3. En généralisant un théorème de Baire, M. Kuratowski [1] a démontré l'énoncé suivant: *étant donnée une suite convergente de fonctions $f_n(x)$ continues et définies sur un espace métrique séparable et dont les valeurs appartiennent à un espace métrique arbitraire, les points de discontinuité de la fonction $f(x) = \lim f_n(x)$ constituent un ensemble de I^{re} catégorie.*

Les résultats que nous venons d'établir permettent d'omettre dans cet énoncé la condition que l'espace soit *séparable*. A ce but il suffit, dans le raisonnement de M. Kuratowski, au lieu d'appliquer le théorème du No 2 aux espaces séparables — de l'appliquer aux espaces métriques les plus généraux.

D'une façon analogue, on étend aux espaces métriques (séparables ou non) le théorème suivant (provenant aussi de Baire) [2]: *chaque fonction représentable analytiquement, définie sur un espace métrique, est continue, lorsqu'on néglige les ensembles de I^{re} catégorie.*

4. On dit qu'un ensemble A *jouit de la propriété de Baire*, s'il n'existe aucune sphère dans laquelle l'ensemble A et son complémentaire soient tous deux en chaque point de deuxième catégorie.

Il résulte d'un raisonnement de M. Lebesgue [3] que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété de Baire jouit encore de cette propriété, si l'on suppose l'espace séparable. Or, cette dernière hypothèse peut être omise, lorsqu'on applique le théorème du No 2; le raisonnement de M. Lebesgue est alors valable pour chaque espace métrique, qu'il soit séparable ou non.

De là résulte aussitôt que *dans chaque espace métrique tous les ensembles de Borel jouissent de la propriété de Baire* [4].

---

(1) Fundamenta Mathematicae 5 (1923), p. 80.
(2) cf. ibid., p. 82.
(3) Journal de Mathématique, S. 6, t. I, p. 186.
(4) Pour d'autres applications du théorème démontré ici à la propriété de Baire, voir la note de M. Kuratowski, publiée dans Studia Mathematica 16 (1930).

Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen *

Einleitung

Seien X und Y zwei metrische Räume. Der Raum Y sei außerdem separabel. Wir betrachten Operationen

$$y = f(x),$$

welche jedem Elemente $x \subset X$ ein bestimmtes Element $y \subset Y$ zuordnen.

Zwei Arten dieser Operationen werden gewöhnlich betrachtet. Die erste bilden die (mittels stetiger Operationen) analytisch darstellbaren Operationen; wir bezeichnen ihre Gesamtheit mit B. Die zweite Art bilden die im Sinne von Borel meßbaren Operationen; sie sei mit L bezeichnet.

Die zu B gehörenden Operationem werden folgendermaßen erklärt: Eine stetige Operation zählen wir zur nullten Klasse B^0. Die Grenzwerte der Folgen stetiger Operationen bilden die erste Klasse B^1. Allgemein besteht die ξ-te Klasse B^ξ (wobei ξ eine beliebige endliche oder unendliche Ordnungszahl $< \Omega$ bedeutet) aus denjenigen Operationen, welche als Grenzwerte von Folgen von Operationen niedrigerer Klassen darstellbar sind.

Die Vereinigungsmenge aller Klassen B^ξ bildet die Gesamtheit B der (mittels stetiger Operationen) analytisch darstellbaren Operationen.

Um die im Sinne von Borel meßbaren Operationen zu erklären, definieren wir zunächst die zwei Borelschen Mengenklassen P^ξ und Q^ξ.

Die Klasse P^1 besteht aus allen abgeschlossenen, die Klasse Q^1 aus allen offenen Mengen. Die Klasse P^ξ ist die Gesamtheit der in der Form $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ darstellbaren Mengen, wobei $A_n \subset Q^{\xi_n}$ $(\xi_n < \xi, n = 1, 2, \ldots)$ ist. Die Klasse Q^ξ ist die Gesamtheit der in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ darstellbaren Mengen, wobei $A_n \subset P^{\xi_n}$ $(\xi^n < \xi, n = 1, 2, \ldots)$ ist.

