesures (voir le commentaire au travail [*13*] de Banach, ce volume, p. 323).

Jan Mycielski

Sur le théorème de M. Vitali, Fundamenta Mathematicae 5 (1924), p. 130-136*.

Ce travail contient une simple démonstration du théorème de Vitali, fondamental pour les applications de la théorie de la mesure à l'étude des fonctions. On trouve à présent la démonstration de Banach dans la plupart des cours de la théorie de la mesure.

En outre, ce travail apporte une solution négative du problème de Carathéodory: le théorème de Vitali cesse d'être vrai lorsque l'ensemble est couvert par des rectangles dont le rapport des côtés n'est pas borné.

Sikorski [6] appliqua la méthode de la démonstration de Banach à certaines mesures non-lebesguiennes des ensembles situés sur la droite.

Z. Zahorski

Sur une classe de fonctions d'ensemble, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 170-188**.

Tous les théorèmes de ce travail, bien que formulés en termes de planimétrie, subsistent pour tout espace cartésien à un nombre quelconque $n > 1$ de dimensions. La classe de fonctions envisagée ici par Banach est plus vaste que celle dont s'occupait antérieurement de la Vallée-Poussin (voir de la Vallée-Poussin [1]), et les variations de ces fonctions, de même que leur continuité absolue, présentent beaucoup d'analogies aux propriétés homonymes des fonctions d'une seule variable. Ces propriétés trouvèrent de nombreuses applications dans des recherches sur les transformations continues, sur les courbes rectifiables et sur l'aire de surfaces. C'est Banach qui fut le premier à les appliquer dans de telles recherches (voir son travail [*14*]). Des renseignements détaillés sur les applications ultérieures à la théorie des transformations continues sont à trouver dans la monographie de Radó et Reichelderfer [1], p. 223-236, et sur celles à l'aire de surface dans la publication de Radó [2], p. 413-423.

Le théorème IV du travail commenté fut généralisé en partie, à savoir pour les fonctions d'une variable, par Zahorski (voir Hájek [1]) et par d'autres auteurs (voir à ce sujet le commentaire au travail [*21*] de Banach, ce volume, p. 330).

J. Lipiński

---

* Voir p. 90.

** Voir p. 96.

Un théorème sur les transformations biunivoques, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 236-239*.

Ce travail apporta des généralisations du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein concernant l'antisymétrie de la relation $\leqslant$ entre les nombres cardinaux. Des généralisations analogues se laissent établir pour les théorèmes sur les nombres cardinaux de la théorie des algèbres R. A. (voir Tarski [9], théorème 11.28) par une simple analyse des démonstrations. Il n'intervient dans ces généralisations qu'un nombre fini d'ensembles et de transformations; elles appartiennent ainsi à la théorie des congruences par décomposition finie (cf. ce volume, p. 325) et leurs démonstrations n'exigent pas d'axiome du choix. Autres théorèmes de l'arithmétique des nombres cardinaux, n'appartenant pas à la théorie des algèbres R. A., se prêtent également à des généralisations finitistes de ce genre (voir König [1], Kuratowski [1] et Tarski [9], théorème 16.9), mais ces généralisations exigent déjà des moyens non-effectifs, par exemple le théorème de Tychonoff sur la compacité des produits cartésiens d'espaces de Hausdorff compacts. Cependant, si l'on admet une infinité dénombrable d'ensembles et de transformations, c'est-à-dire si l'on fait la théorie des congruences par décompositions dénombrables, les théorèmes en question convenablement modifiés redeviennent effectifs (voir par exemple Kuratowski [1]) et toute l'arithmétique effective des nombres cardinaux, développée surtout par Tarski (dans ses travaux [6] et [9] arithmétique des algèbres cardinales et théorèmes p. 241-243; cf. aussi Sierpiński [28]) est susceptible à des généralisations de ce genre. Autres recherches généralisant les théorèmes 1 et 2 du travail commenté ou établissant des théorèmes analogues à eux sont à trouver dans les publications de Knaster [1], de Lindenbaum et Tarski [1] et de Tarski [1] et [2].

On étudia également la question (voir Hanf [1], Jónsson [1], Sąsiada [1], Sikorski [1] et Tarski [9] et [6]): dans quels cas est-il possible ou impossible de généraliser le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein et ses analogues pour l'arithmétique des produits cartésiens d'algèbres de Boole et de ceux de groupes abéliens?

Pour terminer, ajoutons les démonstrations, aujourd'hui presque immédiates, du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein dans ses formes T1-T3 les plus usuelles (cf. Reichbach [1]) et celle du théorème 1 du travail commenté.

T1. *Si $M \subset N \subset P$ et f est une transformation biunivoque de P en M, où $f(P) = M$, il existe un X tel que*

(1) $$X \subset M \quad \text{et} \quad f(N\setminus X) = M\setminus X.$$

* Voir p. 114.

On n'a en effet qu'à poser $X = f(P\setminus N) \cup ff(P\setminus N) \cup \ldots$ Les relations (1) sont alors manifestes.

T2. $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ *entraînent* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

Pour l'établir, il suffit de poser sous les hypothèses de T1

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \in X, \\ f(x) & \text{pour} \quad x \in N\setminus X; \end{cases}$$

d'après (1), g est alors une transformation biunivoque de N en M.

T3. $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ *et* $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ *entraînent* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

On n'a en effet qu'à substituer $\mathfrak{m}$ à $\mathfrak{p}$ dans T2.

Enfin, pour démontrer le théorème 1 du travail commenté, définissons les décompositions

(2) $$A = A_1 \cup A_2 \quad \text{et} \quad B = B_1 \cup B_2$$

à l'aide de T1 et des formules

$$P = A, \quad N = \psi^{-1}(B), \quad M = \psi^{-1}\varphi(A), \quad f = \psi^{-1}\varphi,$$
$$A_1 = P\setminus(N\setminus X), \quad A_2 = N\setminus X, \quad B_1 = \psi(X), \quad B_2 = \psi(N\setminus X).$$

Les relations $A_1 \cap A_2 = 0 = B_1 \cap B_2$ et (2) sont alors manifestes. On a $\varphi(A_1) = B_1$, car $\psi^{-1}\varphi(A_1) = f\big(P\setminus(N\setminus X)\big) = f(P)\setminus f(N\setminus X) = M\setminus(M\setminus X) = X = \psi^{-1}(B_1)$; on a également $\psi(A_2) = B_2$, ce qui achève la démonstration.

Jan Mycielski

— et A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 244-277*.

Ce travail apporta la célèbre amélioration du résultat de Hausdorff (voir Hausdorff [2]), à savoir la décomposition paradoxale de la sphère, et maints autres théorèmes sur diverses relations d'équivalence entre les ensembles de points dont la plus importante est la relation $\underset{f}{=}$ (voir définition 2). Les matières de ce travail furent reprises par plusieurs auteurs et développées par eux dans des directions fort variées.

* Voir p. 118.

Les travaux d'Adams [1], de Dekker [1] et [4], de Dekker et de Groot [1], de Mycielski [1], de Mycielski et Świerczkowski [1], de von Neumann [1], de Robinson [1] et de Sierpiński [15] et [16] furent consacrés à l'étude détaillée du phénomène de décompositions paradoxales des boules, des sphères, des espaces euclidiens, elliptiques et hyperboliques. Robinson démontra par exemple que la boule est congruente par décomposition en 5 parties disjointes au couple de deux boules disjointes de rayon égal au sien et que le nombre 5 est ici le plus petit possible. Sierpiński établit (voir Sierpiński [15]) un décomposition de la boule en $2^{\aleph_0}$ parties disjointes dont chacune lui est congruente par décomposition finie (voir aussi Mycielski [1], théorème (S_2)). Dans ces travaux, on établissait déjà des méthodes générales de décompositions de divers espaces en parties assujetties à un système de congruences arbitrairement donné. Le fond commun de tous ces phénomènes se révéla dans l'existence des groupes libres d'isométries sans point invariant dans les espaces considérés ou de celles satisfaisant à la condition de commutativité locale introduite par Dekker (voir [1] et [4]) et qui est plus faible (ce qui est essentiel par exemple dans le cas du groupe des rotations de la sphère S^2, toutes les rotations de cette sphère ayant des points invariants).

C'est de là que prirent naissance les problèmes d'existence des groupes libres d'isométries assujetties aux conditions mentionnées et, plus généralement, ceux d'existence des sous-groupes libres dans les groupes topologiques (remarquons que tout sous-groupe d'un groupe opère sur lui sans point invariant). Ces problèmes furent examinés assez complètement dans les publications de Balcerzyk et Mycielski [1], de Dekker [1], [3] et [4], de Mycielski et Świerczkowski [1] et de Sierpiński [15] (cf. aussi Balcerzyk et Mycielski [2] et Dekker [2]). Le premier progrès important dans cette série de publications fut apporté par le travail [15] de Sierpiński qui y démontra l'existence d'un groupe libre de rotations de la sphère S^2 de rang $2^{\aleph_0}$. Cette direction de la recherche paraît à l'heure actuelle presque épuisée, les problèmes restés ouverts ne concernant que les groupes des rotations des sphères S^4 et S^5 (voir Dekker [1], [3] et [4] et Mycielski [3]).

Les groupes libres localement commutatifs se montrèrent également constituer le fond d'un autre phénomène géométrique singulier, à savoir de celui des ensembles invariants par rapport aux modifications dénombrables (voir Mycielski [3]).

Autres phénomènes géométriques, semblables aux décompositions paradoxales de la sphère, furent l'objet des travaux de von Neumann [1] et de Sierpiński [19], [21] et [24]. Reste ouvert le problème de Marczewski sur l'existence des décompositions paradoxales de la sphère en parties ayant la propriété de Baire.

Les théorèmes 8-10 du travail commenté, qui concernent la relation $\underset{\mathrm{f}}{=}$, furent généralisés considérablement par Tarski dans sa monographie [9]. Ils appartiennent à l'arithmétique des algèbres R. A. qui y sont introduites par la définition 11.26 et le théorème 11.28. Par contre, les théorèmes 11 et 12 du travail commenté, qui appartiennent à la série de théorèmes étudiés par Kuratowski, König et Tarski (cf. Tarski [9], théorème 16.9), ne sont probablement pas susceptibles à une telle généralisation et en outre, par différence de ceux d'arithmétique R. A., leurs démonstrations semblent exiger des moyens non-effectifs (l'application du théorème de Tychonoff sur la compacité des produits cartésiens d'espaces de Hausdorff compacts). On examinait également la relation $\underset{n}{=}$ de la congruence par décomposition en n parties, qui est plus fine que la relation $\underset{\mathrm{f}}{=}$ (voir Lindenbaum [1], Lindenbaum et Tarski [1], Sierpiński [15], [16], [18] et [25]-[27]. Finalement, les théorèmes 8′-12′ du travail commenté, qui concernent la relation $\underset{\mathrm{d}}{=}$, furent aussi généralisés sensiblement par Tarski dans sa monographie [9] précitée. Il appartiennent à l'arithmétique des algèbres C. A. qui y est développée. Elle est presque effective et constitue également une généralisation de la théorie effective des nombres cardinaux. On ne connaît qu'un seul groupe de théorèmes concernant la relation $\underset{\mathrm{d}}{=}$ et un groupe analogue de théorèmes dans la théorie effective des nombres cardinaux (cf. Tarski [8], théorème 7) dont on ignore la possibilité ou l'impossibilité d'une pareille généralisation (cf. Tarski [4], p. 242 et 243). Quant à ce cycle de problèmes, voir aussi le commentaire au travail [*12*] de Banach, ce volume, p. 321. De même, les données bibliographiques sur les rapports entre les décompositions paradoxales et les problèmes de la mesure, ainsi que sur le degré de non-effectivité des théorèmes I et II qui précèdent le § 1 du travail commenté, sont à trouver dans le commentaire au travail de Banach [*9*], ce volume, p. 318.

Divers théorèmes, remarques et problèmes sur la congruence d'ensembles de points sont dus à Sierpiński (voir Sierpiński [18]-[20], [22] et [25]-[27]; voir aussi Lindenbaum [1], Lindenbaum et Tarski [1] et Mycielski [2]. Autres renseignements sont à trouver dans la plupart des travaux précités ici.

Jan Mycielski

Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), p. 225-236*.

Les résultats contenus dans ce travail jouèrent un rôle important dans l'étude des propriétés de courbes rectifiables, dans les tentatives

* Voir p. 149.

variées de définir l'aire de surface, dans la théorie des transformations continues et dans celle des fonctions absolument continues. Ils furent souvent cités et généralisés. Des renseignements détaillés à ce sujet sont à trouver dans les monographies de Radó [2], de lui et Reichelderfer [1], de Cesari [1] et de Saks [6].

La fonction $N(t)$ du § 1. Elle est dite dans la littérature ultérieure *fonction banachienne de multiplicité* („Banach multiplicity function") ou *indicatrice de Banach*. On en emploie plusieurs généralisations et modifications. Morey [1] et Cereteli [1] par exemple adoptèrent comme valeur de l'indicatrice non pas le nombre de points, mais celui de composantes (au sens de connexité) de la contre-image d'un point et Lozinskiĭ [1] définit la notion d'indicatrice aussi pour certaines fonctions discontinues. Banach lui-même généralisa au § 2 sa fonction de multiplicité $N(t)$ définie pour une seule variable à la fonction de multiplicité $N(u, v)$ d'une transformation continue de la forme $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Une modification en est la fonction essentielle de multiplicité („essential multiplicity function") de Radó [1] ayant pour valeur en tout point (u, v) le nombre de certaines composantes dites „essentielles" de la contre-image de ce point. D'autres fonctions de multiplicité sont envisagées dans la monographie précitée de Radó et Reichelderfer [1], p. 145-190 et 232-249.

Théorème 2 du § 1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit à variation bornée, la sommabilité de la fonction $N(t)$ étant remplacée dans cette condition par la convergence d'une série, fut établie aussi un peu plus tard, mais indépendamment, par Vitali [1]. Comme le montra Lozinskiĭ [1], le théorème 2 en question subsiste pour les fonctions discontinues ayant en tout point les limites unilatérales lorsqu'on remplace la fonction $N(t)$ par une autre, plus générale.

