Über mehrdeutige stetige Abbildungen*

von

S. Banach und S. Mazur

Die in dieser Note behandelten Probleme sind an sich nicht neu und ihre Lösungen für verschiedene Spezialfälle längst bekannt; die hier vorliegenden Sätze mögen trotzdem vielleicht mit Rücksicht auf die Allgemeinheit ihrer Voraussetzungen Interesse beanspruchen.

Seien X und Y metrische Räume. Ist jedem Punkte $\tilde{x} \epsilon X$ eine aus k Punkten bestehende Menge $F(\tilde{x}) \subset Y$ zugeordnet, so sagen wir, es sei eine *k-deutige* Abbildung $F(x)$ von X auf einen Teil von Y erklärt. Die k-deutige Abbildung $F(x)$ heißt *stetig*, wenn man stets für $x_n \epsilon X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $x_0 \epsilon X$ mit $x_n \to x_0$ in der Menge $F(x_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ eine Anordnung $y_{m1}, \ldots, y_{mk}$ so bestimmen kann, daß $y_{ni} \to y_{0i}$. Eine stetige Abbildung $f(x)$ von X auf einen Teil von Y wird als ein stetiger *Zweig* der k-deutigen Abbildung $F(x)$ bezeichnet, falls $f(x) \epsilon F(x)$; wir sagen, daß die k-deutige Abbildung $F(x)$ in stetige Zweige *zerfällt*, wenn es stetige Zweige $f_i(x)$ von $F(x)$ mit $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ gibt.

Bei unseren Ausführungen spielen die metrischen Räume Z mit den folgenden *Eigenschaften* (α) und (β) eine grundlegende Rolle: (α) Jede Umgebung W eines Punktes $z_0 \epsilon Z$ enthält eine Umgebung $\tilde{W}$ von z_0 derart, daß jeder Punkt von $\tilde{W}$ mit z_0 durch eine stetige Kurve innerhalb W verbindbar ist; für jedes $\tilde{z} \epsilon \tilde{W}$ gibt es also eine stetige Abbildung $z(t)$ von $\langle 0, 1\rangle$ auf einen Teil von W, so daß $z(0) = z_0$, $z(1) = \tilde{z}$. (β) Je zwei stetige Kurven in Z mit gemeinsamen Endpunkten können durch eine stetige Deformation, bei der diese Endpunkte unverändert bleiben, ineinander überführt werden; d. h., sind $z'(t)$, $z''(t)$ stetige Abbildungen von $\langle 0, 1\rangle$ auf einen Teil von Z mit $z'(0) = z''(0)$, $z'(1) = z''(1)$, so existiert eine stetige Abbildung $z(t, s)$ von $\langle 0, 1; 0, 1\rangle$ ebenfalls auf einen Teil von Z, für die $z(t, 0) = z'(t)$, $z(t, 1) = z''(t)$, $z(0, s) = z'(0)$, $z(1, s) = z'(1)$.

* Commenté sur p. 354.

Satz I. *Sind X, Y metrische Räume, wobei der Raum X die Eigenschaften (α) und (β) besitzt, so zerfällt jede k-deutige stetige Abbildung $F(x)$ von X auf einen Teil von Y in stetige Zweige.*

