

Sur un théorème de M. Sierpiński*

M. W. Sierpiński a démontré récemment ⁽¹⁾ ce

THÉORÈME. $f_1(p), f_2(p), f_3(p), \dots$ étant une suite infinie de fonctions définies dans un ensemble infini E (formé d'éléments quelconques) et ne prenant que les valeurs appartenant à E , il existe deux fonctions de même nature, $\varphi(p)$ et $\psi(p)$ telles que toute fonction de la suite considérée est une superposition (finie) de ces deux fonctions.

Le but de cette Note est de donner une démonstration plus simple de ce théorème.

Démonstration. Décomposons l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints E_0, E_1, E_2, \dots , dont chacun a la même puissance que l'ensemble E , et décomposons l'ensemble E_0 en une infinité dénombrable d'ensembles $E_{0,1}, E_{0,2}, E_{0,3}, \dots$, dont chacun a la même puissance que E_0 (donc aussi que E).

Définissons maintenant dans l'ensemble E la fonction $\psi(p)$ de sorte qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble E_{n+1} pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Or, définissons la fonction $\varphi(p)$, d'abord seulement dans l'ensemble $E - E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$, de sorte qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble $E_{0,n}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$

On vérifie sans peine que, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, la fonction

$$(1) \quad \theta_n(p) = \varphi\psi^n\varphi\psi(p)$$

transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E en l'ensemble $E_{0,n}$. La fonction $\theta_n^{-1}(p)$ (inverse de la fonction $\theta_n(p)$) est ainsi définie dans l'ensemble $E_{0,n}$ et transforme $E_{0,n}$ en E .

Définissons maintenant la fonction $\varphi(p)$ dans l'ensemble

$$E_0 = E_{0,1} + E_{0,2} + E_{0,3} + \dots,$$

en posant

$$(2) \quad \varphi(p) = f_n \theta_n^{-1}(p) \quad \text{pour} \quad p \in E_{0,n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Les formules (1) et (2) donnent immédiatement (d'après $\theta_n(E) = E_{0,n}$)

$$\varphi\theta_n(p) = f_n(p) \quad \text{pour} \quad p \in E,$$

ce qui donne, d'après (1),

$$f_n(p) = \varphi^2 \psi^n \varphi \psi(p) \quad \text{pour} \quad p \in E \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

et le théorème de M. Sierpiński est démontré.

* Commenté sur p. 356.

(1) Fundamenta Mathematicae 24 (1934), p. 209.