Corollaire 1 du § 1. La propriété des fonctions exprimée dans la thèse de ce corollaire s'appelle *condition* (T_1) *de Banach*. Différentes propriétés des fonctions satisfaisant à cette condition furent établies dans le travail ultérieur [*18*] de Banach (voir dans le commentaire à ce travail, ce volume, p. 331, une vaste bibliographie concernant cette classe de fonctions).

Théorème 3 du § 1. Les fonctions pour lesquelles $|E| = 0$ entraîne $|E_y| = 0$ s'appellent *ayant la propriété* (N) *de Lusin*. D'après le théorème en question, dans la classe des fonctions à variation bornée, la propriété (N) de Lusin équivaut à la continuité absolue. C'est aussi une conséquence directe du théorème de Radon-Nikodym (voir le commentaire au travail [*18*] de Banach, ce volume, p. 331). Menchoff montra (voir Menchoff [2] et Saks [3]) que cette équivalence subsiste dans une classe plus vaste de fonctions, à savoir qui sont continues, différentiables presque partout et ayant la dérivée sommable. Saks prouva (voir Saks [2]) que l'équivalence en question subsiste également dans la classe des fonctions continues ayant en tout point un nombre dérivé médian $\lambda(x)$ qui est une fonction sommable. D'autres généralisations sont dues à Nina Bary (voir Bary [1]) et à Menchoff (voir Menchoff [2]). Les applications du théorème 3 et de ses généralisations furent envisagées par Saks aux chapitres VII (§ 6) et IX (§ 7) de son livre [6].

Définitions et théorèmes de § 2 *et* § 3. Les deux §§ sont consacrés au transport des résultats sur les fonctions d'une variable et sur la rectifiabilité des courbes établis dans le § 1 dans le domaine des transformations continues d'ensembles plans et dans celui de la planification des surfaces. L'idée de Banach de définir la variation et la continuité absolue d'une transformation (définitions 1 et 3 du § 2) de façon qu'elles rappellent les définitions des notions correspondantes dans le cas d'une seule variable s'avéra bien utile. Elle permit de trouver le théorème analogue à celui de Lebesgue sur la différentiabilité des fonctions à variation bornée (théorème 1 du § 2) et les relations entre la sommabilité de l'indicatrice et l'aire finie de la surface (§ 3). Des recherches détaillées et fécondes furent continuées dans cet ordre d'idées surtout par Radó et Reichelderfer; les résultats de ces recherches et leur rapport à la théorie de Banach firent l'objet du chapitre IV de la monographie précitée [2] de ces auteurs, consacré aux transformations continues, et du chapitre IV, 5 de la monographie [2] de Radó, consacré à la théorie de l'aire de surface. La définition banachienne de l'aire fut prise par Young (voir G. C. Young [1]) pour modèle de sa définition de l'aire intrinsèque; cet auteur lia en outre les idées de Banach à la théorie de la mesure de Carathéodory.

Schauder (voir Schauder [1] et [2]) ainsi que Radó et Reichelderfer [1] développèrent les idées de Banach concernant le jacobien généralisé (théorème 1 du § 2) et parvinrent à des résultats plus avancés. La valeur du jacobien généralisé conçue par eux est le produit de celui de Banach et de l'index de point, convenablement défini. Pour des renseignements plus précis à ce sujet, voir la monographie [2] de Radó, p. 414-416.

La notion de rectifiabilité des courbes n'étant pas directement transportable aux surfaces, plusieurs auteurs furent portés à définir diverses classes de surfaces planifiables et les aires de ces surfaces. A l'issue du travail de Banach, ce fut la définition de Lebesgue qui jouait le rôle dominant. Lebesgue traitait l'aire comme une fonctionnelle semicontinue inférieurement. Les définitions de Peano et de Geöcze suivaient la même voie. Les résultats de ces auteurs reléguèrent à l'arrière-plan la théorie dite *projective* de l'aire qui utilisait les relations entre l'aire des surfaces et celles de leurs projections sur les plans du système des coordonnées cartésiennes. Or le travail de Banach, et avant tout ses théorèmes 1 et 2 du § 3, attirèrent à nouveau l'attention sur la théorie projective (voir par exemple Cesari [1], p. 6). Citons à ce propos les paroles suivantes de la monographie de Radó (voir Radó [2], p. 415) sur l'histoire de l'évolution de la théorie de l'aire de surface dans deux directions en questions: „Apparently, the concepts sBV and sAC" (variation bornée d'une transformation et la continuité absolue) „introduced by Banach were too exacting. This becomes strikingly evident if one attempts applications in the theory of surface area: *the fundamental conflict between the projection principle and the lower semi-continuity principle arises immediately, the Banach concepts being found biased in favor of the projection principle*".

J. Lipiński

Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 180 (1925), p. 1637-1640*.

Cette communication de Banach contient une application du théorème établi par lui dans sa thèse de doctorat (voir [7], p. 153) à la convergence des séries orthogonales suivant la norme dans les espaces $C\langle 0,1\rangle$ et $L^p\langle 0,1\rangle$ où $p>1$. Le théorème appliqué peut être formulé comme suit:

Soient $\langle X, \|\ \|\rangle$ *un espace de Banach,* $\langle X_0, \|\ \|_0\rangle$ *un espace normé quelconque et* U *une opération distributive transformant* X *en* X_0 *et telle que, pour* $x_n \in X$ *et* $x \in X$ *arbitraires,* $\lim\limits_{n}\|x_n - x\| = 0$ *entraîne* $\overline{\lim\limits_{n}}\|U(x_n)\|_0 \geqslant \|U(x)\|_0$. *Alors l'opération* U *est continue.*

Les idées de la communication de Banach se développèrent en ainsi dite *théorie des multiplicateurs* qui constitue actuellement un secteur de celle des séries orthogonales.

Premiers résultats de la théorie générale des systèmes orthogonaux (des multiplicateurs) sont à trouver dans les publications de Steinhaus [4], Orlicz [1], Kaczmarz et Steinhaus [1], Kaczmarz et Marcinkiewicz [1] et Marcinkiewicz [1].

Z. Ciesielski

* Voir p. 160.

Sur une classe de fonctions continues, Fundamenta Mathematicae 8 (1926), p. 166-172*.

Dans son mémoire important sur l'intégrale et la série trigonométrique, Lusin [1] introduisit la notion de propriété (N) des fonctions de variable réelle, à savoir que l'image d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle. Il y a des fonctions continues ayant cette propriété sans qu'elles soient absolument continues. Lusin écrivit: „il serait bien intéressant d'étudier d'une manière plus détaillée la classe des fonctions qui ont la propriété (N) ... ou de poser la question d'existence de la dérivée d'une telle fonction". Fichtenholz [1] démontra que la superposition de deux fonctions absolument continues est absolument continue si elle est à variation bornée et seulement dans ce cas. Ce sujet fut repris par Banach dans son travail fondamental [*14*] (voir ici p. 149) où il établit, entre autres, le théorème d'après lequel pour qu'une fonction continue soit absolument continue, il faut et il suffit qu'elle soit à variation bornée et ait la propriété (N). Le théorème précité de Fichtenholz en résulte directement, vu que la propriété (N) est invariante par rapport à la superposition de fonctions. Le théorème de Banach qui vient d'être rappelé fut embrassé ultérieurement par le théorème de Radon-Nikodym d'après lequel une mesure ν qui est σ-finie et absolument continue par rapport à une mesure σ-finie μ s'exprime par $\int\limits_E \varphi(t)\mu(dt)$ $(=\nu(E))$ où φ est μ-intégrable. Pour en déduire qu'une fonction continue, à variation bornée et ayant la propriété (N) est absolument continue, on n'a qu'à remarquer que la mesure engendrée par les accroissements d'une telle fonction est absolument continue relativement à la mesure lebesguienne, donc représentable sous la forme d'une intégrale de Lebesgue.

Dans son travail qui est l'objet de ce commentaire, Banach introduisit une propriété (S) plus forte au point de vue formel que la propriété (N). Une fonction continue a la propriété (S) lorsqu'elle transforme les ensembles de mesure (lebesguienne) suffisamment petite en ensembles de mesure inférieure à un nombre positif donné d'avance. Banach ignorait alors que la propriété (S) est en réalité essentiellement plus forte que (N), comme Fichtenholz le démontra un peu plus tard dans son travail [3]. Plus précisément, ce résultat de Fichtenholz revient à la démonstration de l'existence d'une fonction continue ayant la propriété (N) sans satisfaire à la condition (T_1), à savoir que l'ensemble des valeurs que la fonction prend une infinité de fois soit de mesure nulle. Or c'est seulement la réunion de (T_1) et (N) qui équivaut à (S) pour les fonctions continues; Banach l'établit par le théorème 4 de son travail commenté.

* Voir p. 163.

La propriété (N) entraîne la condition (T_2), à savoir que l'ensemble des valeurs prises par la fonction une infinité indénombrable de fois soit de mesure nulle. Ce résultat constitue la première thèse du théorème 3 du même travail de Banach. D'après la seconde thèse de ce théorème, toute fonction ayant la propriété (N) est dérivable dans un ensemble de mesure positive, ce qui est une réponse partielle à la question proposée par Lusin dans ses paroles précitées. Ruziewicz [1] montra que l'ensemble des points où la dérivée d'une fonction continue ayant la propriété (N), et même la propriété (S), n'existe pas peut ne pas être de mesure nulle.

Les conditions (T_1) et (T_2) furent introduites par Banach déjà dans son travail [*14*]. Il y démontra qu'elles sont satisfaites en particulier par les fonctions à variation bornée. C'est une conséquence facile de l'égalité entre la variation d'une fonction et l'intégrale de son indicatrice de Banach, ce qui y fut un des résultats principaux (voir p. 151 de son travail en question). La condition (T_2) est satisfaite également par les fonctions dites à variation bornée généralisée (fonctions VBG, voir Saks [6], Chapter VII). Les deux conditions, (T_1) et (T_2), interviennent aussi dans des travaux postérieurs des autres auteurs. Par exemple, Ridder [1] démontra que la condition (T_1) est suffisante pour qu'une fonction continue au sens de Darboux (c'est-à-dire qui prend toutes les valeurs intermédiaires entre chaque couple de ses valeurs) soit continue. Plus récemment, Marcus fit l'usage des conditions (T_1) et (T_2) dans sa solution d'un problème de Steinhaus (voir Steinhaus [5]) sur les superpositions des fonctions continues ayant certaines propriétés singulières.

S. Hartman et *W. Nitka*

— et S. Saks, *Sur les fonctions absolument continues des fonctions absolument continues*, Fundamenta Mathematicae 11 (1928), p. 113-116*.

Le problème de la superposition de deux fonctions absolument continues (cf. le commentaire au travail [*18*] de Banach, ce volume, p. 331) fut repris par Bary et Menchoff au point de vue d'une caractérisation intrinsèque de la fonction qui résulte par cette superposition (voir leur travail [1]). Ils démontrèrent que pour qu'une fonction continue soit une superposition de deux fonctions absolument continues, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition (V) suivante: l'ensemble des valeurs de

* Voir p. 178.

cette fonction aux points où elle n'a pas de dérivée finie est de mesure nulle. La condition plus faible qui diffère de (V) par les mots „finie ou infinie" remplaçant le mot „finie" se montra équivalente à (T_1) pour les fonctions continues (voir le livre [6] de Saks, p. 278).

Or dans le travail qui est l'objet de ce commentaire, Banach et Saks montrèrent que la condition (S), introduite par Banach dans son travail [*18*] (voir aussi le commentaire à ce travail, ce volume, p. 331), caractérise également les fonctions continues qui sont des superpositions de deux fonctions absolument continues et en déduisirent le théorème précité de Bary et Menchoff moyennant l'équivalence entre (S) et la réunion de (N) et (T_1). Le théorème de Banach et Saks entraîne comme corollaire évident l'équivalence entre (V) et (S) pour les fonctions continues. Les démonstrations s'appuient essentiellement sur le théorème de Banach concernant son indicatrice (voir [*14*]). Les auteurs signalèrent dans un *post scriptum* que Nina Bary parvint indépendamment au même résultat par une voie essentiellement différente.

Plus tard, Bary montra (voir Bary [2]) que toute fonction continue f est somme de trois (mais pas toujours de deux!) fonctions dont chacune est une superposition de deux fonctions absolument continues. Deux sommandes de ce genre suffisent si f a la propriété (N). Dans le même travail, elle donna une nouvelle interprétation de la condition (T_1) en montrant que cette condition se trouve satisfaite par toute fonction absolument continue d'une fonction à variation bornée et seulement dans ce cas. Un autre résultat remarquable de Bary dans cet ordre d'idées (voir Bary [1]) est la caractérisation des fonctions absolument continues par la propriété (N) unie à la condition que la dérivée soit intégrable dans l'ensemble de tous les points où elle existe et n'est pas négative.

S. Hartman et *W. Nitka*

— et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), p. 127-131*.

Ce travail concerne le problème suivant:

(*) Etant donné un ensemble E de puissance du continu, existe-t-il une mesure finie, définie dans le corps $S(E)$ de tous les sous-ensembles de E et s'annulant pour tous ceux qui se composent d'un seul point sans être identiquement nulle?

* Voir p. 182.

Dans le texte original de ce travail, E est l'intervalle $0 < x < 1$, ce qui n'est pas essentiel. Au lieu de la mesure, c'est-à-dire d'une fonction d'ensemble dénombrablement additive et non-négative, il y sont considérées des fonctions d'ensemble dénombrablement additives et prenant des valeurs réelles quelconques (donc aussi négatives), ce qui n'est non plus une généralisation essentielle, vu l'existence de la décomposition de Hahn.

C'est la solution négative du problème (*) ayant recours à l'hypothèse du continu (théorème I) qui est le résultat principal du travail. Cette hypothèse y intervient notamment dans la construction d'une suite double singulière $\{A_j^i\}$ de sous-ensembles de E (théorème II) qui sera dite ici *décomposition de Banach et Kuratowski*. L'existence d'une pareille décomposition entraîne la réponse négative au problème (*) déjà sans l'hypothèse du continu.

Le théorème II sur l'existence d'une décomposition de Banach et Kuratowski peut être formulé dans le langage de l'algèbre de Boole comme il suit (cf. Sikorski [7], p. 105):

1. Si $\overline{\overline{E}} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et I est un vrai idéal dénombrablement additif de sous-ensembles de E contenant tous les sous-ensembles composés d'un point, l'algèbre de Boole $S(E)/I$ (¹) n'est pas dénombrablement distributive au sens faible (²).