---

* Commenté sur p. 347.

Eine Operation $f(x)$ heißt *meßbar im Sinne von Borel von der Klasse* $\xi \geqslant 0$, wenn für jede offene Menge $G \subset Y$ die Menge $\mathrm{E}[f(x) \subset G]$ (1) der Klasse $Q^{\xi+1}$ angehört. Wir bezeichnen die im Sinne von Borel meßbaren Operationen der Klasse ξ mit L^ξ und mit L die Gesamtheit aller derartigen Operationen.

Die Operationen B wurden zuerst von Herrn Borel definiert, die Operationen L von Herrn Lebesgue. Von Herrn Hausdorff (2) wurde das Problem gestellt, die Beziehungen zu finden, welche zwischen den Mengen B und L bestehen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Beziehungen untersucht.

Wir erklären jetzt eine neue Art von Operationen, nämlich die mit Hilfe von Operationen der Klasse L^1 analytisch darstellbaren Operationen. Man erhält sie auf folgende Weise:

Die Klasse b^1 sei mit L^1 identisch. Zur Klasse b^2 zählen wir die Grenzwerte von Folgen aus b^1; allgemein besteht die Klasse b^ξ aus Grenzwerten von Folgen, deren Operationen den Klassen niedrigerer Ordnung angehören.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit den Beziehungen, welche zwischen den Klassen B, L und b bestehen.

Ist Y die Menge aller reellen Zahlen, so ist $B^\xi \equiv L^\xi$ $(\xi \geqslant 0)$, woraus offenbar $B^\xi \equiv b^\xi \equiv L^\xi$ $(\xi \geqslant 1)$ folgt.

Wenn Y ein anderer Raum ist, so finden die obigen Identitäten im allgemeinen nicht statt, wie das folgende Beispiel von Herrn Hausdorff (3) zeigt:

Es bezeichne X die Gesamtheit der reellen Zahlen und Y eine aus nur zwei Elementen y_1, y_2 bestehende Menge. Jede stetige Operation ist also von der Form $f(x) = y_1$, oder $f(x) = y_2$. Das sind zugleich alle Operationen B.

Die Operation, welche durch

$$f(0) = y_1,$$
$$f(x) = y_2 \qquad (x \neq 0)$$

(1) Diese von Herrn Lebesgue eingeführte Bezeichnung bedeutet die Menge derjenigen x, welche die in der Klammer angegebene Eigenschaft besitzen; im obigen Falle die Menge derjenigen x, für welche $f(x)$ in G enthalten ist.

(2) Vgl. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 2 Aufl., p. 268. Es ist zu beachten, daß Herr Hausdorff unsere Operationen L mit (M^ξ, N^ξ) und unsere Operationen B mit f^ξ bezeichnet.

Zwischen unseren und den Hausdorff'schen Bezeichnungen bestehen folgende Beziehungen:

$$L^\xi \equiv (M^\xi, N^\xi), \quad B^\xi \equiv f^\xi \quad (\xi < \omega),$$
$$L^\xi \equiv (M^{\xi+1}, N^{\xi+1}), \quad B^\xi \equiv f^{\xi+1} \quad (\xi \geqslant \omega).$$

(3) Vgl. l. c. (2), p. 268 ff.

definiert ist, gehört, wie leicht zu sehen, zu L^1. In diesem Falle ist also $L^1 \neq B^1$.

Man bemerkt leicht, daß

$$B^\xi \subset b^\xi \subset L^\xi \qquad (\xi \geqslant 1).$$

Das folgt aus $B^0 \equiv L^0$, $b^1 \equiv L^1$ und aus der Tatsache, daß die Grenzwerte der Folgen von im Sinne von Borel meßbaren Operationen von Klasse $< \xi$ alle der Klasse L^ξ angehören.

