Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*

Einleitung

Im § 1 wird eine Methode angegeben, welche die Existenz einer stetigen Funktion, für die in jedem Punkte eine der rechtsseitigen Derivierten unendlich groß ist, in einfacher Weise festzustellen gestattet. Diese Methode erlaubt zugleich zu zeigen, daß die Menge der Funktionen, welche die obige Eigenschaft besitzen, von der zweiten Kategorie ist. Sie ist verschieden von derjenigen des Herrn Mazurkiewicz (1).

Im § 2 beweise ich einen allgemeinen Satz aus der Theorie der Funktionaloperationen, welcher das Ergebnis von § 1 als besonderen Fall enthält. Andere Anwendungen dieses Satzes findet man in einer Arbeit des Herrn Kaczmarz, sowie in einer Arbeit von mir und Herrn Auerbach in demselben Bande dieser Zeitschrift.

§ 1

Wir bezeichnen mit E den Raum der für $0 \leqslant t \leqslant 1$ erklärten und stetigen Funktionen $x = x(t)$ und setzen

$$\|x\| = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \qquad (x \subset E).$$

Satz 1. *Die Teilmenge A von E derjenigen Funktionen, für welche in keinem Punkte $t \neq 1$ die beiden rechtsseitigen Derivierten endlich sind, ist von der zweiten Kategorie, ihre Komplementärmenge $\bar{A}$ ist von der ersten Kategorie.*

---

* Commenté sur p. 348.

(1) S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions sans derivées*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 92-94.

Beweis. Wir bezeichnen mit E_n die Menge derjenigen Funktionen x aus E, deren jede für mindestens einen (von ihr abhängigen) Wert von t $(0 \leqslant t \leqslant 1-1/n)$ die Ungleichung

$$\left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right| \leqslant n \qquad (0 < h \leqslant 1-t)$$

erfüllt.

Die Mengen E_n $(n = 2, 3, \ldots)$ sind offenbar abgeschlossen und man hat

$$\bar{A} = \sum_{n=2}^{\infty} E_n.$$

Die Menge $\bar{A}$ ist also ein F_σ, daher A selbst ein G_δ.

Es genügt zu zeigen, daß jedes E_n nirgendsdicht ist.

Ist etwa E_N keine nirgendsdichte Menge, so muß es, als abgeschlossene Menge, eine Kugel K enthalten. Es gibt offenbar ein innerhalb dieser Kugel enthaltenes Polynom w und eine Zahl $r > 0$ derart, daß jedes x aus E, für welches $\|x-w\| < r$ ist, in K und damit in E_N enthalten ist.

Wir bezeichnen mit $g(t)$ irgendeine Funktion aus E, welche für $0 \leqslant t < 1$ eine rechtsseitige Ableitung $g'_+(t)$ besitzt und den Bedingungen

$$\|g\| < r, \qquad |g'_+(t)| > \left\| \frac{dw}{dt} \right\| + N \qquad (0 \leqslant t < 1)$$

genügt (man bildet leicht solche stückweise lineare Funktionen).

Die Funktion $z = w + g$ ist in E enthalten und man hat für $0 \leqslant t < 1$

$$|z'_+(t)| \geqslant g'_+(t) - \left| \frac{dw}{dt} \right| > \left\| \frac{dw}{dt} \right\| + N - \left\| \frac{dw}{dt} \right\| = N.$$

Daher gehört z nicht zu E_N.

Anderseits ist aber $\|w-z\| = \|g\| < r$ also $z \subset K \subset E_N$, was einen Widerspruch ergibt.

Bemerkung. Man beweist ganz ähnlich den folgenden Satz:

Sei $\{h_p\}$ eine beliebige nach Null konvergente Folge positiver Zahlen. Mit Ausnahme gewisser Funktionen, welche eine Menge erster Kategorie bilden, besitzt jedes x aus E die folgende Eigenschaft:

Es ist

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \left| \frac{x(t+h_p)-x(t)}{h_p} \right| = +\infty$$

für alle $t < 1$.

§ 2

Wir beweisen jetzt einen Satz, welcher denjenigen von § 1 als Spezialfall enthält.