Or on a le théorème:

2. Si m est une mesure finie, définie dans un corps dénombrablement additif K de sous-ensembles de E et I est l'idéal composé de tous les sous-ensembles de E de mesure m nulle, l'algèbre de Boole K/I est dénombrablement distributive au sens faible.

Le théorème I du travail commenté résulte aussitôt des théorèmes 1 et 2. C'est la méthode dont se servirent les auteurs de ce travail sans employer le langage de l'algèbre de Boole. Le théorème 2 fut formulé explicitement plus tard par Horn et Tarski dans leur travail [1], mais il est contenu implicitement dans la démonstration du théorème I de Banach et Kuratowski et il en est, au fond, un extrait.

(¹) K étant un corps d'ensembles et I un idéal d'ensembles, K/I est le corps de Boole résultant de l'identification des ensembles appartenant à K qui ne diffèrent entre eux que par un ensemble appartenant à I.

(²) Un corps de Boole C dénombrablement additif est dit *dénombrablement distributif* lorsque

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \bigcup_{\{j_i\}}\bigcap_{i=1}^{\infty} a_{i,j_i}$$

pour toute suite double $\{a_{i,j}\}$ de ses éléments. C l'est dit *au sens faible*, lorsqu'on a cette égalité pour toute suite double $\{a_{i,j}\}$ telle que $a_{i,j} \subset a_{i,j+1}$.

On ne sait pas jusqu'à présent démontrer le théorème 1 en y remplaçant l'hypothèse $\overline{\overline{E}} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ par $\overline{\overline{E}} = 2^{\aleph_0}$ ou par $\overline{\overline{E}} = \aleph_1$. De même, on ne sait pas établir le théorème II sans faire intervenir l'hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Le problème d'affaiblir l'hypothèse du continu dans les théorèmes I et II fut l'objet de plusieurs publications.

Marczewski remarqua (voir Marczewski [2]) que la réponse négative à (*) résulte de l'existence d'un ensemble de Lusin (¹) de puissance du continu. L'hypothèse du continu implique l'existence d'un ensemble de Lusin, mais on ignore si l'implication réciproque est vraie. Sierpiński démontra (voir Sierpiński [10]; cf. aussi Sierpiński [7], p. 53) que l'existence d'un ensemble de Lusin implique (sans l'hypothèse du continu) celle d'une décomposition de Banach et Kuratowski dans un E arbitraire de puissance du continu. Kuratowski montra (voir Kuratowski [4]) que l'existence d'un ensemble de Lusin équivaut à celle d'une modification de cette décomposition. Braun et Sierpiński établirent (voir Braun et Sierpiński [1]) l'équivalence entre l'hypothèse du continu et l'existence de la décomposition suivante de tout ensemble E de puissance du continu (x et y parcourant l'ensemble R de tous les nombres réels):

$$E = \bigcup_{x\in R} B_x^i \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots$$

où $B_x^i \cap B_y^i = 0$ pour $x \neq y$ et l'ensemble $E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{x_i}^i$ est au plus dénombrable quelle que soit la suite $\{x_i\}$ de nombres réels. L'existence d'une telle décomposition de E entraîne aussitôt celle d'une décomposition $\{A_j^i\}$ de Banach et Kuratowski en posant

$$A_j^i = \begin{cases} E \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} B_k^i & \text{pour} \quad j = 1, \\ B_j^i & \text{pour} \quad j = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Sierpiński montra (voir Sierpiński [13]) que l'existence d'une décomposition de Banach et Kuratowski dans tout E de puissance du continu résulte de la conséquence suivante de l'hypothèse du continu: il existe une fonction définie dans un ensemble de puissance du continu de nombres réels qui est continue dans E, mais n'est uniformément continue dans aucun des sous-ensembles indénombrables de E. L'existence d'une telle fonction est également une conséquence de l'existence d'un ensemble de Lusin de puissance du continu. Sierpiński établit aussi (voir Sierpiński [7], p. 52-59, et [14], [3] et [10]) l'équivalence entre l'exis-

(¹) c'est-à-dire un ensemble indénombrable de nombres réels qui n'a qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble non-dense de ces nombres (voir Lusin [2]).

tence d'une décomposition de Banach et Kuratowski dans un ensemble E de puissance du continu et chacune des trois propositions suivantes:

(a) Il existe une suite de fonctions réelles de variable réelle qui ne converge uniformément dans aucun ensemble indénombrable de nombres réels.

(b) Il existe une suite double $\{f_{m,n}\}$ de fonctions réelles de variable réelle, telle que la limite $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{m,n}(x)$ existe pour tout m et tout x et que la limite $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ s'annule pour tout x, tandis que la limite $\lim\limits_{k\to\infty} f_{m_k,n_k}(x)$ ne s'annule qu'au plus pour une infinité dénombrable des x quelles que soient la suite $\{n_k\}$ de nombres naturels et la suite croissante $\{m_k\}$ de ces nombres.

(c) Il existe un ensemble C concentré (1) de puissance du continu de nombres réels.

Poprougénko consacra ses travaux (voir Poprużenko [1] et [2]) à l'étude des problèmes se rattachant à la proposition (a) et à la décomposition de Banach et Kuratowski.

Rangeons les termes A_j^i d'une telle décomposition en une suite simple $\{A_n\}$. Cette suite a les propriétés que voici:

μ étant une mesure extérieure de Carathéodory, définie dans $S(E)$, il existe un n naturel et tel que A_n n'appartient pas au corps des ensembles mesurables par μ;

K étant le plus petit corps dénombrablement additif qui contient tous les A_n, toute mesure définie dans K et s'annulant pour tous les atomes de ce corps s'annule identiquement.

L'existence d'une décomposition de Banach et Kuratowski dans un ensemble E indénombrable implique l'existence d'un ensemble indénombrable C de nombres réels de *mesure absolue nulle*, c'est-à-dire tel que, pour toute mesure m définie dans le corps des ensembles boréliens de nombres réels, il existe un ensemble borélien B contenant C et pour lequel $m(B) = 0$.

La plus forte généralisation du théorème I est due à Ulam (voir Ulam [2]) qui montra que l'hypothèse du continu peut être remplacée dans l'énoncé de ce théorème par une hypothèse plus faible, à savoir que le nombre $2^{\aleph_0}$ est inférieur au premier aleph inaccessible au sens large. Il montra en particulier (sans d'autres hypothèses supplémentaires) que toute mesure définie dans le corps de tous les sous-ensembles d'un ensemble de puissance $\aleph_1$ et s'annulant pour tout sous-ensemble qui se réduit à un point est nulle identiquement — résultat que Sierpiński et

(1) c'est-à-dire contenant un sous-ensemble C_0 tel que, pour tout sur-ensemble ouvert G de C_0, l'ensemble $E\setminus G$ est au plus dénombrable (cf. Besicovitch [1]).

Szpilrajn (Marczewski) établirent dans [1] par une autre voie, à savoir en le déduisant des théorèmes de Hausdorff (voir Hausdorff [3]) sur l'existence de certaines suites transfinies d'ensembles boréliens.

Le problème analogue à (*) pour les ensembles E de puissance quelconque est envisagé dans le commentaire au travail *[30]* de Banach (voir ce volume, p. 338) où Banach résolut ce problème par une construction analogue à la décomposition de Banach et Kuratowski, mais adaptée aux puissances plus élevées. Cette construction s'avéra utile aussi dans la théorie des algèbres de Boole (voir Sikorski [8], p. 130). C'est à l'aide de cette construction que Traczyk (voir Traczyk [1]) résolut par un bel exemple un problème concernant les ainsi dites complétions des algèbres de Boole.

Il est à noter qu'en remplaçant dans le problème (*) „mesure" par „fonction additive d'ensemble", la réponse devient affirmative: quel que soit l'ensemble E, il existe une fonction additive, définie pour tous les sous-ensembles de E, prenant exactement deux valeurs, 0 et 1, et s'annulant pour tout ensemble qui se réduit à un point (voir Ulam [1] et Tarski [2]).

R. Sikorski

Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, Studia Mathematica 2 (1930), p. 207-220*.

Bemerkung zu der Arbeit: „Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen", ibidem, p. 251.

Les deux publications forment un tout, la seconde n'apportant qu'une correction à deux théorèmes de la première.

D'après un théorème dû à Sidon (voir Sidon [1] et [2]), si une fonction bornée mesurable possède la série de Fourier de la forme

$$(*)\qquad \frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos k_n t+\beta_n\sin k_n t)\quad \text{où}\quad \frac{k_n+1}{k_n}>k>1,$$

cette série est absolument convergente (voir aussi la monographie [6] de Zygmund, volume I, p. 247). D'après un autre théorème, dû à Zygmund [4] (p. 138), si une fonction intégrable possède la série de Fourier de la forme (*), cette fonction est intégrable avec une puissance positive arbitraire (voir aussi Sidon [8], corollaire et théorème II, p. 486).

* Voir p. 187.

Ces deux théorèmes furent le point de départ du travail de Banach, qui y établit, en s'appuyant sur eux, deux théorèmes suivants, concernant le cas où $k_{n+1}/k_n > k > 1$:

1. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+\beta_n^2)$ converge, il existe une fonction $x(t)$ continue et telle que l'on a les égalités $a_{k_n} = a_n$ et $b_{k_n} = \beta_n$.

2. Si les suites $\{a_n\}$ et $\{\beta_n\}$ tendent à zéro, il existe une fonction $x(t)$ intégrable et satisfaisant aux mêmes égalités.

Ici et dorénavant, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $x(t)$ relatifs au système trigonométrique. La démonstration de 1 et 2 est précédée par celle de l'équivalence de certaines trois propriétés des systèmes orthogonaux assujettis à des hypothèses convenablement choisies. Cette équivalence y est établie à l'aide des méthodes de l'analyse fonctionnelle, à savoir en appliquant les théorèmes sur les opérations conjuguées (voir [*23*], p. 236-238, lemme 9 et théorèmes 5-7; voir aussi [*38*], p. 99 et 100). Cette équivalence implique entre autres que le théorème précité de Zygmund entraîne 1 et que celui de Sidon entraîne 2. Au moyen des théorèmes 1 et 2, Banach fut à même de montrer sans peine et d'une façon élémentaire que

a. il existe une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres positifs convergeant vers 0 et une fonction $x(t)$ continue pour laquelle la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^{2-\varepsilon_n}+|b_n|^{2-\varepsilon_n}) \tag{i}$$

diverge (voir le travail commenté, p. 188);

b. il existe une suite $\{\lambda_n\}$ de nombres divergeant vers $+\infty$ et une fonction $x(t)$ intégrable pour laquelle la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^{\lambda_n}+|b_n|^{\lambda_n}) \tag{ii}$$

diverge (ibidem, p. 189).

Le théorème a. est une généralisation d'un théorème de Carleman (voir Carleman [1], p. 378) d'après lequel il existe une fonction $x(t)$ continue et telle que la série (i) diverge pour tout $\varepsilon > 0$; on appelle *singularité de Carleman* cette propriété de la fonction $x(t)$.

Le théorème b. est une généralisation d'un théorème d'Orlicz sur les systèmes orthogonaux (voir Orlicz [1], p. 30, théorème 15) qui entraîne en particulier pour le système trigonométrique l'existence d'une fonction $x(t)$ intégrable et telle que la série (ii) diverge pour tout $\lambda > 0$.

Sidon publia plus tard (voir Sidon [8], p. 477) une démonstration du théorème 2 en procédant par construction et sans recourir à l'analyse fonctionnelle. Ensuite, Webber (voir Webber [1], p. 325, théorème I) généralisa le théorème 2 en montrant que si $\lambda_n/\log n$ tend à zéro, il existe une fonction $x(t)$ intégrable et telle que la série (ii) diverge, tandis que si $\lambda_n/\log n > k > 0$ pour $n = 1, 2, \ldots,$ une telle fonction $x(t)$ n'existe pas. La démonstration de Webber procède également par construction et s'appuie sur certains résultats de Young. Une simple démonstration constructive du théorème 2 est à trouver dans la monographie [6] de Zygmund, volume II, p. 131, 7.1, ii.

Quant aux cas particuliers des théorèmes 1 et 2, il y eut, outre le théorème précité de Carleman, certains résultats de Gronwall, de Verblunsky et de Sidon qui méritent d'être mentionnés.

Gronwall montra (voir Gronwall [1], p. 320) que si $\varphi(u)$ tend à l'infini avec u, il existe une fonction $x(t)$ continue et telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cdot\varphi[(a_n^2+b_n^2)^{-1/2}]$$

diverge. Ce théorème de Gronwall est une généralisation de celui de Carleman; il résulte aussitôt du théorème 1 (voir Zygmund [6], volume II, p. 132, 7.5). La démonstration de Gronwall est basée sur un lemme numérique de Hardy et Littlewood. Les recherches de Gronwall furent poursuivies par Paley (voir Paley [1], en particulier p. 126, théorème I).

Verblunsky généralisa (voir Verblunsky [1], p. 33 et 42, théorème V) au cas du système orthogonal borné le théorème d'après lequel il existe une suite $\{k_n\}$ d'indices telle que si la série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+\beta_n^2)$ converge, il existe une fonction $x(t)$ bornée pour laquelle on a les égalités $a_{k_n} = a_n$ et $b_{k_n} = \beta_n$. La suite $\{k_n\}$ fut définie par induction.

Sidon établit, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute suite $\{k_n\}$ d'indices, l'existence d'une fonction $x(t)$ continue et telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_{k_n}|^{2-\varepsilon}+|b_{k_n}|^{2-\varepsilon})$$

diverge. Tous ces théorèmes furent démontrés par construction. Enfin Sidon démontra par construction (voir Sidon [7], théorème II, p. 538) le théorème 1 et le compléta dans une annexe par la généralisation suivante: si la suite $\{k_n\}$ d'indices est telle que le nombre de termes égaux dans chacune des suites doubles $\{k_{mn}\}$ et $\{k'_{mn}\}$ définies par les conditions

$$k_{11} = 2k_1, \quad \ldots, \quad k_{nn} = 2k_n, \quad k_{12} = k_1+k_2, \quad \ldots, \quad k_{mn} = k_m+k_n,$$

$$\text{et} \quad k'_{12} = k_2-k_1, \quad \ldots, \quad k'_{mn} = k_n-k_m \quad \text{pour } n > m$$

est borné (indépendamment de m et n) et la série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+\beta_n^2)$ converge, il existe une fonction $x(t)$ continue et satisfaisant aux égalités $a_{k_n} = a_n$ et $b_{k_n} = \beta_n$. Cette généralisation est essentielle, car l'hypothèse sur la suite $\{k_n\}$ est réalisée non seulement lorsque $k_{n+1}/k_n > k > 1$, mais aussi pour certaines suites où $k_n = O(n^4)$ par exemple.