Beweis. Bermerken wir voraus: Zu jedem $x_0 \epsilon X$ gehört eine Umgebung $U[x_0]$ von x_0, so daß die k-deutige Teilabbildung $F(x \,|\, U[x_0])$, d. h. die durch $F(x \,|\, U[x_0]) = F(x)$ definierte Abbildung von $U[x_0]$, in stetige Zweige zerfällt. Denn sei $F(x_0) = \{y_{01}, \ldots, y_{0k}\}$ und V_i eine Umgebung von y_{0i}, $V_p V_q = 0$ für $p \neq q$; alsdann ist jedenfalls eine Umgebung $U[x_0]$ von x_0 so bestimmbar, daß es für jedes $\tilde{x} \epsilon U[x_0]$ in der Menge $F(\tilde{x})$ eine Anordnung $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k$ mit $\tilde{y}_i \epsilon V_i$ gibt; setzt man $f_i(\tilde{x}) = f_i(\tilde{x}; x_0; y_{01}, \ldots, y_{0k}) = \tilde{y}_i$, so sind von selbst die Abbildungen $f_i(x)$ von $U[x_0]$ stetig und $F(x \,|\, U[x_0]) = \{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$, $f_i(x_0) = y_{0i}$. Nun können wir leicht zeigen, daß für jede stetige Abbildung $x(t)$ von $\langle 0, 1\rangle$ auf einen Teil von X die k-deutige Abbildung $F\big(x(t)\big)$ von $\langle 0, 1\rangle$ in stetige Zweige zerfällt. In der Tat, sei $x_0 = x(0)$, $F(x_0) = \{y_{01}, \ldots, y_{0k}\}$; wir wählen $t_m \epsilon \langle 0, 1\rangle$ $(m = 0, 1, \ldots, r)$ mit $t_0 = 0$, $t_r = 1$, $t_m < t_{m+1}$, $x(t) \epsilon U[x(t_m)]$ für $t_m < t \leqslant t_{m+1}$, und setzen $y_i(0) = y_{0i}$, $y_i(t) = f_i\big(x(t); x(t_m); y_1(t_m), \ldots, y_k(t_m)\big)$ für $t_m < t \leqslant t_{m+1}$; die auf diese Weise erklärten Abbildungen $y_i(t) = y_i\big(t; x(t); y_{01}, \ldots, y_{0k}\big)$ von $\langle 0, 1\rangle$ sind augenscheinlich stetig und $F\big(x(t)\big) = \{y_1(t), \ldots, y_k(t)\}$; $y_i(0) = y_{0i}$. Betrachten wir jetzt beliebige stetige Abbildungen $x'(t)$, $x''(t)$ von $\langle 0, 1\rangle$ auf einen Teil von X mit $x'(0) = x''(0)$; sei $x_0 = x'(0)$, $F(x_0) = \{y_{01}, \ldots, y_{0k}\}$, $y_i'(t) = y_i\big(t; x'(t); y_{01}, \ldots, y_{0k}\big)$, $y_i''(t) = y_i\big(t; x''(t); y_{01}, \ldots, y_{0k}\big)$. Sicherlich ist $y_i'(0) = y_i''(0)$; wir behaupten, daß allgemeiner $t', t'' \epsilon \langle 0, 1\rangle$, $x'(t') = x''(t'')$ die Gleichheit $y_i'(t') = y_i''(t'')$ zur Folge hat; es genügt, wie sofort ersichtlich, den Beweis für den Fall $t' = t'' = 1$ zu führen. Da der Raum X die Eigenschaft (β) aufweist, so läßt sich eine stetige Abbildung $x(t, s)$ von $\langle 0, 1; 0, 1\rangle$ auf einen Teil von X angeben derart, daß $x(t, 0) = x''(t)$, $x(t, 1) = x''(t)$, $x(0, s) = x'(0)$, $x(1, s) = x'(1)$; setzen wir $y_i(t, s) = y_i'\big(t; x(t, s); y_{01}, \ldots, y_{0k}\big)$, so ist $y_i(t, 0) = y_i'(t)$, $y_i(t, 1) = y_i''(t)$, $y_i(1, s) \epsilon F\big(x'(1)\big)$, und die Richtigkeit von $y_i'(1) = y_i''(1)$ wird demnach gesichert sein, wenn nur die Stetigkeit der Abbildungen $y_i(1, s)$ von $\langle 0, 1\rangle$ erkannt ist. Sei $s_0 \epsilon \langle 0, 1\rangle$; wir wählen $s_0' \epsilon \langle 0, s_0\rangle$ bzw. $= 0$ falls $s_0 = 0$, $s_0'' \epsilon (s_0, 1\rangle$ bzw. $= 1$ falls $s_0 = 1$, $t_m \epsilon \langle 0, 1\rangle$ $(m = 0, \ldots, r)$ mit $t_0 = 0$, $t_r = 1$, $t_m < t_{m+1}$, $x(t, s) \epsilon U[x(t_m, s_0)]$ für $t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}$, $s_0' \leqslant s \leqslant s_0''$; ist $\tilde{t}_m \epsilon \langle t_m, t_{m+1}\rangle$, $\tilde{s} \epsilon \langle s_0', s_0''\rangle$ und wird $t_m(\tau) = t_m$, $s_m(\tau) = s_0 + 2\tau(\tilde{s} - s_0)$ für $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2}$, $t_m(\tau) = t_m + (2\tau - 1)(\tilde{t}_m - t_m)$, $s_m(\tau) = \tilde{s}$ für $\frac{1}{2} < \tau \leqslant 1$ gesetzt, dann sind die Abbildungen $y_{im}(\tau) = f_i\big(x(t_m(\tau), s_m(\tau)); x(t_m, s_0); y_1(t_m, s_0), \ldots, y_k(t_m, s_0)\big)$ von $\langle 0, 1\rangle$ stetig, wobei $F\big(x(t_m(\tau), s_m(\tau))\big) = \{y_{1m}(\tau), \ldots, y_{km}(\tau)\}$, $y_{im}(0) = y_i(t_m, s_0)$; andererseits ist auch $F\big(x(t_m(\tau), s_m(\tau))\big) = \big\{y_1\big(t_m(\tau), s_m(\tau)\big), \ldots, y_k\big(t_m(\tau), s_m(\tau)\big)\big\}$, $y_i\big(t_m(0), s_m(0)\big) = y_i(t_m, s_0)$; sind also für ein m die Abbildungen $y_i\big(t_m(\tau), s_m(\tau)\big)$ von

