Sur les séries lacunaires*

Introduction. Soit $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ un système orthogonal normé tel que $|x_n(t)| < M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. On a alors le théorème:

THÉORÈME 1. *Il existe une suite partielle $\{\overline{x}_n(t)\}$ de $\{x_n(t)\}$ qui jouit de la propriété suivante:*

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{x}_n(t)$$

converge en moyenne avec toute puissance $p \geqslant 1$.

La démonstration est donnée au § 4.

Supposons que le système $\{x_n(t)\}$ soit complet.

THÉORÈME 2. *Soit $y(t)$ une fonction remplissant pour un $q > 1$ la condition*

$$\int_0^1 |y(t)|^q dt < \infty$$

et telle que son développement formel suivant le systéme $\{x_n(t)\}$ soit de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \overline{x}_n(t).$$

Alors

$$\int_0^1 |y(t)|^p dt < \infty$$

pour chaque $p \geqslant 1$.

§ 1. Nous nous servons dans la suite du théorème suivant (1): Etant donné un nombre $p > 2$, deux constantes A, B existent de

* Commenté sur p. 351.

(1) S. Banach et S. Saks [27].

manière que, pour toute paire de fonctions $x(t), y(t)$ qui remplissent les conditions

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty, \qquad \int_0^1 |y(t)|^p dt < \infty$$

on a l'inégalité

$$\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |x(t)|^p dt + p\int_0^1 |x(t)|^{p-2} x(t) y(t)\, dt +$$
$$+A\int_0^1 |y(t)|^p dt + B\sum_{j=2}^{E(p)} \int_0^1 |x(t)|^{p-j} |y(t)|^j dt \ (^1).$$

§ 2. Soit $\{x_n(t)\}$ un système orthogonal remplissant l'hypothèse du théorème 1.

En désignant par r un entier quelconque et par $a_1, \ldots, a_r, E(p)$ des nombres réels où $p > 2$, posons

$$f_n(a_1, \ldots, a_r) = \int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{r} a_i x_i(t)\Big|^{p-2} \Big(\sum_{i=1}^{r} a_i x_i(t)\Big) x_n(t)\, dt. \tag{1}$$

Il est aisé de voir que la suite $\{f_n(a_1, \ldots, a_r)\}$ tend uniformément vers zéro avec $1/n$ dans la sphère $\sum_{i=1}^{r} a_i^2 \leqslant 1$.

Il existe donc un entier $\varphi(r)$ tel que

$$\Big|\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{r} a_i x_i(t)\Big|^{p-2} \Big(\sum_{i=1}^{r} a_i x_i(t)\Big) x_n(t)\, dt\Big| \leqslant \frac{1}{r} \tag{2}$$

pourvu que

$$n \geqslant \varphi(r) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i^2 \leqslant 1.$$

§ 3. Définissons maintenant une suite $\{r_n\}$ de la manière suivante: Posons $r_1 = 1$ et soit r_{n+1} le plus grand des nombres $1+r_n$ et $\varphi(r_n)$. On a évidemment $r_1 < r_2 < \ldots$

Désignons par $\{a_i\}$ une suite qui remplit la condition

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leqslant 1,$$

(1) $E(p)$ est le plus grand nombre naturel $\leqslant p$.

d'ailleurs quelconque. La série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{r_i}(t)$ converge en moyenne vers une fonction $x(t)$ à carré sommable. Nous prouverons que

$$\int_0^1 |x(t)|^p\,dt < C, \tag{3}$$

le nombre C étant indépendant de la suite $\{a_i\}$. En effet, en posant

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{r_i}(t)$$

on a, d'après le § 1,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |s_{n+1}(t)|^p\,dt \leqslant \int_0^1 |s_n(t)^p\,dt + p\,a_{n+1}\int_0^1 |s_n(t)|^{p-2} s_n(t)\, x_{r_{n+1}}(t)\,dt + \\ + A\,|a_{n+1}|^p \int_0^1 |x_{r_{n+1}}(t)|^p\,dt + \\ + B\sum_{j=2}^{E(p)} |a_{n+1}|^j \int_0^1 |s_n(t)|^{p-j}\, |x_{r_{n+1}}(t)|^j\,dt.\end{aligned}$$

On voit en vertu de (2) et de la définition des nombres r_i que la valeur absolue de la seconde intégrale est moindre que $1/r_n \leqslant 1/n$.

Comme

$$\int_0^1 |x_{r_{n+1}}(t)|^j\,dt \leqslant M^j \leqslant M^p \qquad (j \leqslant p)$$

(évidemment $M \geqslant 1$ en vertu de $\int_0^1 x_n^2(t)\,dt = 1$) et

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 |s_n(t)|^{p-j}\,dt \leqslant 1 + \int_0^1 |s_n(t)|^p\,dt \\ |a_{n+1}|^j \leqslant a_{n+1}^2\end{aligned}\right\} \qquad (2 \leqslant j \leqslant p),$$

il vient

$$\int_0^1 |s_{n+1}(t)|^p\,dt \leqslant (1 + BpM^p a_{n+1}^2)\int_0^1 |s_n(t)|^p\,dt + \frac{p\,|a_{n+1}|}{n} + AM^p a_{n+1}^2.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|/n$ remplissant l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n+1}|}{n} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

on en conclut aisément l'existence du nombre C.