Une esquisse de la démonstration constructive du théorème 1 se trouve également dans la monographie [6] de Zygmund, volume II, p. 131, 7.1, i. Contrairement à la démonstration du théorème 2, elle y est longue et compliquée.

Une nouvelle démonstration constructive du théorème 1, bien plus succinte, est due à Salem et Zygmund [1]. Elle repose sur un raisonnement semblable à celui de la démonstration du théorème 2 par Sidon, à savoir sur l'emploi des produits analogues à ceux de Riesz

$$\prod_{n=1}^{\nu}(1+a_n\cos k_n t+\beta_n\sin k_n t).$$

L'équivalence entre certaines propriétés des séries orthogonales (voir aussi Kaczmarz et Steinhaus [1], p. 250-255, théorèmes [734]-[737]) fut également le point de départ des recherches ultérieures, entre autres, de celles de Hewitt et Zuckerman (voir Hewitt et Zuckerman [1], p. 2, théorème 2.1 et autres) et de celles de Rudin (voir Rudin [1], partie V), qui s'occupa des équivalences pour les exposants finis $p > 1$ (cf. aussi Semadeni [1], p. 177, lemme 5).

J. Musielak

Über additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen, Fundamenta Mathematicae 15 (1930), p. 97-101*.

Ce travail contient une généralisation des résultats de Banach et Kuratowski (voir Kuratowski [5]) et concerne le problème qui ne diffère de (*) formulé ici dans le commentaire au travail [*24*] de Banach (voir ce volume, p. 331) que par la puissance arbitraire m de l'ensemble E au lieu de celle du continu, la mesure étant entendue comme une fonction non-négative et dénombrablement additive.

Le théorème fondamental de cette publication est qu'en admettant l'hypothèse du continu généralisée, la réponse au problème est négative lorsque le nombre cardinal m est inférieur aux alephs inaccessibles.

* Voir p. 200.

La démonstration s'appuie sur l'existence d'une décomposition singulière, analogue à celle envisagée dans le travail précité de Banach et Kuratowski. Un élément essentiellement nouveau de la démonstration est représenté par le mode de raisonnement dans le cas où le nombre m n'est pas régulier. L'artifice employé par Banach dans cette démonstration fut appliqué dans des généralisations ultérieures dont il sera question plus loin.

Un pas en avant fait dans le domaine du problème considéré est dû à Ulam (voir Ulam [2]), qui montra (sans avoir recours à aucune hypothèse générale sur les nombres cardinaux) que la réponse est négative pour les nombres cardinaux m inférieurs au premier aleph inaccessible au sens large. La décomposition singulière de l'ensemble E sur laquelle la démonstration est basée sera dite ici *décomposition d'Ulam*. Elle diffère essentiellement de celle de Banach et Kuratowski (cf. Kuratowski [5]). Ulam montra en particulier que la réponse est négative pour la puissance du continu, cette puissance étant supposée inférieure aux alephs inaccessibles. Il y montra en outre que si la réponse est négative pour $m = 2^{\aleph_0}$, elle l'est aussi pour tout nombre cardinal m inférieur aux alephs inaccessibles au sens strict. Pour établir ce théorème, Ulam considérait à part le problème des mesures ne prenant que deux valeurs, 0 et 1, et il prouva (sans aucune hypothèse supplémentaire) que la réponse est négative également pour de telles mesures lorsque le nombre cardinal m est inférieur aux alephs inaccessibles au sens strict. Enfin, il y remarqua que le théorème suivant se présente pour les ensembles E de puissance $\aleph_1$:

Tous les sous-ensembles de E étant divisés en deux classes, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, de façon qu'il y ait dans $\boldsymbol{M}$ au plus une infinité dénombrable de sous-ensembles disjoints, il existe dans $\boldsymbol{N}$ une suite $\{A_n\}$ telle que l'ensemble $E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ est au plus dénombrable.

Sierpiński montra (voir Sierpiński [6]; cf. aussi [7], p. 152-159) que ce théorème subsiste pour tous les ensembles E de puissance inférieure aux alephs inaccessibles au sens large. C'est une généralisation du théorème d'Ulam sur l'inexistence de la mesure (pour le voir, on n'a qu'à désigner par $\boldsymbol{M}$ la classe des sous-ensembles de E de mesure positive et par $\boldsymbol{N}$ la classe de ceux de mesure nulle). Ce résultat de Sierpiński fut appliqué par Ulam (voir Ulam [3]) et par Sierpiński (voir Sierpiński [8] et [9]) pour démontrer l'existence de décompositions singulières de certains ensembles de nombres réels en une infinité indénombrable d'ensembles de II^me catégorie ou d'ensembles non-mesurables (voir aussi Kuratowski [5], p. 53, 54 et 59).

Maintes généralisations des théorèmes établis dans le travail [2] d'Ulam furent trouvées par Tarski [3]. En voici deux exemples (sous une forme plus restreinte que leurs énoncés originaux):

Le nombre cardinal m étant inférieur aux alephs inaccessibles au sens large, tout idéal dénombrablement additif et dénombrablement saturé dans un corps m-additif d'ensembles est m-additif.

Le nombre cardinal m étant inférieur aux alephs inaccessibles au sens strict, tout idéal premier dénombrablement additif dans un corps m-additif d'ensembles est m-additif.

D'autres généralisations dans le même ordre d'idées sont dues à Smith et Tarski [1]. En voici une (également dans une forme plus restreinte que son énoncé original):

Le nombre cardinal m étant inférieur aux alephs inaccessibles au sens large, si l'idéal I du corps de tous les sous-ensembles de E de puissance ne dépassant pas m satisfait aux conditions

(a) tout sous-ensemble de E composé d'un seul point appartient à I,

(b) toute famille de sous-ensembles de E qui n'appartiennent pas à I est au plus dénombrable,

E est somme d'une suite au plus dénombrable d'appartenant à I.

Dans les généralisations précitées de Sierpiński, Smith et Tarski des théorèmes de Banach, Kuratowski et Ulam, l'hypothèse de l'existence d'une mesure est remplacée par la condition qu'une certaine classe de sous-ensembles de E ne contienne que tout au plus une infinité dénombrable d'ensembles disjoints. La généralisation de Mazur (voir Mazur [2]) dont il sera question à présent prit une voie différente. Pour ne pas rappeler ici les définitions des termes intervenant dans l'énoncé de son théorème, nous n'en citons que le corollaire qui est une généralisation du théorème de Banach et de celui d'Ulam.

Soit μ une fonction réelle d'ensemble, définie dans la classe de tous les sous-ensembles de E de puissance inférieure aux alephs inaccessibles au sens large. Admettons que cette fonction est séquentiellement continue, c'est-à-dire

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

où la convergence de la suite $\{A_n\}$ d'ensembles est entendue comme dans la théorie des ensembles. Alors cette fonction est concentrée dans un sous-ensemble au plus dénombrable (c'est-à-dire qu'il existe un $A_0 \subset E$ tel que $\mu(A) = \mu(A \cap A_0)$ pour tout $A \subset E$ et que $\overline{\overline{A}}_0 \leqslant \aleph_0$).

Mazur se servit de ce corollaire pour montrer que, sous certaines hypothèses, la continuité séquentielle des fonctions définies dans les produits cartésiens indénombrables en implique la continuité ordinaire (par entourages).

Une autre généralisation des théorèmes précités de Banach et d'Ulam, à savoir concernant les mesures, est due à Marczewski et Sikorski [1]. La voici:

E étant un espace métrique de puissance inférieur aux alephs inaccessibles au sens large (strict), toute mesure (mesure ne prenant que les valeurs 0 et 1) définie dans le corps des sous-ensembles boréliens de E est concentrée dans un sous-ensemble séparable (composé d'un seul point).

Katětov généralisa ce théorème aux espaces non-métriques (voir son travail [1]).

Toutes les généralisations envisagées font intervenir directement ou indirectement l'existence d'une décomposition d'Ulam. Seul le cas de mesures aux valeurs 0 et 1, de même que celui de propositions correspondantes dans lesquelles il n'est pas question de mesures, se laissent démontrer sans faire intervenir cette décomposition. On ignore si les théorèmes envisagés subsistent sans l'hypothèse que les puissances sont inférieures aux alephs inaccessibles.

Le problème discuté (*) prit naissance dans la théorie de l'intégrale et de la mesure. Sa version concernant les mesures aux valeurs 0 et 1 semblait d'abord n'en être qu'un sous-produit indirect et secondaire, mais elle se montra pratiquement plus importante pour les applications. C'est ainsi par exemple que l'existence des mesures aux valeurs 0 et 1 est actuellement un problème fondamental de la théorie des représentations des algèbres de Boole. Les applications des théorèmes d'Ulam [2] et de ceux de Marczewski et Sikorski [1] sont envisagées dans le travail [2] de Sikorski.

Le problème de l'existence des mesures aux valeurs 0 et 1 se présente parfois tout à fait inopinément dans différents domaines des mathématiques, bien éloignés en apparence l'un de l'autre. Notons à titre d'exemple le problème de la forme des fonctionnelles linéaires dans l'espace de toutes les fonctions réelles définies dans un ensemble pourvu de la notion usuelle de convergence (voir Mazur [1]), celui de la forme des fonctionnelles à la fois additives et multiplicatives dans l'anneau de ces fonctions, celui de la forme des fonctionnelles à la fois additives et multiplicatives dans les produits cartésiens d'algèbres linéaires (voir Białynicki-Birula et Żelazko [1]) et certains problèmes concernant les produits de groupes (voir Ehrenfeucht et Łoś [1], Łoś [2]).

Le problème de l'existence des mesures aux valeurs 0 et 1 dans le corps de tous les sous-ensembles d'un ensemble se présente aussi dans les recherches portant sur les fondements des mathématiques. Pour simplifier les énoncés des théorèmes qui suivent, convenons de dire qu'un nombre cardinal m est *mesurable* lorsqu'il existe une mesure aux valeurs 0 et 1 dans le corps de tous les sous-ensembles de puissance m de E; en cas contraire, le nombre cardinal m sera dit non-mesurable.

Scott établit (voir Scott [1]) un théorème remarquable d'après lequel l'existence d'un ensemble E dont la puissance est un nombre cardinal mesurable entraîne celle des ensembles non-constructibles au sens de

Gödel. Rowbottom généralisa ce résultat (dans un travail non publié) en montrant que l'existence d'un nombre cardinal mesurable implique que la famille de tous les ensembles constructibles de nombres naturels est dénombrable. Gaifman [1] montra qu'elle implique, plus généralement encore, que a étant un nombre cardinal infini arbitraire, la famille de tous les ensembles constructibles de nombres ordinaux précédant a est de puissance au plus égale à a.

Les ensembles constructibles jouent, comme on sait, un rôle important dans la démonstration de la compatibilité de l'hypothèse du continu. Le théorème précité de Scott montre que la démonstration de Gödel [1] de la compatibilité de l'hypothèse du continu généralisée ne s'applique pas à la théorie des ensembles enrichie par l'axiome (P) de l'existence des nombres cardinaux mesurables. Plus récemment, Přikry [1] montra que la compatibilité des axiomes de la théorie des ensembles et de l'axiome (P) entraîne celle du même système d'axiomes augmenté en outre par la proposition: le plus petit aleph mesurable $\aleph_\vartheta$ satisfait à l'équation $2^{\aleph_\vartheta} = \aleph_{\vartheta+1}$. D'après certains résultats non publiés de Solovay, la compatibilité de l'axiome (P) implique que l'hypothèse du continu est à la fois indépendante de (P) et compatible avec (P).

Tous les nombres cardinaux inférieurs au premier aleph inaccessible au sens strict étant d'après le résultat précité d'Ulam (voir Ulam [2]) non-mesurables, le problème s'imposait s'il en est de même, ou non, de cet aleph. La solution se montra fort difficile et ne fut trouvée qu'en 1960 par Tarski [10], qui montra, en se servant de certains théorèmes de Hanf [2], que le premier aleph inaccessible au sens strict est également non-mesurable. Les résultats de Tarski permirent de se rendre compte de l'immensité du premier nombre cardinal mesurable (si ce nombre existe). Premières démonstrations de Tarski furent métamathématiques, mais Keisler et Tarski établirent bientôt (voir Keisler et Tarski [1]), sans recourir aux moyens métamathématiques, diverses propriétés des nombres mesurables et un théorème plus général sur la grandeur du premier nombre cardinal mesurable (supposé existant). Ce théorème mérite d'être envisagé ici de plus près, tant il est instructif pour qui veut s'imaginer l'extrême immensité du nombre en question.

Keisler et Tarski définirent dans leur travail [1] certaines opérations conduisant à partir des ensembles de nombres cardinaux à d'autres ensembles (plus vastes) de tels nombres et montrèrent que ces opérations, appliquées aux ensembles arbitraires de nombres non-mesurables, ne conduisent jamais au-delà d'eux. Il y appartient l'opération L qui, appliquée à un ensemble X de nombres cardinaux, conduit à l'ensemble $L(X)$ composé d'alephs $\mathfrak{m}$ dont les indices sont des nombres-limites ordinaux et pour lesquels il existe dans X un $\mathfrak{n}$ tel que tous les nombres cardinaux

entre $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{m}$ appartiennent aussi à X. En particulier, si l'on prend pour X l'ensemble AC des alephs qui ne sont pas inaccessibles au sens large et si l'on range en une suite croissante $\Theta_0, \Theta_1, \ldots$ les alephs n'appartenant pas à AC, donc qui sont inaccessibles au sens large, l'ensemble $L(AC)$ se compose de tous les Θ_ξ tels que $\xi < \Theta_\xi$. Plus puissante que L, est l'opération M définie comme suit: $M(X)$ est l'ensemble des alephs $\mathfrak{m}$ aux indices qui sont des nombres-limites ordinaux et pour lesquels il existe un sous-ensemble Y de X tel que $\mathfrak{m} = \sup\{n: n \in Y\}$ et que l'ensemble $Y \cup \{\mathfrak{m}\}$ est fermé dans l'espace topologique ordonné des alephs. Si X se compose par exemple d'alephs aux indices n'étant pas des nombres-limites et d'alephs singuliers, le premier aleph n'appartenant pas à $M(X)$ est tel que toute suite croissante de nombres cardinaux qui converge vers lui contient, parmi ses termes, des nombres inaccessibles. Les opérations L et M sont en rapport avec la classification des nombres inaccessibles proposée par Mahlo déjà en 1911 (voir son travail [1]).

