

Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen*

In einer vor kurzem gemeinsam mit Herrn Kuratowski veröffentlichten Note⁽¹⁾ haben wir, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Kontinuumshypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, die folgende Verallgemeinerung eines bekannten Resultats von Herrn Vitali bewiesen:

Es gibt keine total additive nicht identisch verschwindende Mengenfunktion $m(X)$, welche jeder Teilmenge X der Strecke $(0, 1)$ eine reelle Zahl zuordnet und für alle aus nur einem Punkte bestehenden Mengen den Wert Null annimmt.

In diesem Satze kann die Strecke $(0, 1)$ durch eine beliebige Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums ersetzt werden. Die Funktion $m(X)$, welche wir wegen ihrer geometrischen Bedeutung eine Maßfunktion, oder auch ein Maß von X nennen, darf auch negative Werte annehmen.

In der vorliegenden Note beweisen wir einen allgemeineren, für Mengen von beliebiger Mächtigkeit gültigen Satz, wobei wir die Richtigkeit der sog. Hypothese der Alephs, d. h. das Bestehen der Gleichung

$$2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$$

für beliebige Ordnungszahlen ξ voraussetzen. Um diesen Satz aussprechen zu können, müssen wir zunächst den Begriff der Maßfunktion allgemein definieren.

Wir sagen, daß in einer Menge E eine additive Maßfunktion definiert ist, falls jeder Teilmenge G von E eine Zahl $|G|$ zugeordnet ist, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. $|G|$ ist nicht identisch null für alle G .
2. Es ist $|G_1 + G_2| = |G_1| + |G_2|$, falls $G_1 \cdot G_2 = 0$.
3. Besteht G aus einem einzigen Element von E , so ist $|G| = 0$.

Eine Maßfunktion ist „additiv mit der Mächtigkeit \aleph_ξ “, wenn für disjunkte Mengen G_η stets

$$\left| \sum G_\eta \right| = \sum |G_\eta| \quad (0 < \eta < \omega_\xi).$$

* Commenté sur p. 340.

(1) S. Banach et C. Kuratowski [24].

Eine Maßfunktion ist vom Typus \aleph_ξ , falls sie mit jeder Mächtigkeit kleiner als \aleph_ξ , nicht aber mit der Mächtigkeit \aleph_ξ additiv ist.

Bemerkung 1. Wenn eine Maßfunktion mit einer Mächtigkeit $\aleph_\xi \geq \aleph_0$ additiv ist, so ist jede Klasse disjunkter Teilmengen von E , deren jede eine Teilmenge mit von Null verschiedenem Masse enthält, höchstens abzählbar.

Bemerkung 2. Wenn die Menge E von der Mächtigkeit \aleph_ξ ist, so ist jede in E erklärte Maßfunktion höchstens vom Typus \aleph_ξ . Anderenfalls wäre nämlich das Maß einer beliebigen Teilmenge von E gleich der Summe der Maße ihrer Elemente, d. h. gleich Null.

Wir formulieren nunmehr unseren Satz:

Wenn in einer Menge E eine Maßfunktion vom Typus \aleph_ξ sich definieren läßt, so ist \aleph_ξ eine unerreichbare Kardinalzahl⁽¹⁾.

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, daß die Menge E die Mächtigkeit \aleph_ξ besitzt.

Nach der Bemerkung 2, kommt jeder Teilmenge von E deren Mächtigkeit kleiner als \aleph_ξ ist, das Maß Null zu. Daher enthält E eine Teilmenge von der Mächtigkeit \aleph_ξ deren Maß von Null verschieden ist. Da es hier nur auf die Mächtigkeit ankommt, dürfen wir annehmen, daß die Menge E selbst ein von Null verschiedenes Maß besitzt. Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß \aleph_ξ erreichbar ist. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem \aleph_ξ eine Grenzzahl ist oder nicht.

Es sei \aleph_ξ eine (erreichbare) Grenzzahl. Die Menge E läßt sich als Summe disjunkter Mengen $\{G_\eta\}$ in der Anzahl $< \aleph_\xi$, welche alle von kleinerer Mächtigkeit als \aleph_ξ sind, darstellen. Da jede dieser Mengen als Summe ihrer Elemente betrachtet werden kann und unsere Maßfunktion dem Typus \aleph_ξ angehört, haben alle diese Mengen das Maß Null, also auch die Menge E , gegen die Voraussetzung.

Es sei jetzt \aleph_ξ ($\xi > 1$)⁽²⁾ keine Grenzzahl. Wir bezeichnen mit A die Klasse aller Folgen

$$\{a_\eta\} \quad (0 < \eta < \omega_{\xi-1}),$$

wo die a_η Ordinalzahlen kleiner als ω_ξ sind. Sind $\{\alpha_\eta\}$ und $\{\beta_\eta\}$ zwei Folgen aus A , so schreiben wir

$$\{\alpha_\eta\} < \{\beta_\eta\}$$

(1) Eine Kardinalzahl \aleph_α nennen wir *unerreichbar*, falls sie eine Grenzzahl ist und sich nicht, als Summe von Mengen, welche von Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ sind und deren Anzahl $< \aleph_\alpha$ ist, darstellen läßt; d. h. die Anfangszahl ω_α ist regulär und α ist eine Limeszahl.

Die kleinste unerreichbare Kardinalzahl ist \aleph_0 . Es ist nicht bekannt, ob es noch andere gibt.