In dieser Arbeit beweise ich die Sätze:

1. Wenn der Raum Y separabel ist, so hat man

$$b^\xi \equiv L^\xi \qquad (\xi \geqslant 1).$$

2. Wenn sich zwei beliebige Punkte des Raumes Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen, so ist

$$B^\xi \equiv L^\xi \qquad (\xi \neq 1)$$

(für $\xi = 1$ hat man $B^1 \subset L^1 \subset B^2$).

In diesen Sätzen wird über den Raum X lediglich vorausgesetzt, daß er metrisch ist.

Es wäre interessant festzustellen, unter welchen Voraussetzungen bezüglich des Raumes Y die Identität $B^\xi \equiv L^\xi$ für jedes ξ stattfindet. Wie man zeigen kann, ist das der Fall für gewisse vektorielle Räume, insbesondere solche vom Typus (B) (1).

Ich erwähne noch, daß, wie Herr Kuratowski bewiesen hat (s. Kuratowski [3], S. 281), für jeden metrischen Raum Y ein ihn enthaltender metrischer Raum H definiert werden kann, in welchem

$$B^\xi \equiv L^\xi \qquad (\xi \geqslant 0)$$

stattfindet, wobei in Y die frühere Metrik beibehalten wird.

In § 1 beweise ich eine Reihe von Hilfssätzen. Der § 2 enthält die Beweise der Sätze 1 und 2.

§ 1

HILFSSATZ 1. *Wenn die Mengen G, H so beschaffen sind, daß $G \supset H$, $G \subset Q^\xi$, $H \subset P^\xi$, so gibt es eine Menge $K \subset P^\xi \cdot Q^\xi$, derart daß $G \supset K \supset H$.*

Beweis. Vgl. W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ambigus*, Fund. Math. 6.

(1) D. h. vektorielle, normierte und vollständige Räume.

Hilfssatz 2. *Wenn $A \subset P^{\xi} \cdot Q^{\xi}$, so gibt es eine Folge von Mengen $\{A_j\}$ ($A_j \subset P^{a_j} \cdot Q^{a_j}$, $a_j < \xi$), für welche*

$$A = \lim_{j \to \infty} A_j$$

ist (¹).

Beweis. Nach Voraussetzung ist

(1) $$A = \sum_{j=1}^{\infty} H_j = \prod_{j=1}^{\infty} G_j$$

wobei

$$H_j \subset H_{j+1} \quad \text{und} \quad H_j \subset P^{\xi_j} \quad (\xi_j < \xi),$$

$$G_j \supset G_{j+1} \quad \text{und} \quad G_j \subset Q^{\eta_j} \quad (\eta_j < \xi)$$

angenommen werden kann.

Wir bezeichnen mit ε_j die größere der Ordnungszahlen ξ_j, η_j.

Wegen $G_j \supset A \supset H_j$ gibt es nach Hilfssatz 1 eine Menge $A_j \subset P^{\varepsilon_j} \cdot Q^{\varepsilon_j}$, für welche $G_j \supset A_j \supset H_j$.

Wie leicht zu sehen, folgt aus (1)

$$A_j = \lim_{j \to \infty} A_j.$$

Hilfssatz 3. *Damit eine Operation $f(x)$, deren Wertmenge isoliert ist, der Klasse L^{ξ} angehört, ist notwendig und hinreichend, daß sie jeden ihrer möglichen Werte in einer Menge annimmt, welche in $P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$ enthalten ist.*

Beweis. Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Da sie isoliert ist, gibt es zu jedem y_i ein $\varepsilon_i > 0$ derart daß $(y_i, y_j) > \varepsilon_i$ $(j \neq i)$ ist. Die Elemente y, welche der Ungleichung $(y, y_i) < \varepsilon_i$ genügen, bilden eine offene Menge; sie sei mit K_i bezeichnet.