Or Keisler et Tarski montrèrent que non seulement les opérations L et M, mais aussi leur itérations transfinies $L^{(\nu)}$ et $M^{(\nu)}$, de même que les opérations

$$L^{(\infty)} = \bigcup_\nu L^{(\nu)} \quad \text{et} \quad M^{(\infty)} = \bigcup_\nu M^{(\nu)}$$

où la sommation s'étend sur tous les ν ordinaux, ne conduisent à partir des ensembles de nombres non-mesurables qu'à ceux de nombres non-mesurables. En particulier, les ensembles $L^{(\infty)}(AC)$ et $M^{(\infty)}(AC)$ ne se composent que de nombres non-mesurables et il en est de même pour les itérations des opérations $L^{(\infty)}$ et $M^{(\infty)}$.

Il suffit d'ailleurs d'établir ces propriétés pour l'opération M car $L^{(\infty)}(X) \subset M(X)$ quel que soit X.

On ne connaît à l'heure actuelle aucune raison qui prévaille en faveur da la possibilité d'admettre, sans risquer une contradiction, l'existence de nombres mesurables, pas plus qu'en faveur de l'incompatibilité de l'admettre.

A. Mostowski et *R. Sikorski*

Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), p. 395-398*.

Depuis 1929 environ, datent les recherches se proposant d'étendre la théorie descriptive des fonctions réelles de variable réelle, créée et dé-

---

* Voir p. 204.

veloppée surtout par Baire, Borel et Lebesgue, aux fonctions dont les variables et les valeurs appartiennent à des espaces topologiques plus généraux. Beaucoup de théorèmes sur les ensembles et les fonctions, concernant la notion de catégorie, les classes de Baire et autres, se laissèrent étendre aisément en admettant que les espaces considérés sont séparables. C'est ainsi par exemple qu'il fut facile de montrer que, dans un espace métrique séparable, tout ensemble qui est de I^re catégorie en chacun de ses points est de I^re catégorie tout court.

Par un raisonnement simple et élégant, Banach démontra ce théorème pour les espaces métriques quelconques, sans l'hypothèse de séparabilité. Sa démonstration se laisse transmettre aux espaces T_1, c'est-à-dire dans lesquels tous les ensembles se réduisant à un point sont fermés (voir Kuratowski [5], p. 49). Ce résultat de Banach fut d'importance capitale pour les recherches dont il est question (voir Kuratowski [2] et [3]; aussi Marczewski [1]) et dont les résultats trouvèrent place, entre autres, dans la monographie précitée de Kuratowski.

Un autre pas important en vue de se débarasser des hypothèses de séparabilité est dû à Montgomery (voir son travail [1] et Kuratowski [5], p. 264). L'application des moyens plus récents, tels que la notion d'espace paracompact, le théorème de A. H. Stone d'après lequel tout espace métrique est paracompact et le critère de métrisabilité de Nagata-Smirnov, permit (voir Engelking [1]) de simplifier les raisonnements assez compliqués de Montgomery.

En revenant sur la démonstration de Banach, il est à remarquer que pour affranchir cette démonstration non seulement de l'hypothèse de séparabilité, mais aussi de celle que l'espace est métrique, on n'a qu'à remplacer dans le raisonnement de Banach le mot „sphère" par les mots „ensemble ouvert"; le théorème se trouve alors démontré pour tout espace T_1. Plus encore, en modifiant légèrement cette démonstration, on arrive au théorème suivant qui est bien plus général: E étant un espace T_1, soit $\{X_\iota\}$ une famille quelconque d'ensembles situés dans E et ouverts dans leur somme $S = \bigcup_\iota X_\iota$; alors, si chacun des X_ι est de I^re catégorie, la somme S l'est également (voir Kuratowski [5], p. 49).

Kuratowski déduisit (voir son travail [3]) du théorème de Banach deux conséquences importantes sur la propriété de Baire.

D'après la première de ces conséquences, E étant un espace T_1, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $A \subset E$ ait la propriété de Baire est qu'il soit de la forme $A = (G \setminus P_1) \cup P_2$ où G est un ensemble ouvert et P_1 et P_2 sont des ensembles de I^re catégorie. En définissant la propriété de Baire par cette condition, on peut démontrer d'une façon très brève que les ensembles ayant cette propriété forment un corps (Kuratowski [5], p. 55).

D'après la seconde des conséquences en question, pour qu'une fonction f définie dans un espace métrique E et dont les valeurs sont des points d'un espace métrique séparable F ait la propriété de Baire (c'est-à- dire que la fonction partielle $f|E \setminus P$ soit continue pour un ensemble $P \subset E$ de I^re catégorie), il faut et il suffit que tout l'image réciproque $f^{-1}(U)$ où U est ouvert dans F ait la propriété de Baire. En définissant par cette condition la propriété de Baire des fonctions, on peut développer d'une manière élégante la théorie de ces fonctions et faire ressortir l'analogie entre elles et les fonctions mesurables (Kuratowski, op. cit., p. 306).

R. Engelking et *E. Marczewski*

Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen, Fundamenta Mathematicae 17 (1931), p. 283-295*.

Ce travail de Banach appartient à la série des recherches mentionnées au début du commentaire à sa publication [*31*] (voir ce volume, p. 343).

La fonction $y = f(x)$ transformant un espace métrique X en un espace métrique Y est dite de classe L^ξ lorsque l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de tout sous-ensemble ouvert U de Y est de ξ-ème classe borélienne additive (voir Kuratowski [5], p. 282). Appelons les classes L^ξ *classes de Borel.*

Désignons par B^0 la classe de toutes les fonctions f continues et posons pour tout $\xi > 0$

$$B^\xi = \{f : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ où } f_n \in B^{\xi_n} \text{ et } \xi_n < \xi\}.$$

Appelons les classes B^ξ *classes de Baire.*

On a $B^\xi \subset L^\xi$ pour tout ξ (voir *ibidem*, p. 293) et, si l'espace Y n'est pas connexe, $B^\xi \neq L^\xi$ (voir Hausdorff [4], p. 390). Or Kuratowski [3] (p. 281) montra que tout espace métrique Y peut être plongé topologiquement dans un espace métrique Y' tel que $B^\xi = L^\xi$ pour toute fonction f transformant X en Y'.

Banach introduisit dans le travail commenté d'autres classes de fonctions f, à savoir les classes b^ξ définies comme il suit: posons $b^1 = L^1$ et pour tout $\xi > 1$

$$b^\xi = \{f : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ où } f_n \in b^{\xi_n} \text{ et } \xi_n < \xi\}.$$

D'après le théorème 1 de ce travail, si l'espace Y est séparable, on a $b^\xi = L^\xi$ aussi pour tout $\xi > 1$ et, d'après le théorème 2, si l'espace Y est en outre connexe par arcs, on a $B^\xi = L^\xi$ pour tout $\xi > 1$. D'après

---

* Voir p. 207.

une remarque de Banach (voir l'article en question, p. 209), on a $B^1 = L^1$ pour certains espaces vectoriels, en particulier pour ceux de type (B), appelés aujourd'hui universellement *espaces de Banach*. On ignore si la dernière égalité subsiste pour les espaces connexes par arcs, mais non-séparables et, plus généralement, pour les espaces Y connexes. Notons que cette égalité entraînerait aussitôt en vertu du théorème 1 que si l'espace Y est séparable, on a $B^\xi = L^\xi$ pour tout ξ.

Rolewicz [1] montra que, l'espace Y étant supposé séparable et connexe par arcs, la condition suffisante pour avoir l'égalité $B^1 = L^1$ est que toute fonction f qui est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe B^1 soit également de cette classe; en d'autres termes, que la classe B^1 de fonctions soit fermée relativement à leur convergence uniforme. Il fut démontré (voir ibidem) que cette condition suffisante est satisfaite en particulier dans les espaces Y rétractifs, c'est-à-dire que toute sphère (intérieur et surface) de rayon suffisamment petit et située dans Y est un rétracte de Y. Or, comme le montra Borsuk, la classe de ces espaces est assez étroite: même parmi les espaces localement connexes par arcs, il y a des Y qui ne sont pas rétractifs.

S. Rolewicz

Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Mathematica 3 (1931), p. 174-179*.

Ce travail contient une démonstration fort simple que l'ensemble des fonctions n'ayant de dérivée finie de droite pour aucun t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ est résiduel dans l'espace métrique de toutes les fonctions continues $x(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ avec la distance naturelle

$$d(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

Le même théorème fut établi un peu plus tôt par Mazurkiewicz [1] (en réponse à une question posée par Steinhaus); il peut servir de démonstration qu'il existe des fonctions continues non différentiables en aucun point.

Le théorème de Mazurkiewicz et Banach fut une des premières applications de ce qu'on appelle *la méthode de catégorie* pour établir les théorèmes d'existence. Cette méthode consiste, comme pour l'existence de fonctions continues sans dérivée, dans le choix convenable d'un espace

* Voir p. 218.

métrique complet E et dans la démonstration que l'ensemble des points ayant une certaine propriété y est résiduel, donc sûrement pas vide (ce qui prouve l'existence des points qui ont cette propriété).

Les travaux en question de Mazurkiewicz et de Banach inaugurèrent une série des recherches des mathématiciens polonais où la méthode de catégorie, appliquée en diverses variantes, fut employée pour démontrer l'existence des fonctions continues ayant diverses singularités (voir les travaux d'Auerbach et Banach [*35*], commenté ici p. 346, de Kaczmarz [1], d'Orlicz [3] et [4], de Tarnawski [1]-[3]).

Au même cycle de problèmes vint se rattacher le résultat remarquable de Saks (voir Saks [5]) d'après lequel l'ensemble des fonctions non différentiables au sens de Besicovitch, c'est-à-dire n'ayant en aucun point de dérivée ni à droite, ni à gauche, ni finie, ni infinie, est de Ire catégorie dans l'espace des fonctions continues, par opposition à l'ensemble des fonctions non différentiables au sens ordinaire, c'est-à-dire n'ayant de dérivée finie en aucun point.

Les résultats de Banach et de Saks furent développés par Jarník (voir par exemple ses travaux [1] et [2]).

Comme on sait, la méthode de catégorie trouva aussi de nombreuses applications dans d'autres disciplines des mathématiques, notamment dans la topologie, dans la théorie des fonctions analytiques et dans l'analyse fonctionnelle.

W. Orlicz

H. Auerbach et —, *Über die Höldersche Bedingung*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 180-184*.

Les résultats établis par Banach dans son travail [*34*] (ce volume, p. 218 et le commentaire p. 348) sont appliqués dans le travail faisant l'objet du présent commentaire pour démontrer que l'ensemble des fonctions continues $x(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ telles que

$$\overline{\lim_{h \to +0}} \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{\omega(h)} \right| = +\infty$$

pour tout t y est résiduel. Ici ω est une fonction quelconque telle que $h > 0$ entraîne $\omega(h) > 0$ et que $h \to +0$ entraîne $\omega(h) \to 0$. Le théorème précité de Mazurkiewicz en est un cas particulier pour $\omega(h) = h$.

* Voir p. 223.

Plus généralement, en considérant l'espace H^{α} où $0 < \alpha \leqslant 1$ des fonctions satisfaisant à la condition de Hölder $|x(t+h)-x(t)| \leqslant ch^{\alpha}$, il y est démontré que excepté un ensemble de I^re^ catégorie de valeurs de t, on a

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h^{\beta}}\right| = +\infty$$

pour tout t et tout $\beta > \alpha$. Il en résulte en particulier que l'ensemble des fonctions non différentiables nulle part et satisfaisant à la condition de Hölder avec un exposant $\alpha < 1$ donné est résiduel dans l'espace C.

Un problème assez proche est celui de certaines intégrales singulières. Kaczmarz [1] démontra que celles des modules du type de Dini divergent partout pour les fonctions continues excepté pour un ensemble de ces fonctions qui est de I^re^ catégorie dans l'espace C.

Parmi des travaux ultérieurs appartenant à cet ordre d'idées, sont à noter avant tout ceux d'Orlicz [4], de Tarnawski [2] et [3] et de Saks [5], mentionnés dans le commentaire au travail [*34*] de Banach (voir ce volume, p. 348).

Z. Zahorski

Sur les transformations biunivoques, Fundamenta Mathematicae 19 (1932), p. 10-16*.

Les constructions qui constituent le procédé de démonstration des théorèmes 1 et 2 de ce travail furent soumises plus tard à des modifications et généralisations dans les travaux de Halmos et von Neumann [1], lemme 10, de Hulanicki [1] et de Sierpiński [5], [12] et [23]). Elles furent appliquées dans deux premiers de ces travaux à la théorie de la mesure.

Il y eut aussi des recherches apportant des théorèmes et constructions de tendance opposée. On y étudiait par exemple les ensembles presque disjoints de chacune de leur image de translation (voir Ruziewicz et Sierpiński [1] et Sierpiński [29]) ou bien on démontrait que $\aleph$ final de l'énoncé du théorème 1 ne peut pas y être remplacé par $\aleph_0$ (voir Trzeciakiewicz [1]), résultat qui fut redécouvert par P. Lax (voir Erdös [1], p. 646); cf. aussi Scott et Sonneborn [1].

Jan Mycielski

* Voir p. 228.

Sur les séries lacunaires, Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Série A, Année 1933, p. 149-154*.