$\langle 0, 1\rangle$ stetig, so gilt $y_i(t_m(\tau), s_m(\tau)) = y_{im}(\tau)$ und insbesondere $y_i(t_m(1), s_m(1)) = y_{im}(1)$, d. h. $y_i(\tilde{t}_m, \tilde{s}) = f_i(x(\tilde{t}_m, \tilde{s}); x(t_m, s_0); y_1(t_m, s_0), \ldots, y_k(t_m, s_0))$. Mit Benutzung der obigen Tatsachen folgern wir nun mittels Induktion, daß $y_i(t, s) = f_i(x(t, s); x(t_m, s_0); y_1(t_m, s_0), \ldots, y_k(t_m, s_0))$ für $t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}$, $s_0' \leqslant s \leqslant s_0''$; aus $y_i(1, s) = f_i(x(1, s); x(t_{r-1}, s_0); y_1(t_{r-1}, s_0), \ldots, y_k(t_{r-1}, s_0))$ für $s_0' \leqslant s \leqslant s_0''$ geht aber natürlich die Stetigkeit der Abbildungen $y_i(1, s)$ im Punkte s_0 hervor. Nach diesen Hilfsbetrachtungen kann man nun den Beweis des Satzes in einfacher Weise, wie folgt, erbringen. Es bedeutet offenbar keinerlei Einschränkung, wenn wir annehmen, daß der Raum X zusammenhängend ist. Sei $x_0 \epsilon X$ und $F(x_0) = \{y_{01}, \ldots, y_{0k}\}$. Da dem Raume X die Eigenschaft (α) zukommt, so ist die Menge aller $\tilde{x} \epsilon X$, die mit x_0 durch eine stetige Kurve in X verbunden sind, sowohl offen als abgeschlossen, und infolgedessen mit X identisch; für jedes $\tilde{x} \epsilon X$ gibt es also eine stetige Abbildung $x(t)$ von $\langle 0, 1\rangle$ auf einen Teil von X, so daß $x(0) = x_0$ und $x(1) = \tilde{x}$; für alle solche Abbildungen $x(t)$ stimmt nach dem vorigen $y_i(1; x(t); y_{01}, \ldots, y_{0k})$ überein. Setzt man $f_i(\tilde{x}) = y_i(1; x(t); y_{01}, \ldots, y_{0k})$, dann sind die so definierten Abbildungen $f_i(x)$ von X stetig und $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$. Um die Stetigkeit nachzuweisen, verfahren wir folgendermaßen: Ist $x_n \epsilon X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $\tilde{x} \epsilon X$ mit $x_n \to \tilde{x}$, so konstruieren wir eine stetige Abbildung $x(t)$ von $\langle 0, 1\rangle$ auf einen Teil von X derart, daß $x(1-2^{-m}) = x_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$, $x(1) = \tilde{x}$; dies erreicht man mühelos, da der Raum X die Eigenschaft (α) besitzt; alsdann ist $f_i(x_n) = y_i(1-2^{-n}; x(t); y_{01}, \ldots, y_{0k})$, $f_i(\tilde{x}) = y_i(1; x(t); y_{01}, \ldots, y_{0k})$ und mithin $f_i(x_n) \to f_i(\tilde{x})$, wie behauptet.