Offenbar ist

$$\underset{x}{E}[f(x) = y_i] = \underset{x}{E}[f(x) \subset K_i] = X - \underset{x}{E}\Big[f(x) \subset \sum_{j \neq i} K_j\Big].$$

Da $\sum_{j \neq i} K_j$ ebenfalls offen ist, so folgt aus $f(x) \subset L^{\xi}$, daß $\underset{x}{E}[f(x) = y_i] \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$.

Die Bedingung ist also notwendig.

Sei G eine beliebige offene Menge und $\{y_{i_n}\}$ die darin enthaltene Teilfolge von $\{y_i\}$.

(¹) D. h. es ist

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} A_j = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=n}^{\infty} A_j.$$

Vgl. z. B. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue*, p. 9.

Dann ist

$$\underset{x}{E}[f(x) \subset G] = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E}[f(x) = y_{i_n}].$$

Hieraus folgt, daß unsere Bedingung zugleich hinreichend ist.

Bemerkung. Aus der letzten Gleichung folgt, daß, wenn die Wertmenge von $f(x)$ abzählbar ist und $f(x)$ jeden dieser Werte in einer Menge aus $P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$ annimmt, die Operation $f(x)$ von der Klasse L^{ξ} ist.

Hilfssatz 4. *Jede Operation $f(x)$ aus L^{ξ} $(\xi \geqslant 1)$ ist die Grenze einer gleichmäßig konvergenten Folge von Operationen der Klasse L^{ξ}, deren jede eine isolierte Wertmenge besitzt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da der Raum Y separabel ist, gibt es eine abzählbare und isolierte Menge $\{y_n\}$ von der Eigenschaft, daß zu jedem y aus Y ein y_n existiert derart, daß $(y_n, y) < \varepsilon$ ist.

Sei

(1) $$G_n = \underset{x}{E}\big[(f(x), y_n) < 2\varepsilon\big], \qquad H_n = \underset{x}{E}\big[(f(x), y_n) \leqslant \varepsilon\big].$$

Wegen $G_n \subset Q^{\xi+1}$, $H_n \subset P^{\xi+1}$ und $G_n \supset H_n$, gibt es nach Hilfssatz 1 eine Menge $K_n \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$, für welche $G_n \supset K_n \supset H_n$ ist.

Man hat

(2) $$X = \sum_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Zu jedem $x_0 \subset X$ gibt es nämlich ein y_n derart, daß $(f(x_0), y_n) < \varepsilon$ ist. Daher ist $x_0 \subset H_n \subset K_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} K_n$.

Wir setzen

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

und erklären eine Operation $\varphi(x)$ wie folgt:

(3) $$\varphi(x) = \begin{cases} y_1 & \text{für} \quad x \subset K_1, \\ y_n & \text{für} \quad x \subset S_n - S_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Da $S_n \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$, gilt dasselbe für $S_n - S_{n-1}$. Auf Grund von Hilfssatz 3 folgt hieraus, daß $\varphi(x)$ der Klasse L^{ξ} angehört.

Wenn $x \subset S_n - S_{n-1}$, so hat man $x \subset K_n \subset G_n$ und daher wegen (1)

$$(f(x), y_n) < 2\varepsilon,$$

d. h. nach (3)

$$(f(x), \varphi(x)) < 2\varepsilon.$$

Aus (2) folgt, daß diese Ungleichung für alle x stattfindet.

Da ε eine beliebige positive Zahl ist, ist damit dieser Hilfssatz bewiesen.