Ce travail est consacré à l'étude des propriétés particulières des séries orthogonales lacunaires. Déjà Weierstrass attira l'attention sur les propriétés des séries exponentielles avec des lacunes en utilisant ces séries pour construire des séries non prolongeables par exemple. Puis, des recherches générales sur les séries lacunaires furent poursuivies, entre autres, par Borel, Hadamard et Ostrowski. Vu les rapports connus entre les séries exponentielles et les séries trigonométriques, il était naturel d'étudier les séries trigonométriques lacunaires. Banach s'en occupa aussi dans ses travaux antérieurs [*28*] et [*29*], mais à un point de vue différent de celui adopté dans le travail qui est l'objet du présent commentaire. Par contre, un point de vue analogue fut adopté par Zygmund (voir Zygmund [3] et [5]) qui démontra, entre autres, les théorèmes:

1° Si la somme des carrés des coefficients d'une série trigonométrique à grandes lacunes (c'est-à-dire où $n_{k+1}/n_k > q > 1$) est convergente, la somme de cette série est une fonction de classe L^p pour tout $p > 1$ (il y établit aussi un théorème plus général n'ayant pas d'analogue dans le travail de Banach).

2° Si la série de Fourier d'une fonction de classe L^r où $r \geqslant 1$ est à grandes lacunes, la somme des carrés de ses coefficients est convergente (par suite du théorème 1°, la fonction est donc de classe L^p pour tout $p \geqslant 1$).

Les principaux résultats du travail de Banach consistent dans les théorèmes suivants:

I. Il existe pour tout système orthonormal $x_n(t)$ une suite partielle $\bar{x}_n(t)$, que Banach appelle *suite lacunaire*, telle que la condition $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ entraîne la convergence de la série lacunaire $\sum_{n=1} a_n\bar{x}_n(t)$ suivant les moyennes intégrales en toute puissance $p \geqslant 1$.

II. Toute fonction $f \in h^q$ où $q > 1$ qui se laisse développer en une série lacunaire est de classe h^p pour tout $p \geqslant 1$.

C'est donc une propriété analogue à celle des séries trigonométriques à grandes lacunes.

Des généralisations considérables des résultats contenus dans ce travail de Banach sont à trouver dans la monographie [1] de Kaczmarz et Steinhaus. Ces auteurs y envisagent des systèmes orthogonaux lacunaires (dans un sens qui y est défini); en particulier, le système de Rademacher en est un. Or pour certains systèmes $x_n(t)$ lacunaires au sens

* Voir p. 234.

de Kaczmarz et Steinhaus, la suite $\bar{x}_n(t)$ lacunaire au sens de Banach coïncide avec la suite $x_n(t)$ toute entière.

De forts résultats concernant les séries trigonométriques, mais ne se rattachant pas directement au sujet de ce travail de Banach sont dus, entre autres, à Zygmund [3, 5], Kolmogoroff [1] et Szidon [1, 3, 5, 6, 8]; ils concernent la convergence en moyenne, la convergence presque partout et la convergence absolue. Parmi les résultats qui ont un certain rapport au sujet dont il est question, il est à noter un théorème de Wiener sur les séries trigonométriques à petites lacunes (c'est-à-dire où $n_{k+1}-n_k \to +\infty$ avec $k \to +\infty$). Suivant ce théorème, si le développement trigonométrique à petites lacunes d'une fonction $f \epsilon L^1$ est de classe L^2 sur un segment, on a $f \epsilon L^2$. Erdös montra que le théorème analogue pour L^p où $p > 2$ est en défaut et Turàn le prouva par des exemples effectifs pour $p > 6$. Plus récemment, ces exemples furent simplifiés par Knapowski et même déjà pour tout $p > 3$.

Z. Zahorski

Sur la mesure de Haar, note au livre [6] de Saks, p. 264-272; traduction russe *О мере Хаара*, Успехи Математических Наук, выпуск II, 1936, p. 161-167, et traduction anglaise *On Haar's measure*, note I to the book „Theory of the Integral" by S. Saks, Monografie Matematyczne VII, 1937, p. 314-319*.

La mesure invriante, introduite par Haar en 1932 dans les groupes topologiques (voir Haar [1]), devint une notion aussi fondamentale pour la théorie de ces groupes que la mesure de Lebesgue l'était pour l'analyse. Antérieurement, on connut des applications d'une mesure invariante aux groupes de Lie; elle joua également un rôle essentiel dans un théorème fort important pour la théorie des représentations, à savoir dans celui de Peter et Weyl [1]; Hurwitz [1] commença à l'appliquer déjà en 1894. La notion de mesure de Haar suscita donc d'emblée un vif intérêt, et plusieurs mathématiciens éminents consacrèrent leur travaux à cette notion. La note de Banach en fut le premier; il parut presque aussitôt après celui de Haar.

Le théorème de Haar sur l'existence d'une mesure invariante par rapport aux translations dans un groupe topologique fut établi sous l'hypothèse que ce groupe est un espace métrique, séparable et localement

* Voir p. 239.

compact (voir l'exemple 2 dans la note de Banach, p. 245). Banach généralisa ce théorème aux espaces ayant la même structure topologique, mais dans lesquels la congruence était définie axiomatiquement (dans l'exemple 1 de la même note, p. 244), ce qui est un cas essentiellement plus général que celui considéré par Haar. En particulier, déjà le théorème formulé dans l'exemple 1 précité implique celui de Haar, mais pas réciproquement. Notons à ce propos que la condition 4) en est satisfaite en particulier lorsque le groupe dont il s'agit dans l'exemple 1 se compose d'homéomorphies équicontinues.

L'hypothèse de séparabilité n'est pas essentielle dans la note de Banach: tous les raisonnements restent valables sans cette hypothèse si l'on y entend par compacité la bicompacité au lieu de la compacité habituelle (c'est-à-dire définie par la convergence de suites). Plus tard, le théorème de Haar fut généralisé aux groupes localement compacts quelconques (y compris les non-métrisables) et complété par le théorème sur l'unicité de la mesure de Haar (voir par exemple von Neumann [2], Halmos [1], chapitre XI, et Weil [1], § 7, où l'on trouve aussi une bibliographie).

L'idée directrice de toutes les démonstrations de l'existence de la mesure en question est au fond la même. La différence consiste dans le passage à la limite. Haar choisissait une suite partielle convergente et faisait un usage essentiel de l'hypothèse de séparabilité. Banach se servait de la limite généralisée tandis que dans les généralisations non métriques on appliquait le théorème de Tychonoff. Aucune de ces démonstrations n'était effective. La première démonstration effective de l'existence de la mesure de Haar est due à H. Cartan (voir sa note [2] et aussi le livre de Hewitt et Ross [1] contenant une vaste bibliographie du sujet).

Le théorème de Banach se laisse également généraliser aux espaces non métriques: il suffit de modifier convenablement la condition I_5 dans la définition de la convergence (p. 240) et d'appliquer, au lieu de la limite généralisée, le théorème de Tychonoff (comme dans le livre de Halmos [1], p. 254). La condition I_5 pourrait être modifiée par exemple comme suit:

I'_5. *$\{U\}$ étant une classe d'ensembles ouverts dont les fermetures sont compactes et dont l'intersection se réduit à un point, si pour chaque U de cette classe tout entourage d'un point a contient un tel point x et tout entourage d'un point b contient un tel point y que x et y appartiennent à un même ensemble congruent avec U, on a $a = b$.*

Ainsi généralisé, le théorème de Banach implique comme son cas particulier non seulement le théorème de Haar pour les groupes, généralisé comme dans l'exemple 2, mais aussi un théorème plus général sur l'existence d'une mesure invariante localement compacte dans les espaces à structure uniforme soumis au groupe d'homéomorphies équicontinues — théorème que Segal (voir Segal [1], théorème 7), qui s'occupait aussi du problème de l'unicité de cette mesure établit plus tard par une autre voie.

Loomis [1] démontra l'existence et l'unicité de toute mesure qui est la même pour les ensembles congruents, en regardant comme ensembles congruents seulement les sphères pleines compactes de rayon égal situées dans les espaces métriques assujettis à la condition supplémentaire que les sphères de rayon égal s'y laissent toujours couvrir par un même nombre de sphères de rayon x quelconque fixé d'avance. La démonstration de Loomis est effective. Cependant, la congruence chez Loomis et celle chez Banach ne sont pas comparables, les axiomes I_1-I_5 de Banach n'entraînant guère la congruence entre les sphères d'un même rayon. Plus encore, à cette époque Banach ne pouvait pas admettre l'hypothèse de ce genre s'il voulait appliquer son théorème aux groupes. L'admission de cette hypothèse pour les groupes topologiques avec congruence définie par les translations ne devint possible que lors de la publication en 1936 du théorème de Kakutani [1] sur l'existence d'une mesure invariante.

A. Goetz

— et S. Mazur, *Über mehrdeutige stetige Abbildungen*, Studia Mathematica 5 (1934), p. 174-178*.

L'étude des homéomorphies locales prit naissance dans la théorie des surfaces de Riemann des fonctions analytiques et, plus généralement (voir Weyl [1], p. 47), dans celle des surfaces couvrantes („Überlagerungsflächen"). Lorsque, X et Y étant des espaces topologiques, X est pour Y un espace couvrant, il existe une homéomorphie locale $f: X \to Y$. Un des problèmes de cette théorie et celui des conditions pour que la surface couvrante soit unifoliée („einblättrig") ou, en d'autres termes, pour que l'homéomorphie locale f soit une homéomorphie tout court. Le théorème 2 du travail commenté apporte de telles conditions.

Dans le même ordre d'idées, quatre théorèmes suivants furent connus au moment de la publication de ce travail:

Théorème de Carathéodory et Rademacher ([1], Satz II). Soit f une fonction transformant une région plane X simplement connexe en une région plane Y d'une manière continue, localement biunivoque et telle que les ensembles isolés se transforment en ensembles isolés. Alors la fonction f est biunivoque dans X tout entier et la région Y est aussi simplement connexe.

Théorème de Stoïlov ([1], § 2, § 3 p. 231 et § 6 p. 234). Soient X et Y des espaces topologiques connexes par arcs, Y étant en outre tel que toute courbe simple fermée s'y laisse déformer d'une façon continue en un point. Alors toute fonction f transformant X en Y d'une manière continue, localement biunivoque et telle que les ensembles isolés se trouvent transformés par f en ensembles isolés (hypothèse qui se laisse affaiblir pour X et Y métriques; voir loco cit. 2°) est une homéomorphie.

Théorème de H. Cartan ([1], p. 89, corollaire du théorème I; les définitions *ibidem*). Soit T une transformation localement topologique dans un domaine D et qui le transforme en un domaine intérieur à un domaine simplement connexe Δ. Si T ne possède aucun chemin de détermination, elle est une transformation biunivoque de D en Δ.

Théorème d'Eilenberg ([1], p. 42, théorème III). Toute transformation localement homéomorphe f d'un continu connexe par arcs X en un continu Y dont le groupe fondamental disparaît est une homéomorphie.

Le théorème 2 du travail commenté se distingue de ces résultats par la simplicité de la manière dont il est formulé et par la généralité des hypothèses. L'hypothèse (α) équivaut à la connexité par arcs (voir Kuratowski [6], p. 182) et l'hypothèse (β) coïncide pour les espaces connexes par arcs à l'évanouissement de leur groupe fondamental, propriété dite aussi leur connexité simple (voir Pontryagin [1], p. 346).

A la même série de théorèmes se rattachent ceux, bien plus précoces, de Kérékjartó [1] (p. 313, Satz III et p. 317, Satz VI) dans lesquels le théorème précité de Carathéodory et Rademacher fut généralisé aux fonctions plurivoques à plurivocité finie.

Le théorème 1 du travail commenté joue le rôle d'un lemme et peut être regardé comme un théorème sur les sélecteurs continus. F étant une fonction plurivoque définie dans un espace topologique X, on en appelle *sélecteur continu* toute fonction f continue et telle que $f(x) \in F(x)$ pour tout $x \in X$ et on entend d'habitude par la continuité de $F(x)$ l'existence, pour toute suite de points $x_n \in X$.

C'est la théorie des espaces fibrés (voir par exemple Steenrod [1]) qui est la branche de la topologie consacrée à une étude méthodique de l'existence des sélecteurs continus. Des recherches plus générales furent abordées par Michael [1].

J. Mioduszewski

* Voir p. 246.

Sur un théorème de M. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae 25 (1935), p. 5 et 6*.

Ce travail contient une démonstration simplifiée d'un théorème de Sierpiński sur les superpositions de fonctions (voir Sierpiński [11]).

Les résultats ultérieurs sur ce sujet sont dus à Sierpiński [17] qui démontra que toute fonction de plusieurs variables $f(x_1, \ldots, x_n)$ est représentable par superposition d'un nombre fini, soit k, de fonctions de deux variables $\varphi_i(x_{l_i}, x_{m_i})$ où $i = 1, \ldots, k$, $l_i = 1, \ldots, n$ et $m_i = 1, \ldots, n$.

Plus récent est le théorème de Łoś (voir Łoś [1]) d'après lequel pour toute suite de fonctions $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k_n})$ où le nombre total de variables n'est pas supposé fini, il existe une fonction φ de deux variables telle que chacune des fonctions f_n est une superposition de fonctions de la forme $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2})$.

S. Hartman et *W. Nitka*

The Lebesgue integral in abstract spaces, annexe du livre [6] de Saks**.

L'idée de construire l'intégrale du type de celle de Lebesgue sans introduire au préalable la notion de mesure d'ensemble est relativement précoce (voir par exemple Bourbaki [1], note historique). Banach n'était pas le premier à déduire la notion de mesure de celle d'intégrale et non pas la notion d'intégrale de celle de mesure. Son travail qui est l'objet de ce commentaire diffère d'ailleurs de l'oeuvre capitale de Lebesgue non seulement par la méthode, mais aussi par le degré de la généralité (ce qui est exprimé déjà dans le titre). A cet égard, Banach ne prétendait pas à la priorité, comme le montrent les renvois du débuts relatifs aux pages du livre de Saks (dont le travail en question de Banach est une annexe) sur lesquelles on trouve les noms des auteurs et les renvois à la bibliographie de leurs publications recueillie à la fin du livre. Pour les plus importantes de ces publications et qui se rattachent plus étroitement à ce commentaire, voir Daniell [1], Hahn [3], Nikodym [1] et Radon [1].