(2) Für den Beweis im Falle $\xi = 1$ verweisen wir auf die zitierte Note.

wenn für alle $\eta, a_\eta < \beta_\eta$ ist. Die Mächtigkeit von A ist offenbar

$$\aleph_1^{\aleph_{\xi-1}} = \aleph_\xi.$$

Wir nehmen an, daß die Menge A nach dem Typus ω_ξ wohlgeordnet ist. Wir entfernen nun jedes Element $\{a_\eta\}$, für welches ein in A früher vorkommendes Element $\{\beta_\eta\}$ existiert, derart, daß $\{a_\eta\} < \{\beta_\eta\}$ und bezeichnen mit \bar{E} die Menge der übrigen Elemente von A . Diese Menge \bar{E} besitzt folgende zwei Eigenschaften:

1. Sie ist von der Mächtigkeit \aleph_ξ .

2. Ist $\{a_\eta\}$ ein Element aus A , so ist die Menge derjenigen Elemente von \bar{E} , welche kleiner als $\{a_\eta\}$ sind, von einer kleineren Mächtigkeit als \aleph_ξ .

Unter der Annahme, daß die Mächtigkeit von \bar{E} kleiner als \aleph_ξ ist, kann \bar{E} als eine wohlgeordnete Menge von Folgen $\{\beta_\eta^\vartheta\}$, $0 < \vartheta < \omega_{\xi-1}$, dargestellt werden. Sei $a_\eta = \beta_\eta^\vartheta + 1$; alsdann existiert keine Folge $\{\beta_\eta\}$ aus \bar{E} für welche $\{a_\eta\} \leq \{\beta_\eta\}$ ist, im Widerspruch mit der Definition der Menge \bar{E} .

Ist ferner $\{\beta_\eta\} < \{a_\eta\}$ und $\{\beta_\eta\} \subset \bar{E}$, so kommt $\{\beta_\eta\}$ früher in A vor als $\{a_\eta\}$. Die Menge derjenigen Elemente, welche in A früher als $\{a_\eta\}$ vorkommen, ist aber von einer kleineren Mächtigkeit als \aleph_ξ .

Es sei $a < \omega_1$. Wir bezeichnen mit \bar{E}_a^n die Menge derjenigen Folgen $\{\beta_\eta\}$ von \bar{E} , für welche $\beta_\eta = a$.

Es ist klar, daß

$$\bar{E} = \sum_{0 < a < \omega_1} \bar{E}_a^n.$$

Da nach 1 die Mengen E und \bar{E} von gleicher Mächtigkeit sind, so läßt sich in \bar{E} eine Maßfunktion vom Typus \aleph_ξ erklären derart, daß $|\bar{E}| \neq 0$ ist. Die Menge aller a besitzt die Mächtigkeit \aleph_1 . Daher gibt es nach der Bemerkung 1, eine Ordnungszahl $a_\eta < \omega_1$ derart, daß für jedes η

1. $|\bar{E}_a^n| = 0$ für $a \geq a_\eta$,
2. $|G| = 0$ für jede Teilmenge G eines \bar{E}_a^n ($a \geq a_\eta$).

Wir setzen

$$\bar{E}' = \sum_{0 < \eta < \omega_\xi < 1} \sum_{a \geq a_\eta} \bar{E}_a^n.$$

Da die Teilmengen von \bar{E}_a^n vom Maß Null sind und die obige Summe aus Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_{\xi-1}$ besteht, so ist $|\bar{E}'| = 0$.

Die Menge $\bar{E} - \bar{E}'$ enthält nur diejenigen Folgen von \bar{E} , welche kleiner als $\{a_\eta\}$ sind. Die Anzahl dieser Folgen ist, nach der zweiten Eigenschaft der Menge \bar{E} , höchstens $\aleph_{\xi-1}$. Daher ist $|\bar{E} - \bar{E}'| = 0$, also

$$|\bar{E}| = |\bar{E}'| + |\bar{E} - \bar{E}'| = 0$$

— gegen die Voraussetzung.

Damit ist der Beweis unseres Satzes für den Fall, daß die Menge E die Mächtigkeit \aleph_ξ besitzt, erledigt. Um daraus den Beweis für den allgemeinen Fall abzuleiten, bemerken wir, daß aus der Voraussetzung unseres Satzes leicht die Existenz einer Klasse disjunkter Teilmengen E_η ($0 < \eta < \omega_\xi$) von E folgt, für welche:

$$\left| \sum_{0 < \eta < \omega_\xi} E_\eta \right| \neq \sum_{0 < \eta < \omega_\xi} |E_\eta|.$$

Nach der Bemerkung 1 haben nur abzählbar viele Mengen E_η ein von Null verschiedenes Maß. Wir bezeichnen die übrigen mit G_η . Es ist klar, daß

$$|G_\eta| = 0$$

und

$$\left| \sum G_\eta \right| \neq \sum |G_\eta| = 0$$

ist.

Wir bezeichnen mit W die Menge aller Ordnungszahlen, welche kleiner als ω_ξ sind. In dieser Menge, deren Mächtigkeit \aleph_ξ beträgt, definieren wir eine Maßfunktion vom Typus \aleph_ξ folgendermaßen:

Ist M eine Teilmenge von W , so setzen wir

$$|M| = \left| \sum G_\eta \right|,$$

wobei die Summe über alle Ordnungszahlen von M erstreckt ist. Da nach der vorletzten Relation $|W| \neq 0$ ist, so folgt aus unserem früheren Ergebnis, daß \aleph_ξ eine unerreichbare Kardinalzahl ist, w. z. b. w.

Auf Grund dieses Satzes beweist man leicht mit Hilfe der Bemerkung 2 folgendes Korollar:

Es sei \aleph die kleinste unerreichbare Kardinalzahl, welche größer als \aleph_0 ist. Wenn E eine Menge von einer kleineren Mächtigkeit als \aleph_0 ist und wenn in E eine Maßfunktion erklärt ist, so ist diese Maßfunktion vom Typus \aleph_0 , d. h. es ist nicht immer

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} E_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$$

für disjunkte Mengen E_n .