HILFSSATZ 5. *Jede Operation $f(x)$ der Klasse L^ξ $(\xi > 1)$, deren Wertmenge isoliert ist, läßt sich als Grenze einer Folge von Operationen von niedrigerer L-Klasse darstellen, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.*

Beweis. Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Setzt man $A_i = \underset{x}{E}[f(x) = y_i]$, so ist $A_i \subset P^{\xi+1}\cdot Q^{\xi+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Es gibt also nach Hilfssatz 2 Mengenfolgen $\{A_i^j\}$ aus $P^\xi \cdot Q^\xi$, für welche

$$(1) \qquad \lim_{j\to\infty} A_i^j = A_i.$$

Wir setzen $\sum_{i=1}^{n} A_i^j = S_n^j$ und erklären eine Folge von Operationen $\{f_j(x)\}$ $(j > 2)$ wie folgt:

$$(2) \qquad f_j(x) = \begin{cases} y_1 & \text{für} \quad x \subset A_1^j, \\ y_n & \text{für} \quad x \subset S_n^j - S_{n-1}^j \qquad (j > n > 1), \\ y_j & \text{für} \quad x \subset X - S_{j-1}^j. \end{cases}$$

Die Operation $f_j(x)$ nimmt also nur endlich viele Werte an. Da die Mengen A_i^j, S_n^j, $S_n^j - S_{n-1}^j$ und $X - S_{j-1}^j$ in $P^\xi \cdot Q^\xi$ enthalten sind, ist $f_j(x)$ von einer niedrigeren Klasse als L^ξ.

Sei, für ein gewisses x_0, $f(x_0) = y_n$. Wegen (1) gibt es ein J derart, daß für $j > J$ die Mengen A_i^j $(i \leqslant n-1)$ x_0 nicht enthalten, aber $x_0 \subset A_n^j$ ist. Hieraus folgt wegen (2) für $j > n$ und $j > J$:

$$f_j(x_0) = y_n, \qquad \text{daher} \qquad \lim_{j\to\infty} f_j(x_0) = f(x_0).$$

Es ist also $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ für jedes x.

HILFSSATZ 6. *Wenn*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= f(x) \\ \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) &= \varphi(x) \end{aligned}\right\} f_n(x), \varphi_n(x) \subset L^{\alpha_n} \qquad (\alpha_n \geqslant 1, n = 1, 2, \ldots)$$

und

$$\big(f(x), \varphi(x)\big) < \varepsilon \qquad (x \subset X)$$

ist, so gibt es eine Folge $\{\psi_n(x)\}$ $(\psi_n(x) \subset L^{\alpha_n})$, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \varphi(x)$$

und

$$\big(f_n(x), \psi_n(x)\big) < 2\varepsilon \qquad (x \subset X, n = 1, 2, \ldots)$$

stattfindet.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\{\varepsilon_n\}$ eine nach Null konvergierende Folge positiver Zahlen $< \varepsilon$.

Nach Hilfssatz 4 gibt es für jedes n zwei Operationen $\bar{f}_n(x)$, $\bar{\varphi}_n(x)$ aus L^{α_n}, deren Wertmenge isoliert ist und welche den Ungleichungen

$$(1) \qquad \big(f_n(x), \bar{f}_n(x)\big) < \varepsilon_n, \qquad \big(\varphi_n(x), \bar{\varphi}_n(x)\big) < \varepsilon_n$$

genügen.

Wir setzen

$$(2) \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}_n(x), & \text{wenn} \quad \big(\bar{\varphi}_n(x), \bar{f}_n(x)\big) < \varepsilon, \\ \bar{f}_n(x), & \text{wenn} \quad \big(\bar{\varphi}_n(x), \bar{f}_n(x)\big) \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort

$$\big(\psi_n(x), \bar{f}_n(x)\big) < \varepsilon.$$

Daher ist

$$\big(f_n(x), \psi_n(x)\big) \leqslant \big(f_n(x), \bar{f}_n(x)\big) + \big(\bar{f}_n(x), \psi_n(x)\big) < \varepsilon + \varepsilon_n < 2\varepsilon.$$

Wir zeigen jetzt, daß $\psi_n(x)$ der Klasse L^{α_n} angehört.

