und daher

$$F^*(y^*) = \int_0^1 x(t)\,\overline{x}(t)\,dt,$$

wobei

$$\overline{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\eta}_n\, a_{k_n}(t)$$

ist; außerdem gilt die Gleichung

$$\|F^*(y^*)\| = \text{wesentliche obere Grenze}_{0\leqslant t\leqslant 1} |\overline{x}(t)|.$$

Man kann nun leicht beweisen, daß jede der Eigenschaften A′, B′ und C′ der Folge $\{k_n\}$ damit gleichbedeutend ist, daß die Operation $F^*(y^*)$ eine lineare Umkehrung besitzt. Der Beweis verläuft ganz analog dem entsprechenden Beweis des vorigen §.

Offenbar ist für das trigonometrische System die Bedingung I′ erfüllt. Dem in der Einleitung erwähnten Satze des Herrn S. Sidon zufolge besitzt die Folge $\{k_n\}$ die Eigenschaft B′, wenn sie nur der Bedingung

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} > k > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügt; dann hat sie also auch nach unserem Satze I′ die Eigenschaft C′. Dieses bedeutet, daß es, wenn die Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gegen Null konvergieren, eine integrierbare Funktion $x(t)$ gibt, für welche die Relationen

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos k_n t\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin k_n t\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind.

Bemerkung zu der Arbeit „Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen"

Bei der Drucklegung meiner oben zitierten Arbeit (Studia Mathematica 2 (1930), p. 207-220) haben sich einige Fehler eingeschlichen. Die Sätze a bzw. b (p. 208 bzw. 209) sollen nämlich statt des angeführten offenbar den folgenden Wortlaut haben:

Satz a. *Es gibt eine gegen Null konvergente Folge positiver Zahlen* $\{\varepsilon_n\}$ *und eine stetige Funktion* $x(t)$ *derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{2-\varepsilon_n} + |b_n|^{2-\varepsilon_n}),$$

wo a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *die Fourierkoeffizienten der Funktion* $x(t)$ *sind, divergent ist.*

Satz b. *Es gibt eine gegen* $+\infty$ *divergente Folge positiver Zahlen* $\{\lambda_n\}$ *und eine integrierbare Funktion* $x(t)$ *derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{\lambda_n} + |b_n|^{\lambda_n}),$$

wo a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *die Fourierkoeffizienten der Funktion* $x(t)$ *sind, divergiert.*

Im Zusammenhang mit dem letzten Satz bemerken wir, daß schon Herr W. Orlicz die Existenz einer integrierbaren Funktion bewiesen hat, für welche die Reihe der λ-ten Potenzen ihrer Fourierkoeffizienten bei jedem konstanten λ divergiert (*Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, Studia Mathematica 1 (1929), p. 1-41, insb. p. 30).

---

* Commenté sur p. 337.