Si l'on ne suppose plus que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leqslant 1$ on a encore, d'après (3)

$$\Big(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\Big)^{1/2} = C\Big(\int_0^1 x^2(t)\,dt\Big)^{1/2}.$$

On a en particulier, pour toute suite finie $\{\gamma_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, l'inégalité

$$\Big(\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_{r_i}(t)\Big|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2\Big)^{1/2}$$

qui montre que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{r_i}(t)$ converge en moyenne avec la p-ème puissance si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$.

Nous dirons que la suite partielle $\{x_{r_n}(t)\}$ satisfait à la condition C_p lorsque l'inégalité $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ entraîne la convergence en moyenne avec la p-ème puissance de la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{r_i}(t)$.

§ 4. Soit $\{p_j\}$ $(2 < p_1 < p_2 < \ldots)$ une suite tendant vers l'infini.

En vertu du paragraphe précédent, il existe une suite partielle $\{x_{r_n}\}$ qui satisfait à la condition C_{p_1}. Posons $x_{r_n} = x_n^{(1)}$.

La suite $\{x_n^{(1)}\}$ contient à son tour une suite partielle $\{x_{\bar{r}_n}^{(1)}\}$ qui satisfait à la condition C_{p_2}. Posons $x_{\bar{r}_n}^{(1)} = x_n^{(2)}$.

En procédant ainsi on obtient une infinité de suites $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}, \ldots$ qui satisfont respectivement aux conditions $C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots$ et telles que chaque suite contienne la suivante.

La suite diagonale $\{\bar{x}_n\}$ sera contenue dans toute suite $\{x_n^{(k)}\}$ et satisfaira donc à la condition C_{p_k} $(k = 1, 2, \ldots)$. Si donc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}_n(t)$ converge alors en moyenne avec toute puissance $p \geqslant 1$.

Il en résulte aisément que la fonction

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{x}_n(t)$$

est sommable avec toute puissance $p \geqslant 1$.

§ 5. Supposons maintenant que le système $\{x_n(t)\}$ soit complet; c'est-à-dire qu'une fonction sommable $z(t)$ remplissant les équations

$$\int_0^1 x_n(t) z(t) dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

soit égale à zéro dans $(0, 1)$.

Soit $y(t)$ une fonction sommable avec une puissance $q > 1$ et soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \overline{x}_n(t)$$

son développement formel suivant le système $\{x_n(t)\}$. Désignons par $\{a_n\}$ une suite telle que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. D'après le paragraphe précédent, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \overline{x}_n(t)$ converge en moyenne avec toute puissance $p \geqslant 1$, donc aussi avec la $q/(q-1)$-ème puissance. Il s'en suit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 y(t) \overline{x}_n(t) dt$$

c'est-à-dire la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

est convergente.

Or, $\{a_n\}$ étant une suite quelconque qui remplit l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ est nécessairement convergente.

La fonction $y(t)$ est donc à carré sommable, donc, en vertu du paragraphe précédent, sommable avec toute puissance $p \geqslant 1$.

Sur la mesure de Haar *

Cette Note est consacrée à la théorie de la mesure due à Alfred Haar (1). L'objet de sa belle et importante théorie est la notion de mesure (définie par lui) dans les espaces métriques séparables et localement compacts où la notion d'ensembles congruents est définie. Cette mesure remplit les conditions habituelles de la mesure lebesguienne; les ensembles congruents sont de mesure égale et tous les ensembles boreliens (plus généralement, tous les ensembles analytiques) sont mesurables. La théorie trouve des applications importantes dans celle des groupes continus.

§ 1. Un ensemble E s'appelle *espace métrique*, lorsqu'une fonction réelle non négative $\varrho(a, b)$, dite *distance* de deux points variables a et b de E, est définie de façon que l'on ait toujours $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$, $\varrho(a, c) \leqslant \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$, $\varrho(a, a) = 0$ et $\varrho(a, b) > 0$ pour $a \neq b$.

La notion de distance dans l'espace E détermine, comme d'ordinaire, celles de *point d'accumulation*, d'ensembles *fermés*, *ouverts*, de *fermeture* d'un ensemble A (que nous désignerons par $\overline{A}$), etc. Un ensemble $A \subset E$ sera dit *compact*, lorsque chaque sous-ensemble infini de A admet (dans E) au moins un point d'accumulation.

Un espace E s'appellera *localement compact*, lorsque chacun de ses points est contenu dans une sphère (2) compacte. Il est dit *séparable*, lorsqu'il contient un ensemble *dénombrable*, *dense* dans lui.

§ 2. Nous admettrons dans la suite que E est un espace métrique, séparable, localement compact et que pour les ensembles situés dans E la relation de congruence $\cong$ est définie de façon que les conditions suivantes se trouvent satisfaites:

I_1. *$A \cong B$ entraîne $B \cong A$. $A \cong B$ et $B \cong C$ entraînent $A \cong C$.*

I_2. *Si A est un ensemble ouvert compact et $A \cong B$, l'ensemble B est aussi ouvert et compact.*

---

* Commenté sur p. 352.

(1) Voir l'ouvrage de A. Haar [1], dont j'emprunte les méthodes et les principaux résultats.

(2) Le terme *sphère* désigne dans cette Note la *sphère ouverte*.