Quant à la construction de l'intégrale ne s'appuyant pas sur la théorie de la mesure, Banach ne fait aucune mention des idées antérieures. On peut donc en conclure qu'il les ignorait. Une autre preuve que Banach n'était pas inspiré par des travaux antérieurs est que sa solution du problème qu'il se posa diffère distinctement de ces travaux. La tentative qui suit a pour but de montrer en quoi consiste ce caractère distinctif et de classer le travail en question de Banach dans la longue série des publications comprenant les travaux antérieurs et postérieurs au sien et consacrées à la notion apriorique d'intégrale — bien entendu sans chercher à mentionner toutes ses publications et toutes les variantes des méthodes fondamentales.

C'est Daniell qui est considéré d'habitude comme l'auteur de la théorie de „l'intégrale sans la mesure“ (intégrale de Daniell). Son travail [2] contient un exposé complet de cette théorie dans l'espace abstrait. Il y insiste particulièrement sur l'indépendance de sa méthode de la nature des éléments de l'espace: sa méthode est libre de la géométrie. Il faut cependant, du point de vue actuel, attribuer autant d'importance à ce qu'elle est à la fois libre de la théorie d'une mesure *a priori*, car une telle méthode s'accorde mieux avec l'analyse fonctionnelle contemporaine et s'avère particulièrement avantageuse lorsqu'il s'agit d'étendre la notion d'intégrale à partir des classes plus restreintes aux classes plus vastes de fonctions, et surtout lorsqu'il est question de construire l'intégrale et la mesure dans les espaces localement compacts (voir plus loin). En omettant la construction de l'intégrale de Stieltjes généralisée, qui ne nous intéresse pas ici, le travail de Daniell peut être résumé comme il suit:

Une classe linéaire T_0 de fonctions réelles, définies dans un espace et contenant, avec tout couple de fonctions f_1 et f_2 les fonctions $\max(f_1, f_2)$ et $\min(f_1, f_2)$, étant donnée, soit U une opération linéaire positive (c'est-à-dire telle que $f \geqslant 0$ partout entraîne $U(f) \geqslant 0$), définie dans T_0 et assujettie à la condition

(*) si $f_n \epsilon T_0$, $f_n \geqslant f_{n+1}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ partout, on a

$$\lim_{n\to\infty} U(f_n) = 0.$$

On définit alors, pour les fonctions de la classe T_1, à savoir pour les limites des suites $\{f_n\}$ non décroissantes de fonctions de la classe T_0, l'intégrale I comme $\lim\limits_{n\to\infty} U(f_n)$, qui peut être égale à ∞. Cette définition est univoque. On définit ensuite, pour une fonction f arbitraire, la *demi-intégrale supérieure* $\dot{I}(f)$ comme la borne inférieure des intégrales de fonctions de la classe T_1 qui sont des majorantes de f. Lorsque $\dot{I}(f) = -\dot{I}(-f)$ et $|\dot{I}(f)| < \infty$, la fonction f s'appelle *sommable* et on admet $\dot{I}(f)$ comme son intégrale $I(f)$. En prenant pour T_0 la classe des fonctions continues dans un intervalle et pour U l'intégrale ordinaire, $I(f)$ est celle de Lebesgue.

Daniell fait remarquer que le résultat est le même si T_0 est par exemple la classe des fonctions constantes par intervalles. Il est toutefois facile

* Voir p. 250.
** Voir p. 252.

d'apercevoir que la démonstration en comporterait des difficultés techniques. Par contre, en modifiant le mode de procéder de Daniell de façon à introduire à part, pour les fonctions définies dans un segment de droite (ou plus généralement, dans un cube à n dimensions), la notion d'ensemble de mesure nulle et puis à considérer une fonction non négative f comme intégrable lorsqu'on a pour une suite croissante $\{f_n\}$ de fonctions constantes par intervalles $f_n \to f$ presque partout et $\lim_{n\to\infty} If(n) = I(f) < \infty$, le chemin conduisant à l'intégrale de Lebesgue se trouve abrégé considérablement. Cette méthode revient à F. Riesz. Elle est exposée dans le livre de lui et Nagy [1], mais elle fut introduite déjà dans la publication [1] de F. Riesz de 1920, bien que sous une forme un peu différente. Il y mentionna l'intégrale de Daniell et indiqua la façon de mettre d'accord la méthode de convergence presque partout avec la construction abstraite de Daniell. Il s'agit d'introduire un succédané convenable de l'ensemble de mesure nulle. F. Riesz proposa de considérer comme tel tout ensemble E pour lequel il existe dans la classe T_0 une suite $\{f_n\}$ de fonctions non négatives convergeant dans E vers l'infini et telle que la suite $\{U(f_n)\}$ est bornée.

Le travail [1] de F. Riesz a la forme d'une lettre à G. Mittag-Leffler. L'auteur y cite au début quelques méthodes antérieures pour introduire l'intégrale de Lebesgue et dont il attribue à Borel (1910) l'idée de construction, non fondée sur la notion de mesure, bien que Borel n'eût pas développé cette idée. Il y rappelle aussi que W. H. Young introduisit dans ses travaux [1] et [2] une notion d'intégrale basée sur deux passages à la limite successifs, monotones et partant soit des fonctions continues, soit des fonctions constantes par intervalles. Les deux méthodes en question furent exposées encore une fois dans son travail [3] et généralisées aux intégrales du type de celles de Stieltjes. Ainsi, on peut trouver déjà chez W. H. Young l'idée de la théorie apriorique de l'intégrale (il est vrai que seulement dans E^n) et même une esquisse des moyens techniques, perfectionnés plus tard par Daniell et F. Riesz. Cependant, ce ne furent seulement que Daniell qui les appliqua au cas abstrait et F. Riesz qui les introduisit dans la construction des suites convergentes presque partout en épargnant par cela un passage à la limite.

Dans leur livre [1], Riesz et Nagy résumèrent succintement la théorie de Young en se servant du théorème d'après lequel l'intégrale inférieure de Darboux d'une fonction bornée et semicontinue inférieurement f est une limite des intégrales de fonctions continues f_n, pourvu que $f_n \uparrow f$. On peut donc expliquer comme suit en termes des intégrales de Darboux la construction décrite dans le travail [1] de W. H. Young: f étant une fonction bornée, définie dans un segment de droite, on définit deux nombres, à savoir les bornes inférieure et supérieure des intégrales de Darboux de toutes les fonctions bornées $g \geqslant f$ et $g \leqslant f$ respectivement, et on appelle la fonction f *intégrable* lorsque les deux nombres coïncident; pour les fonctions non bornées, on définit l'intégrabilité et l'intégrale à l'aide des fonctions tronquées.

La théorie exposée dans le travail de Banach s'approche de celle de Daniell. Elle en diffère par une autre axiomatisation de la classe fondamentale T_0 et de l'opération U. Au lieu de (*), c'est la condition suivante (ii_3) qui doit être satisfaite (les notations y étant convenablement modifiées): $f_n \in T_0$, $\varphi \in T_0$, $|f_n| \leqslant \varphi$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ partout entraînent $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = 0$. C'est évidemment une condition à la fois plus forte et qui anticipe en partie la propriété de l'intégrale de Lebesgue, contenue dans son théorème sur la convergence majorée. La condition (ii_3) équivaut à une autre condition que Banach désigne par (ii_3') et dont il se sert dans les démonstrations. La classe intermédiaire T_1 du travail précité [2] de Daniell est alors à remplacer méthodiquement par celle des fonctions qui sont des limites inférieures des suites de fonctions de la classe T_0 minorées par une fonction appartenant également à T_0. Aussi bien dans la théorie de Daniell que dans celle de Banach, on a deux théorèmes classiques de la théorie de l'intégrale lebesguienne, à savoir l'un sur l'intégration des suites monotones et l'autre sur celle des suites convergentes de fonctions majorées par une fonction intégrable. Or la fonctionnelle linéaire construite est, pour la classe des fonctions intégrables, la seule qui satisfait au premier de ces théorèmes (pour l'intégrale de Daniell) et au second (pour celle de Banach) et qui coïncide dans la classe T_0 avec la fonctionnelle U. En outre, il est facile de montrer que si la classe T_0 et la fonctionnelle U satisfont aux conditions de Banach, la méthode daniellienne des suites monotones appliquée à cette classe et à cette fonctionnelle conduit à la même classe des fonctions intégrables que la méthode de Banach et, évidemment, à la même intégrale. Autant que le sache l'auteur de ce commentaire, la méthode de Banach ne fut pas usitée ultérieurement dans des cours et monographies sur la théorie de l'intégrale.

Dans la seconde partie du même travail de Banach, la théorie générale est appliquée au cas d'un espace métrique compact arbitraire K. C'est la classe $C(K)$ de toutes les fonctions continues qui est prise alors pour T_0 et une fonctionnelle positive arbitraire, définie dans $C(K)$ joue le rôle de U. Il ne s'agit que de montrer que U satisfait à la condition (ii_3). Banach le déduit des théorèmes généraux sur la convergence faible contenus dans son livre [*38*]. On voit ici un désavantage de la méthode de Banach vis à vis de celle de Daniell: c'est que la démonstration de la condition (*) pour les fonctions continues dans un espace métrique compact quelconque et pour une fonctionnelle linéaire (continue) arbitraire est bien plus simple et tout à fait élémentaire.

Quant à l'intégration dans des espaces topologiques, on ne se borne pas dans les cours et monographies modernes qu'aux espaces compacts. Le développement de l'analyse moderne a mis particulièrement en relief le rôle des espaces localement compacts, notion que Banach ne faisait pas encore intervenir. Il semble néanmoins que ce fut lui le premier qui porta juste au degré de généralité le plus actuel à cette époque, tandis que ses prédécesseurs ne sortaient pas, en spécialisant la construction abstraite de l'intégrale, en dehors du cas de cube euclidien à n dimensions. Or l'extension de la construction aux espaces (de Hausdorff) localement compacts n'exige à peine que des soins techniques: on ne prend plus pour T_0 la classe de toutes les fonctions continues, mais celle, désignée par L, des fonctions continues ayant des supports compacts. C'est ainsi que la théorie de l'intégrale dans les espaces localement compacts fut exposée par exemple dans les livres [1] de Bourbaki, [2] de Loomis et [1] de Naimark dont les auteurs se servent cependant de la construction de Daniell et non pas de celle de Banach.

Sous un rapport encore la seconde partie du travail de Banach est un peu anachronique au point de vue d'aujourd'hui: c'est que le problème y est réduit au cas d'espaces métriques. Dans les espaces (de Hausdorff) localement compacts sans deuxième axiome de dénombrabilité, l'emploi des suites (au sens classique) n'est pas le plus naturel, car la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert peut ne pas y être limite d'une suite croissante (ordinaire) de fonctions de la classe L. C'est pourquoi dans le livre [1] de Bourbaki et dans celui [2] de Loomis, ce sont les suites au sens de Moore et Smith qui furent employées. La condition (*) pour la classe L et pour la fonctionnelle positive U définie dans L prend, après une modification convenable, la forme suivante:

(**) Si A est un ensemble filtrant, $f_a \in L$ pour tout $a \in A$ et $\inf\limits_{a\in A} f_a(x) = 0$ pour tout x, on a $\inf\limits_{a\in A} U(f_a) = 0$.

On peut aussi envisager les intégrales et les mesures non-positives, c'est-à-dire provenant des fonctionnelles linéaires définies dans L et pas nécessairement positives (voir Bourbaki [1]). On postule alors que la fonctionnelle U soit continue suivant la topologie de convergence uniforme sur les compacts. Cette condition entraîne (**) et elle est satisfaite en particulier pour toute fonctionnelle positive. Le rôle de la classe intermédiaire T_1 est joué par celle des fonctions semi-continues inférieurement. La construction de l'intégrale y est en principe pareille à celle de Daniell; cependant le résultat final n'en est pas l'ensemble des fonctions intégrables individuelles, mais l'espace L_1 auxquel on parvient comme il suit: on définit une fonctionelle $\bar{I}(f)$ pour toutes les fonctions f non-négatives (et qui peuvent prendre aussi la valeur ∞) en posant $\bar{I}(f) = \inf I(g)$ pour $g \geqslant f$ et $g \in T_1$, où $I(g)$ est l'intégrale définie au préalable dans T_1 par un prolongement de la fonctionnelle U; puis, on introduit l'espace des fonctions f pour lesquelles $\bar{I}(|f|) < \infty$ et on en forme un espace métrique avec la norme $\bar{I}(|f|)$ à l'aide de la division par la relation d'équivalence $\bar{I}(|f-g|) = 0$; enfin, on définit L_1 comme adhérence de L dans cet espace. Toute la construction se laisse effectuer également, même sans le deuxième axiome de dénombrabilité, exactement par la méthode de Daniell, c'est-à-dire à l'aide des suites monotones ordinaires à partir des fonctions continues. La différence entre les deux méthodes est analysée en détail dans le livre de Bourbaki [1]. D'un façon générale, la méthode de Daniell fournit moins de fonctions intégrables, car la fonctionnelle $\bar{I}$ construite à l'aide de suites monotones peut être plus grande que celle construite à l'aide de suites de Moore et Smith. Néanmoins l'espace des fonctions intégrables, construite par cette voie, est isomorphe à l'espace L_1, tout ensemble de fonctions équivalentes, qui est un point de L_1, contenant une fonction intégrable au sens de Daniell.

L'autre aspect du travail de Banach, à savoir la généralisation de l'intégrale aux ensembles abstraits, a été en partie commenté déjà à propos du problème de la notion apriorique d'intégrale. Les deux aspects ne se trouvent pas en interdépendance étroite, car non seulement l'intégrale lebesguienne classique se laisse construire par la méthode apriorique, mais aussi l'intégrale abstraite peut être basée sur la théorie de la mesure, pourvu que cette théorie soit traitée avec une généralité suffisante.

Il semble que c'est Fréchet (voir Fréchet [2]) qui fut le premier à attirer l'attention sur la possibilité de l'intégration dans des espaces abstraits, bien que Radon se fût affranchi avant lui (dans son travail connu [1]) de la mesure basée sur la longueur ou sur le volume et eût introduit les ainsi dites fonctions d'ensemble absolument additives dans E^n (c'est-à-dire des mesures dénombrablement additives) dont il construisit ensuite l'intégrale par la méthode géométrique de Lebesgue.