Es sei E ein vektorieller normierter und vollständiger Raum und $U(x, t, h)$ eine für alle x aus E, sowie alle den Ungleichungen

$$0 \leqslant t < 1, \quad 0 < h \leqslant 1-t$$

genügenden Werte von t, h erklärte Funktionaloperation, welche jedem dieser Wertsysteme (x, t, h) eine nichtnegative Zahl zuordnet, derart, daß:

1) bei festem h ist $U(x, t, h)$ eine stetige Funktionaloperation von x, t,

2) für beliebige x, y aus E und beliebige, die angegebenen Ungleichungen erfüllende Werte von t, h ist

$$U(-x, t, h) = U(x, t, h)$$

und

$$U(x+y, t, h) \leqslant U(x, t, h) + U(y, t, h).$$

Wir setzen ferner voraus, daß eine überalldichte Teilmenge H von E existiert, von der Eigenschaft, daß jedem Elemente w von H eine positive Zahl M_w zugeordnet werden kann, für welche

$$U(w, t, h) \leqslant M_w \quad (0 \leqslant t < 1, 0 < h \leqslant 1-t)$$

ist. Bezeichnet noch A die Menge derjenigen Elemente $x \subset E$, für welche

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\, U(x, t, h) = +\infty \quad (0 \leqslant t < 1)$$

ist, so kann man, unter den vorstehenden Voraussetzungen, den folgenden Satz aussprechen:

Satz 2. *Wenn zu beliebig gegebenen Zahlen $r > 0$ und $M > 0$ stets ein Element g von E vorhanden ist von der Eigenschaft, daß:*

a) $\|g\| < r$,

b) *zu jedem $t \neq 1$ ein $h_t > 0$ existiert, wofür $U(g, t, h_t) > M$ ist, so ist die Menge A von der zweiten Kategorie und ihre Komplementärmenge $\bar{A}$ von der ersten Kategorie.*

Der Beweis wird ähnlich wie in § 1 geführt. Anstatt des Ausdruckes

$$\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right|$$

betrachten wir $U(x, t, h)$. Mit E_n bezeichnen wir jetzt die Menge derjenigen Elemente x aus E, deren jedes für mindestens einen (von ihm abhängigen) Wert von t $(0 \leqslant t \leqslant 1-1/n)$ die Ungleichung

$$U(x, t, h) \leqslant n \quad (0 < h \leqslant 1-t)$$

erfüllt.

Die Mengen E_n sind abgeschlossen und es ist

$$\bar{A} = \sum_{n=2}^{\infty} E_n.$$

Es genügt wieder zu zeigen, daß alle E_n nirgendsdicht sind.

Wir nehmen an, E_N sei nicht nirgendsdicht. Dann gibt es ein Element $w \subset H$ und ein $r > 0$, so daß die durch die Ungleichung $\|x-w\| < r$ gegebene Kugel K in E_N enthalten ist.

Da w ein Element von H ist, gibt es ein $M > 0$, für welches die Ungleichung

$$U(w, t, h) < M-N \quad (0 \leqslant t < 1, 0 < h \leqslant 1-t)$$

stattfindet.

Nach Voraussetzung gibt es ein Element g, welches bei unserer Wahl von r und M, den Bedingungen a), b) unseres Satzes entspricht.

Setzt man also $z = w+g$, so ist einerseits $\|z-w\| = \|g\| < r$, d. h., z ist in K enthalten.

Anderseits hat man für alle $t \neq 1$ und entsprechende h_t

$$U(z, t, h_t) \geqslant U(g, t, h_t) - U(w, t, h_t) > M-(M-N) = N,$$

woraus folgt, daß z nicht in K enthalten sein kann.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Man beweist ganz ähnlich den Satz, welcher aus dem obigen entsteht, wenn man für h nur diejenigen Werte zuläßt, welche einer gegebenen nach Null konvergenten Folge positiver Zahlen $\{h_p\}$ angehören.

Bemerkung 2. Bezeichnet man, wie in § 1, mit E den Raum der in $(0, 1)$ stetigen Funktionen $x(t)$, so genügt das Funktional

$$U(x, t, h) = \left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right|$$

allen oben ausgesprochenen Bedingungen.