Sei $\{y_l\}$ die Menge der Werte, welche $\bar{f}_n(x)$ und $\bar{\varphi}_n(x)$ annehmen. Man hat für jedes k

$$\underset{x}{E}[\psi_n(x) = y_k]$$
$$= \underset{x}{E}[\bar{\varphi}_n(x) = y_k]\cdot \underset{x}{E}\big[\big(\bar{f}_n(x), y_k\big) < \varepsilon\big] + \underset{x}{E}[\bar{f}_n(x) = y_k]\cdot \underset{x}{E}\big[\big(\bar{\varphi}_n(x), y_k\big) \geqslant \varepsilon\big].$$

Die Mengen $\underset{x}{E}[\bar{\varphi}_n(x) = y_k]$ und $\underset{x}{E}[\bar{f}_n(x) = y_k]$ sind nach Hilfssatz 3 in $P^{\alpha_n+1}\cdot Q^{\alpha_n+1}$ enthalten. Dasselbe ist der Fall für die beiden anderen Mengen. Denn man hat z. B.

$$\underset{x}{E}\big[\big(\bar{f}_n(x), y_k\big) < \varepsilon\big] = \sum_s \underset{x}{E}\big(\bar{f}_n(x) = y_s\big),$$

wobei die Summe über diejenigen s erstreckt ist, für welche $(y_s, y_k) < \varepsilon$ ist. Da, wie soeben bemerkt, alle $\underset{x}{E}[\bar{f}_n(x) = y_s]$ in $P^{\alpha_n+1}\cdot Q^{\alpha_n+1}$ enthalten sind, gilt das gleiche für ihre Summe.

Hieraus folgt, das $\underset{x}{E}\big(\psi_n(x) = y_k\big)$ ebenfalls in $P^{\alpha_n+1}\cdot Q^{\alpha_n+1}$ enthalten ist. Da die Wertmenge von $\psi(x)$ abzählbar ist, ist diese Operation nach der Bemerkung zu Hilfssatz 3 von der Klasse L^{α_n}.

Wir beweisen schließlich, daß $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \varphi(x)$.

Für ein beliebiges $x_0 \subset X$ ist

$$\big(f(x_0), \varphi(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Nach (1) ist

$$\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x) = f(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \bar{\varphi}_n(x) = \varphi(x).$$

Es gibt also ein N, so daß für $n > N$

$$(\bar{f}_n(x_0), \bar{\varphi}_n(x_0)) < \varepsilon$$

ist.

Hieraus folgt auf Grund von (2), daß $\psi_n(x_0) = \varphi_n(x_0)$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = \varphi(x_0)$ ist.

Bemerkung. Wenn jede der Operationen f_n und φ_n nur endlich viele Werte annimmt, so können wir, indem wir $\bar{f}_n = f_n$ und $\bar{\varphi}_n = \varphi_n$ setzen, ähnlich wie oben Operationen ψ_n erhalten, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.

Wir werden diese Bemerkung beim Beweise des nächsten Hilfssatzes benützen.

Hilfssatz 7. *Jede Operation $f(x)$ der Klasse L^ξ ($\xi > 1$) ist die Grenze einer Folge von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.*

Beweis. Nach Hilfssatz 4 gibt es eine gegen $f(x)$ gleichmäßig konvergierende Folge $\{f_m(x)\}$ von Operationen der Klasse L^ξ, deren jede eine isolierte Wertmenge besitzt.

Es bezeichne $\{\varepsilon_m\}$ eine den Bedingungen $\varepsilon_m > 0$ und $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < +\infty$ genügende Zahlenfolge.

Wir können annehmen, indem wir die ursprüngliche Folge $\{f_m(x)\}$ nötigenfalls durch eine Teilfolge ersetzen, daß

$$(f_m(x), f_{m+1}(x)) < \varepsilon_m \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Nach Hilfssatz 5 gibt es Folgen $\{f_m^n(x)\}$ von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt, derart daß

$$\lim_{n\to\infty} f_m^n(x) = f_m(x) \qquad (x \subset X,\ n = 1, 2, \ldots)$$

ist.