Hahn [2] définit autrement que par la méthode de Lebesgue l'intégrale abstraite d'une fonction bornée f par rapport à une mesure σ-additive φ donnée, à savoir en entendant par cette intégrale une fonction d'ensemble M assujettie à la condition que $c' \leqslant f \leqslant c''$ dans M entraîne $c'\varphi(M) \leqslant \int\limits_M f \leqslant c''\varphi(M)$.

On connaît bien la théorie générale de la mesure de Carathéodory, exposée par exemple dans son livre [1] et dans ceux de Berberian [1] et de Halmos [1]. Son trait fondamental est que la mesure extérieure y est axiomatisée, ce qui permet de définir la notion d'ensemble mesurable et de démontrer que les ensembles mesurables constituent un σ-anneau.

Enfin, dans d'innombrables publications contemporaines de la théorie de la mesure et de celle des probabilités, la mesure et le corps des sous-ensembles mesurables d'un espace considéré, qui peut-être tout à fait abstrait, sont donnés d'avance. La notion d'intégrale d'une fonction réelle ou complexe par rapport à une telle mesure se laisse construire sans aucune difficulté (voir par exemple le chapitre I du livre [6] de Saks). L'extension de la notion d'intégrale aux fonctions ayant leurs valeurs dans un espace linéaire normé quelconque fait l'objet d'une littérature à part et ne sera pas envisagée ici.

La troisième partie du travail de Banach fut consacrée à l'application de la théorie de l'intégrale exposée par lui à la boule-unité H dans l'espace l^2. Banach traita H comme un sous-ensemble de la puissance dénombrable du segment $J = [0,1]$, à laquelle s'appliquent les théorèmes établis dans la seconde partie de son travail, cet espace étant compact. Grâce à cette méthode, toutes les mesures boreliennes non négatives dans H se laissent décéler comme celles qui correspondent aux suites de fonctionnelles linéaires positives, définies pour les fonctions continues de x_1, de $x_1, x_2, \ldots$, de $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_i \in J, \sum x_i^2 \leqslant 1)$, ces fonctionnelles étant compatibles deux à deux.

A cette époque, la théorie des mesures dans les produits cartésiens n'était pas encore développée. Banach contribua lui-même dans l'un de ses derniers travaux à l'épanouissement de cette théorie (voir [*54*a]). Au point de vue actuel, les mesures dont il est question dans la troisième partie du travail faisant objet de ce commentaire sont une rélativisation des mesures boreliennes dans $J^{\aleph_0}$ à l'ensemble H. Il résulte des théorèmes connus sur les produits de mesures (voir par exemple Bourbaki [1], p. 99) que les mesures boreliennes positives dans les puissances finies du segment J, pourvu que la condition de leur compatibilité soit respectée, déterminent une mesure-produit dans $J^{\aleph_0}$. En la relativisant à l'ensemble H, on a une mesure borelienne dans H en tant que dans un sous-ensemble de l'espace l^2, car la transformation de $H \subset l^2$ en $H \subset J^{\aleph_0}$ par l'identité est continue, donc mesurable B dans les deux sens réciproques. Evidemment, toute mesure borelienne non négative dans H peut être obtenue par cette voie.

Il est à remarquer à ce propos que les théorèmes sur les mesures dans les produits d'espaces compacts furent généralisés plus tard par Marczewski [7] grâce à sa conception abstraite de la condition assurant la possibilité d'approcher les ensembles mesurables par leurs sous-ensembles compacts, Les mesures satisfaisant à la forme abstraite de cette condition, dites *mesures compactes*, furent ensuite étudiées et généralisées davantage par d'autres auteurs (voir par exemple Ryll-Nardzewski [1]).

S. Hartman

Sur la divergence des séries orthogonales, Studia Mathematica 9 (1940), p. 139-155*.

Ce travail concerne le problème de la divergence des sommes partielles de séries orthogonales, en particulier dans l'espace fonctionnel $L^2(0,1)$. Le problème en question est envisagé pour une suite arbitraire $\{c_n\} \in l^2$ de coefficients. Les démonstrations des théorèmes contenu dans ce travail procèdent par la méthode de catégorie (voir le commentaire au travail [*34*], ce volume, p. 348) et n'indiquent pas explicitement le mode de construction du système orthogonal $\{\varphi_n(t)\}$ ayant les propriétés requises.

Le cas particulier du théorème III, mentionné par Banach p. 262, à savoir l'existence pour toute fonction non nulle $f \in L^2(0,1)$ d'un système orthonormal complet et tel que les sommes partielles $s_n(t)$ du développement de la fonction f en série suivant ce système satisfont presque partout à la condition $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|s_n(t)| = \infty$, fut aussi établi indépendamment par Talalyan ([1] et [2]) quelques années plus tard.

J. Musielak

(Publication posthume) *On measures in independent fields*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 159-177**.

Ce travail de Banach, rédigé et complété par S. Hartman d'après des fragments manuscrits datant de 1940, est intimement lié aux recherches de Marczewski [3-6] sur l'indépendance des ensembles, sur celle des corps d'ensembles et sur l'indépendance stochastique des mesures (pour le détail, voir l'article synthétique de Marczewski [5]).

Le principal théorème du travail, et qui est la solution affirmative d'un problème posé par Marczewski [6], constitue une généralisation du théorème suivant sur l'existence des mesures spéciales μ^* dans les produits cartésiens:

L'indice j parcourant un ensemble J arbitraire, soit μ_j une mesure dénombrablement additive, définie dans un corps dénombrablement additif $\boldsymbol{M}_j$ de sous-ensembles de l'espace X_j et telle que $\mu_j(X_j) = 1$. Alors, il existe exactement une mesure dénombrablement additive μ^*, définie dans le plus petit corps dénombrablement additif $\boldsymbol{M}$ d'ensembles

* Voir p. 262.
** Voir p. 275.

qui contient tous les sous-ensembles A de l'espace $X = \mathop{\mathbf{P}}_{j\in J} X_j$ de la forme

(*) $A = \mathop{\mathbf{P}}_{j\in J} A_j$ où $A_j \in \boldsymbol{M}_j$ pour tout $j \in J$ et $A_j = X_j$ sauf pour un nombre fini de valeurs de j

et qui satisfait pour tout A de la forme (*) à l'égalité

$$\mu^*(A) = \prod_{j\in J} \mu_j(A_j).$$

En effet, envisageons pour tout $j \in J$ l'ensemble A_j^* de tous les points $x \in X$ dont j-ème coordonnée appartient à A_j et le corps dénombrablement additif $\boldsymbol{M}_j^*$ de tous les ensembles A_j^* tels que $A_j \in \boldsymbol{M}_j$. Or la famille de tous les corps $\boldsymbol{M}_j^*$ où $j \in J$ est dénombrablement indépendante. En appliquant le théorème de Banach à cette famille et aux mesures engendrées d'une façon naturelle dans chacun d'eux, on obtient le théorème sur l'existence de mesures μ^* dans les produits cartésiens.

Sherman [1] et Sikorski [4] montrèrent indépendamment l'un de l'autre que, réciproquement, le théorème de Banach peut être déduit du théorème sur l'existence de mesures μ^* dans les produits cartésiens. Ils remarquèrent qu'étant donné und famille dénombrablement indépendante de corps dénombrablement additifs d'ensembles, il existe toujours une famille de corps $\boldsymbol{M}_j$ définie comme plus haut et telle que la famille $\boldsymbol{M}_j^*$ est isomorphe à la famille donnée.

On envisagea aussi des tentatives de généraliser le théorème de Banach par l'affaiblissement de l'hypothèse d'indépendance entre les corps d'ensembles. Ainsi, dans le théorème de Marczewski sur le prolongement de mesures additives, rappelé au début du travail de Banach, l'hypothèse d'indépendance peut être remplacée par celle de presque-indépendance, à savoir que l'intersection d'une suite finie quelconque d'ensembles de mesure positive choisis dans des corps différents ne soit pas vide (voir Marczewski [5] et [6]). Le problème s'impose donc si le théorème de Banach subsiste lorsqu'on y remplace l'hypothèse d'indépendance dénombrable entre les corps d'ensembles par celle de presque-indépendance dénombrable entre ces corps, définie d'une manière analogue. Helson [1] résolut ce problème par la négative déjà pour la presque-indépendance entre deux corps et Marczewski [6] montra que la réponse est affirmative lorsque tous les corps, ou bien tous sauf un seul, sont finis.

La notion d'indépendance et celle d'indépendance dénombrable se généralisent d'une façon naturelle aux familles de sous-corps d'un corps de Boole fixé d'avance. Le théorème de Marczewski, rappelé par Banach au début de son travail commenté ici, reste vrai aussi pour les corps de Boole. Sikorski [5] montra que le théorème de Banach est en défaut pour les familles dénombrablement indépendantes de sous-corps dénombrablement additifs d'un corps de Boole dénombrablement additif (déjà pour une famille composée de deux sous-algèbres). A l'aide de la notion d'indépendance dénombrable d'une famille de corps, Sikorski [3] définit les notions de produits cartésiens minimum et maximum d'une famille de corps de Boole dénombrablement additifs et montra que le théorème sur l'existence de la mesure μ^* dans les produits cartésiens est vrai pour le produit maximum sans l'être pour le produit minimum.

R. Sikorski

(Publication posthume) *Sur la représentation des fonctions indépendantes à l'aide des fonctions de variables distinctes*, Colloquium Mathematicum 1, (1948), p. 109-121*.

Ce travail fut reconstruit par S. Hartman et E. Marczewski d'après une notice manuscrite de Banach intitulée „Fonctions indépendantes" et contenant plusieurs résultats sans démonstration. La tâche des rédacteurs était celle de préciser les termes et d'ajouter les démonstrations détaillées. La notion de fonctions (stochastiquement) indépendantes fut introduite en 1933 par Kolmogoroff [2] et en 1936, à l'aide d'une définition modifiée, par Kac et Steinhaus (voir Kac [2]). Le but en était de préciser la notion intuitive d'indépendance employée depuis longtemps par les probabilistes. Les fonctions indépendantes se révélèrent un instrument extrêmement utile et leur rôle devint fondamental dans la théorie moderne des probabilitées.

Dans le travail en question, deux fonctions indépendantes, f et g, définies dans l'intervalle $0 < x < 1$, s'appellent *représentables biaxialement* lorsqu'il existe deux couples de fonctions, à savoir des fonctions $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$ transformant cet intervalle en carré-unité et conservant la mesure, en même temps que des fonctions mesurables $F(x)$ et $G(x)$ telle que $f(t) = F(\varphi(t))$ et $g(t) = G(\psi(t))$. La conservation de la mesure par la transformation $(\varphi(t), \psi(t))$ de l'intervalle linéaire en un carré signifie que, pour tout ensemble borélien M situé dans ce carré, la mesure (linéaire) lebesguienne de l'ensemble $\{t\colon (\varphi(t), \psi(t)) \in M\}$ est égale à la mesure (plane) de l'ensemble M.

Banach posa le problème: quelles sont les conditions pour que les fonctions indépendantes soient représentables biaxialement? Il en trouva

* Voir p. 296.

deux suffisantes: l'une que ces fonctions aient les distributrices continues et l'autre qu'elles ne prennent qu'un ensemble dénombrable des valeurs, sauf dans les points d'un ensemble de mesure nulle. En outre, Banach donna un simple exemple de fonctions indépendantes n'ayant pas de représentation biaxiale. L'extension du problème à un système arbitrairement nombreux de fonctions indépendantes ne comporte pas de difficulté.

La tendance évidente de Banach fut de représenter les fonctions indépendantes par des fonctions de variables distinctes et de ramener ainsi l'indépendance au cas le plus simple où l'une des fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ ne dépend que de la variable x et l'autre — que de la variable y. A cette époque, la théorie générale des mesures dans les produits cartésiens, due à Daniell, Kolmogoroff, Ulam, Halmos, Marczewski et autres, n'était qu'à ses débuts et peu familière aux mathématiciens par suite des conditions de la guerre. Banach fut lui-même l'auteur de l'un des principaux théorèmes de cette théorie (cf. son travail [*54*a]), mais en écrivant la notice dont il est question ici, son attention se tenait manifestement à des notions antérieures de la théorie des fonctions réelles, comme celles de mesure lebesguienne et de transformation type péanien, qui étaient alors particulièrement familières à l'école mathématique polonaise.

Or le développement ultérieur du calcul des probabilités montra qu'il n'y a pas d'intérêt à se borner aux fonctions indépendantes par rapport à la mesure de Lebesgue et définies dans un segment de droite, mais qu'il vaut mieux d'envisager les fonctions indépendantes dans un espace arbitraire muni d'une mesure finie dénombrablement additive et qu'en renonçant à la mesure lebesguienne, on peut toujours considérer les fonctions indépendantes comme celles de variables distinctes, quoique dans un sens différent de celui de Banach. Les fonctions réelles $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots$ étant stochastiquement indépendantes par rapport à une mesure μ dans l'espace de la variable t, on peut notamment considérer sur les axes réelles $X_1, X_2, \ldots$ les mesures μ_n engendrées par ces fonctions en posant $\mu_n(M) = \mu\big(f_n^{-1}(M)\big)$ pour tout ensemble borélien $M \subset X_n$. Alors les fonctions F_n définies dans le produit cartésien $X_1 \times X_2 \times \ldots$ par la formule $F_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$ dépendent des variables distinctes et leurs distributrices coïncident avec celles des fonctions f_n (cf. van Kampen [1]). Au point de vue du calcul des probabilités, le problème est résolu, vu que tout système de fonctions (variables aléatoires) peut être remplacé par un autre ayant les mêmes distributrices à plusieurs dimensions.

Il est à remarquer que $f(t)$ et $g(t)$ étant des fonctions indépendantes définies dans un segment de droite, il existe toujours des fonctions $F(t)$ et $G(t)$ ayant la même distributrice à 2 dimensions et représentables biaxialement au sens de Banach. Telles sont par exemple les fonctions

$F(t) = f\big(\varphi(t)\big)$ et $G(t) = g\big(\psi(t)\big)$ où φ et ψ forment un couple péanien de fonctions qui transforme le segment rectiligne en un carré et conserve la mesure.

Le problème de Banach est intéressant aussi pour la théorie des fonctions d'une variable réelle. Or il n'est pas résolu d'une manière complète. Les remarques qui précèdent ne le concernent qu'à l'égard de la théorie moderne des probabilités.

S. Hartman