Wie leicht zu sehen, kann man für H die Menge aller Polynome nehmen.

Man erhält Funktionen $g(t)$, welche den Forderungen a), b) von Satz 2 entsprechen, indem man z. B. stückweise lineare Funktionen bildet, deren absoluter Betrag klein ist, deren rechtsseitige Ableitung aber überall größer als eine beliebig gegebene Zahl ist.

Daher ist Satz 1 in der Tat ein Spezialfall von Satz 2. Andere Anwendungen dieses letzteren Satzes findet man in einer Arbeit des Herrn Kaczmarz (1).

In der gemeinsam mit Herrn Auerbach (2) veröffentlichten Arbeit wird der Satz 2 sowie die zu seinem Beweise angewandte Methode benützt.

Bemerkung 3. Es ist interessant, daß man unter den eingangs dieses § gemachten Voraussetzungen, jedoch ohne die außerdem in Satz 2 gemachte Annahme zu benützen, den folgenden Satz beweisen kann:

Satz 3. *Die Menge A ist entweder leer oder von der zweiten Kategorie. Im letzteren Falle ist ihre Komplementärmenge von der ersten Kategorie.*

Beweis. Bei dem Beweise von Satz 2 zeigten wir bereits, daß die Menge A ein G_δ ist. Wir nehmen an, daß sie nicht leer ist. Für ein beliebiges $x_0 \subset A$ und jedes $w \subset H$ hat man dann

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\, U(x_0+w, t, h) \geqslant \overline{\lim_{h\to 0}}\, U(x_0, t, h) - \overline{\lim_{h\to 0}}\, U(w, t, h),$$

woraus nach Definition der Mengen A, H folgt, daß x_0+w in A enthalten ist. Da die Menge H überall dicht in E ist, gilt das Gleiche von der Menge aller x_0+w, also auch von A.

Da eine überall dichte Menge vom Typus G_δ bekanntlich von der zweiten Kategorie ist, ist damit gezeigt, daß A von der zweiten Kategorie ist. Da ferner jedes G_δ die Baire'sche Bedingung erfüllt, ist die Komplementärmenge $\bar{A}$ von der ersten Kategorie.

(1) S. Kaczmarz, *Integrale vom Dinischen Typus*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 189-199.

(2) H. Auerbach und S. Banach, *Über die Höldersche Bedingung*, ibidem 3 (1931), p. 180-184.

Über die Höldersche Bedingung*

von

H. Auerbach und S. Banach

Wir beweisen in dieser Arbeit als Anwendung einer von Herrn S. Banach gleichzeitig veröffentlichten Methode (1) folgende zwei Sätze:

Satz 1. *Sei $\omega(h)$ eine für $h>0$ erklärte Funktion von der Eigenschaft, daß $\omega(h)>0$ und $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h)=0$ ist. Ferner bezeichne E den Raum aller stetigen Funktionen $x(t)$ von der Periode 1. Abgesehen von gewissen $x(t)$, welche eine Menge erster Kategorie bilden, besitzt jedes x aus E die folgende Eigenschaft:*

Es ist

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)}\right| = +\infty$$

für alle t.

Satz 2. *Es bezeichne H^α $(0<\alpha\leqslant 1)$ den Raum aller Funktionen $x(t)$ von der Periode 1, welche der Hölderschen Bedingung*

$$|x(t+h)-x(t)| \leqslant |h|^\alpha$$

genügen. Abgesehen von gewissen $x(t)$, welche eine Menge erster Kategorie bilden, besitzt jedes x aus H^α die folgende Eigenschaft:

Es ist

$$\overline{\lim_{k\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h^\beta}\right| = +\infty$$

für alle t und alle $\beta>\alpha$ (2).

* Commenté sur p. 349.

(1) S. Banach [*34*].

(2) Beispiele stetiger Funktionen, welche diese Eigenschaft für $\beta=1$ besitzen, findet man in. S. Ruziewicz, *Sur les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 7 (1928), p. 68-74, und A. Zygmund, *Uwaga o funkcjach nieróżniczkowalnych*, Mathesis Polska 4 (1929), p. 1-7.