Sei $\varphi_1^n(x) = f_1^n(x)$. Nach Hilfssatz 6 und der darauf folgenden Bemerkung gibt es eine Folge $\{\varphi_2^n\}$ von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt, für welche $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(x) = f_2(x)$ und $(\varphi_1^n(x), \varphi^n(x)) < 2\varepsilon_1$ ist.

Indem wir ähnlich die Folgen $\{\varphi_3^n(x)\}, \ldots, \{\varphi_m^n(x)\}$ erklären, erhalten wir eine Doppelfolge $\{\varphi_m^n(x)\}$, welche für alle m, n folgende Bedingungen erfüllt:

a) $\varphi_m^n(x)$ ist eine im Sinne von Borel meßbare Operation einer Klasse $< \xi$, deren Wertmenge endlich ist.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_m^n(x) = f_m(x)$.

c) $(\varphi_m^n(x), \varphi_{m+1}^n(x)) < 2\varepsilon_m$.

Für ein beliebiges $x_0 \subset X$ ist

$$(1) \qquad (\varphi_n^n(x_0), f(x_0)) \leqslant (\varphi_n^n(x_0), \varphi_m^n(x_0)) + (\varphi_m^n(x_0), f_m(x_0)) + (f_m(x_0), f(x_0)).$$

Für $n > m$ ist wegen c)

$$(\varphi_n^n(x_0), \varphi_m^n(x_0)) \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} (\varphi_k^n(x_0), \varphi_{k+1}^n(x_0)) \leqslant 2 \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Daher folgt mit Hilfe von b)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\varphi_n^n(x_0), f(x_0)) \leqslant 2 \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k + (f_m(x_0), f(x_0)).$$

Da m beliebig ist, hat man schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^n(x_0) = f(x_0).$$

Also besitzt die Folge $\{\varphi_n^n(x)\}$ alle verlangten Eigenschaften.

Hilfssatz 8. *Wir setzen voraus, daß sich zwei beliebige Punkte von Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen. Sind dann F_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) disjunkte abgeschlossene Mengen aus X und y_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) beliebige Elemente aus Y, so gibt es eine in X definierte stetige Operation $f(x)$, für welche*

$$f(x) = y_i \qquad (x \subset F_i,\ i = 1, 2, \ldots, k).$$

Beweis. Wir erklären für beliebige reelle t eine Funktion $\varphi(t)$, deren Wertmenge in Y enthalten ist, wie folgt:

$$\varphi(n) = \begin{cases} y_n & (n = 1, 2, \ldots, k), \\ y_k & (t > k), \\ y_1 & (t < 1). \end{cases}$$

In den Intervallen $(1, 2), (2, 3), \ldots, (k-1, k)$ sei $\varphi(t)$ beliebig definiert, jedoch stetig. Das letztere ist möglich, da nach unserer Annahme y_i und y_{i+1} sich durch einen stetigen Bogen verbinden lassen.

Es bezeichne $u_i(x)$ die Entfernung des Elementes x von F_i; es ist also $u_i(x) = 0$ für $x \subset F_i$. Die Funktionen $u_i(x)$ sind offenbar stetig.