Seien X und Y metrische Räume. Eine Abbildung $f(x)$ von X auf einen Teil von Y heißt *lokal*-homöomorph, wenn es für jedes $x_0 \epsilon X$ eine Umgebung $U[x_0]$ von x_0 gibt, die bei dieser Abbildung auf eine Umgebung $V[y_0]$ von $y_0 = f(x_0)$ homöomorph übergeht; alsdann ist die Abbildung $f(x)$ stetig.

Satz II. *Sind X, Y metrische Räume, wobei der Raum X zusammenhängend ist und Y die Eigenschaften (α), (β) besitzt, so ist jede lokal-homöomorphe Abbildung $f(x)$ von X auf einen Teil von Y, bei der die Urbildmengen in sich kompakter Mengen in sich kompakt sind, eine Homöomorphie zwischen X und Y.*

Beweis. Für $y_0 \epsilon Y$ bezeichnen wir mit $k(y_0)$ die Anzahl der Urbildpunkte von y_0. Zunächst folgt trivialerweise, daß $k(y_0)$ endlich ist; anderenfalls gäbe es nämlich einen Häufungspunkt $x_0 \epsilon X$ der Urbildmenge von y_0 und $U[x_0]$ könnte mithin nicht homöomorph auf $V[y_0]$ übergehen. Wir behaupten nun, daß $k(y_0)$ von y_0 frei ist; ist $\tilde{y} \epsilon Y$ und $k = k(\tilde{y}) \leqslant k(y_0)$ für alle $y_0 \epsilon Y$, so haben wir also zu zeigen: $k(y_0) = k$ für alle $y_0 \epsilon Y$. Dies ergibt sich leicht, wenn man beachtet, daß nach der Voraussetzung der Raum X zusammenhängend ist; denn die Menge aller $y_0 \epsilon Y$, für die

$k(y_0) = k$, ist sowohl offen als abgeschlossen, wofür der Beweis dem Leser überlassen bleiben kann. Ordnen wir jetzt jedem $y_0 \epsilon Y$ die Urbildmenge $G(y_0)$ von y_0, so ist ersichtlich die auf diese Weise erklärte k-deutige Abbildung $G(y)$ von Y auf X stetig. Auf Grund des Satzes I zerfällt sie daher in stetige Zweige; es gibt stetige Abbildungen $g_i(y)$ von Y auf einen Teil von X mit $G(y) = \{g_1(y), \ldots, g_k(y)\}$. Sicherlich ist $X = g_1(Y) + \ldots + g_k(Y)$ und $g_p(Y) g_q(Y) = 0$ für $p \neq q$; da außerdem die Mengen $g_i(Y)$ abgeschlossen sind, so muß $k = 1$ sein; der Raum X ist ja als zusammenhängend vorausgesetzt. Damit ist der Beweis schon erbracht.

Alle Überlegungen lassen sich sofort auf den Fall von topologischen Räumen übertragen.

Die oben angegebenen Sätze wurden der Polnischen Mathematischen Gesellschaft (Abteilung Lwów) in der Sitzung vom 1. 4. 1933 mitgeteilt; vgl. Annales de la Société Polonaise de Mathématique 12 (1933), p. 118-119.

Wir stellen hier die wichtigsten diesen Gegenstand betreffenden Arbeiten zusammen:

C. Carathéodory und H. Rademacher, *Über die Eineindeutigkeit im Kleinen und im Großen stetiger Abbildungen von Gebieten*, Archiv der Mathematik und Physik 26 (1917), p. 1-9.

H. Cartan, *Sur les transformations localement topologiques*, Acta Litt. Sci. Szeged 6 (1933), p. 85-104.

S. Eilenberg, *Sur quelques propriétés des transformations localement homéomorphes*, Fundamenta Mathematicae 24 (1935), p. 35-42.

J. Hadamard, *Sur les transformations punctuelles*, Bulletin de la Société Mathématique de France 34 (1906), p. 71-84.

B. von Kerékjarto, *Zur Theorie der mehrdeutigen stetigen Abbildungen*, Mathematische Zeitschrift 8 (1920), p. 310-319.

S. Stoilow, *Les propriétés topologiques des fonctions analytiques d'une variable*, Annales de l'Institut H. Poincaré 2 (1932), p. 233-266.

— *Sur les transformations continues des espaces topologiques*, Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences 35 (1934), p. 229-235.