Wir bezeichnen mit H den k-dimensionalen Euklidischen Raum und seine Koordinaten mit $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Sei G die aus denjenigen Punkten, deren höchstens eine Koordinate verschwindet, bestehende offene Teilmenge von H und $t = F(t_1, \ldots, t_k)$ eine in G definierte und stetige Funktion von der Eigenschaft, daß

$$F(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_k) = i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Da für jedes $x \subset X$ höchstens eine der Zahlen $u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gleich Null ist, ist $t = F[u_1(x), \ldots, u_k(x)]$ eine in X definierte stetige Funktion, für welche

(1) $$F[u_1(x), \ldots, u_k(x)] = i \quad (x \subset F_i).$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi\{F[u_1(x), \ldots, u_k(x)]\},$$

so ist $f(x)$ die gesuchte Operation. Sie ist nämlich stetig und für $x \subset F_i$ hat man nach (1)

$$f(x) = \varphi(i) = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

§ 2

SATZ 1. *Jede Operation der Klasse L^ξ $(\xi \geqslant 1)$ ist auch von der Klasse b^ξ und umgekehrt, d. h.*

$$L^\xi \equiv b^\xi \quad (\xi \geqslant 1).$$

Beweis. Für $\xi = 1$ folgt der Satz sofort aus der Definition der Klasse b^1. Durch transfinite Induktion beweist man leicht mit Hilfe von Hilfssatz 7, daß $L^\xi \subset b^\xi$ $(\xi \geqslant 1)$.

Wir zeigen jetzt, daß $b^\xi \subset L^\xi$ $(\xi \geqslant 1)$, ebenfalls durch transfinite Induktion, indem wir also zunächst annehmen, daß dies für $\alpha < \xi$ richtig ist.

Sei $f(x) \subset b^\xi, f_n(x) \subset b^{\alpha_n}$ $(\alpha_n < \xi, n = 1, 2, \ldots)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Es bezeichne K eine beliebige Kugel mit dem Mittelpunkt y_0 und dem Radius r, d. h.

$$K \equiv \mathop{E}_{y}[(y_0, y) < r].$$

Wir setzen

$$G_{i,n} \equiv \mathop{E}_{x}\left[\bigl(f_n(x), y_0\bigr) < r - \frac{1}{i}\right].$$

Dann ist

$$\mathop{E}_{x}[f(x) \subset K] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n>k}^{\infty} G_{i,n}.$$

Wegen $G_{i,n} \subset Q^{\alpha_n+1}$ ist also

$$\mathop{E}_{x}\bigl(f(x) \subset K\bigr) \subset Q^{\alpha_n+2} \subset Q^{\xi+1}.$$

Da jede offene Teilmenge von Y als eine abzählbare Summe von Kugeln darstellbar ist, so folgt hieraus $f(x) \subset L^\xi$.

SATZ 2. *Wenn sich zwei beliebige Elemente von Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen, so ist $L^\xi \equiv B^\xi$ $(\xi \neq 1)$ und $B^1 \subset L^1$.*

Beweis. Ähnlich wie bei Satz 1 zeigt man leicht, daß $B^\xi \subset L^\xi$. (Offenbar ist $B^0 \equiv L^0$.)

Wir beweisen zunächst, daß, wenn die Wertmenge einer Operation $f(x)$ aus L^1 isoliert ist, diese Operation auch der Klasse B^1 angehört, d. h. die Grenze einer Folge stetiger Operationen ist.

Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Wir setzen

$$D_i = \mathop{E}_{x}[f(x) = y_i].$$

Da D_i eine Menge Q^2 ist, hat man

$$D_i = \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik},$$

wobei die Mengen D_{ik} der Klasse P^1 angehören, d. h. abgeschlossen sind und $D_{ik} \subset D_{ik+1}$ ist.

Nach Hilfssatz 8 gibt es für jedes n eine stetige Operation $f_n(x)$, für welche

$$f_n(x) = y_i \quad (x \subset D_{in},\ i = 1, \ldots, n).$$

Man hat für $x \subset D_i$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = y_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

also für alle x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Daher ist $f(x)$ von der Klasse B^1.

Nach Hilfssatz 7 ist daher jedes $f(x)$ aus L^2 in B^2 enthalten. Hieraus folgt durch transfinte Induktion mit Hilfe desselben Hilfssatzes, daß $L^\xi \subset B^\xi$ $(\xi \neq 1)$ ist.